Schriftenreihe
des Mathematischen Instituts der Universität
Münster
herausgegeben von R. Remmert

2. Serie, Heft 10

SCHEMATA ÜBER STEINSCHEN ALGEBREN

von

Jürgen Bingener

Januar 1976

Photomechanische Herstellung:
Phototechnische Zentralstelle der Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Jahre 1956 zeigte J.-P. Serre in seiner Arbeit „Géometrie algébrique et géometrie analytique “, daß die Theorien der kohärenten Garben über einem projektiven algebraischen $\mathbb{C}$-Schema X und über dem zugehörigen komplexen Raum X^{an} äquivalent sind. Dieses Resultat wurde später von A. Grothendieck auf den Fall kompletter Schemata ausgedehnt, vgl. auch [SGA 1]. In seinen Vorträgen im Séminaire H. Cartan wies dann A. Grothendieck auf die Notwendigkeit hin, eine relative Theorie der Schemata über geringten Räumen, insbesondere über komplexen Räumen, zu entwickeln. Wesentliche Grundlage sollte dabei der Satz von H. Grauert und R. Remmert über projektive holomorphe Abbildungen [GR58a] sein. Eine derartige Theorie würde dann insbesondere Anwendungen der problemloseren algebraischen Methoden in der analytischen Geometrie ermöglichen.

Dieses Programm ist inzwischen von M. Hakim in einem allgemeineren Rahmen zum Teil durchgeführt worden ([Hak72]). Dabei wird allerdings ein relativ aufwendiger Begriffsapparat verwendet. Es erscheint daher insbesondere im Hinblick auf die zahlreichen Anwendungen dieser Theorie (Vergleichssatz für die de Rham-Kohomologie, verschiedene Modulprobleme bei „algebraischen “ holomorphen Abbildungen, Divisorenklassengruppen analytischer Algebren [Bin75] usw.) sinnvoll, speziell für den Fall eines komplexen Raumes als Basisraum, einen elementareren Zugang zu diesen Ergebnissen zu geben. Genau dies ist das Ziel der vorliegenden Arbeit. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß analoge Untersuchungen im Falle der nichtarchimedischen Funktionentheorie von U. Köpf in [Köp74] angestellt wurden.

Unsere Vorgehensweise läßt sich folgendermaßen darstellen. Sei S ein Steinscher Raum und X ein Schema lokal von endlicher Darstellung über der zu S gehörigen Steinschen Algebra $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. Diesem Schema kann man in natürlicher Weise einen komplexen Raum X^{an} über S zuordnen. In § 1 sind die wichtigsten formalen Eigenschaften dieser Zuordnung zusammengestellt: Flachheit der kanonischen Abbildung $X^{\text{an}} \to X$, Verträglichkeit mit Faserprodukten und Basiserweiterungen, Skalarrestriktion usw..

In § 2 werden algebraische und topologische Eigenschaften des Schemas X mit denen des zugehörigen komplexen Raumes X^{an} verglichen. Für die algebraischen Eigenschaften ergibt sich dabei ein Korrespondenzprinzip, das sich etwa folgendermaßen umreißen läßt. Sei E eine „gute „Eigenschaft für lokale noethersche Ringe, zum Beispiel Regularität, Normalität, Reduziertheit usw.. Dann gibt es zu jedem Steinschen Kompaktum $K \subseteq S$ mit Schnittring $A_K = \Gamma(K, \mathcal{O}_S)$ nach eventueller Verkleinerung von S als Umgebung von K eine abgeschlossene Teilmenge T von X mit folgenden Eigenschaften: (1) $T \otimes_A A_K$ ist die Menge der Punkte $x \in X \otimes_A A_K$, in denen der Ring $\mathcal{O}_X$ die Eigenschaft E nicht hat. (2) T^{an} ist die Menge der Punkte aus X^{an}, in denen $\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}$ die Eigenschaft E nicht hat. Ist X quasikompakt, so gilt darüberhinaus: Genau dann hat $X \otimes_A A_K$ die Eigenschaft E, wenn dies für den Keim von X^{an} bezüglich K gilt. Hierbei bezeichnet $T \otimes_A A_K$ das Urbild von T unter der Projektion $X \otimes_A A_K \to X$ und T^{an} das Urbild von T unter $X^{\mathrm{an}} \to X$. Die Notwendigkeit zur Einbeziehung Steinscher Kompakta ergibt sich dabei aus der Tatsache, daß X i. a. kein lokal noethersches Schema ist, während dies für $X \otimes_A A_K$ aufgrund des Satzes von Frisch der Fall ist.

Speziell für $X = \operatorname{Spec} A$ und $K = \{s_0\}$ mit $s_0 \in S$ erhält man das bekannte Korrespondenzprinzip in der analytischen Geometrie (siehe etwa [Cartan 60/61]) zurück, während sich für $S = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ die diesbezüglichen Ergebnisse aus [SGA 1, Exp. XII] ergeben.

In § 3 vergleichen wir die Eigenschaften eines Morphismus $f\colon X \to Y$ von A-Schemata endlicher Darstellung mit denen der zugehörigen holomorphen Abbildung $f^{\mathrm{an}}\colon X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$. Sei nun f eigentlich und $\mathcal{F}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. In § 4 zeigen wir den Vergleichssatz ((4.2)): Die kanonischen Homomorphismen $R^p f_*(\mathcal{F})^{\mathrm{an}} \to R^p f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}})$ sind bijektiv für alle p. Hierbei bezeichnet $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ das Urbild von $\mathcal{F}$ unter der Abbildung $X^{\mathrm{an}} \to X$. Unter Heranziehung dieses Satzes geben wir dann einige einfache Fälle an, in denen der Funktor $X \mapsto X^{\mathrm{an}}$ mit der Bildung von Kokernen verträglich ist.

Alsdann beweisen wir in § 5 den Existenzsatz, den man folgendermaßen formulieren kann (vgl. (5.3)): Ist X ein eigentliches A-Schema von endlicher Darstellung und $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum, so ist die Kategorie der kohärenten Modul auf $X \otimes_A A_K$ äquivalent zu der Kategorie der Keime bezüglich K von kohärenten Modul auf X^{an}. Aus diesem Satz ergibt sich eine Reihe von Folgerungen, von denen nur zwei erwähnt seien. Die Picardsche Gruppe $\operatorname{Pic}(X \otimes_A A_K)$ ist isomorph zur Gruppe der Keime bezüglich K von Isomorphieklassen von Geradenbündeln auf X^{an} (vgl. (5.4)). Der Ring der meromorphen Funktionen auf $X \otimes_A A_K$ ist kanonisch isomorph zum Ring der Keime bezüglich K von meromorphen Funktionen auf X^{an} ((5.8)). Aus dem Vergleichssatz zusammen mit dem Existenzsatz folgt sofort der obenerwähnte Satz von Grauert–Remmert über projektive holomorphe Abbildungen ((5.11)).

Es seien Y ein (nicht notwendig Steinscher) komplexer Raum und $\mathcal{S} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ eine graduierte $\mathcal{O}_Y$-Algebra endlichen Typs mit kohärenten homogenen Komponenten. Ähnlich wie in [EGA II] kann man $\mathcal{S}$ ein homogenes analytisches Spektrum $X = \operatorname{Proj}^{\mathrm{an}} \mathcal{S}$ zuordnen. Mit dem Existenz- und Vergleichssatz folgt, daß die in loc. cit. angegebene Beschreibung der kohärenten Modul auf X durch graduierte $\mathcal{S}$-Modul auch in dem hier betrachteten Fall gültig bleibt (vgl. (5.12)).

In § 6 wenden wir den Existenzsatz an, um aus den bekannten algebraischen Darstellbarkeitssätzen für den Hilbertschen und Picardschen Funktor ([Art69]) analoge Resultate im analytischen Fall abzuleiten.

Sei X wieder ein (nicht notwendig eigentliches) Schema von endlicher Darstellung über der Steinschen Algebra $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ und $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum. Im letzten Paragraphen zeigen wir, daß die Kategorie der étale-Überlagerungen von $X \otimes_A A_K$ äquivalent ist zur Kategorie der Keime bezüglich K von étale-Überlagerungen von X^{an} (Relativer Riemannscher Existenzsatz (7.4)). Der in [SGA 1, Exp. XII] für den Spezialfall $A = \mathbb{C}$ hierfür angegebene Beweis, der sich wesentlich auf den Satz von Grauert–Remmert über die Fortsetzung normaler analytischer Überlagerungen ([GR58b], vgl. auch loc. cit.) stützt, läßt sich in die hier betrachtete allgemeine Situation übertragen.

Die Bezeichnungen übernehmen wir aus EGA; dabei brauchen Schemata gemäß neuerem Sprachgebrauch nicht mehr separiert zu sein. Ist ferner $\mathfrak{a}$ ein Ideal der Strukturgarbe eines lokalgeringten Raumes X, so sei $D(\mathfrak{a})$ das Komplement der Nullstellenmenge $V(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ in X. Für eine Teilmenge E von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ sei analog $V(E) \coloneqq V(\mathcal{O}_X E)$ und $D(E) \coloneqq X \setminus V(E)$. Für einen Modul M über dem Ring A bezeichne $\mu M = \mu_A M$ die Minimalanzahl von Erzeugenden von M. Ist A noethersch, so sei $\operatorname{Sing} A$ die Singularitätenmenge von $\operatorname{Spec} A$.

Herr Prof. Dr. R. Remmert gab mir die Möglichkeit, die vorliegende Arbeit in dieser Schriftenreihe zu veröffentlichen. Dafür sei ihm hier besonders gedankt. Weiterhin möchte ich den Herren Professoren G. Scheja und U. Storch für ihre Unterstützung meinen herzlichen Dank aussprechen. Frau I. Plänker, Bochum, danke ich für ihre Sorgfalt bei der Anfertigung der Druckvorlagen.

1 Der zu einem Schema gehörige komplexe Raum

Im folgenden sei S ein Steinscher Raum und $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ die zugehörige Steinsche Algebra. X sei ein A-Schema lokal von endlicher Darstellung. Für jeden (nicht notwendig separierten) komplexen Raum Z über S sei $F_X(Z) \coloneqq \operatorname{Hom}_A(Z, X)$ die Menge der A-Morphismen von lokalgeringten Räumen von Z in X. Man hat so einen kontravarianten Funktor F_X von der Kategorie der komplexen Räume über S in die Kategorie der Mengen definiert.

(1.1) Satz. *Der Funktor F_X ist darstellbar, d. h. es gibt einen komplexen Raum X^{an} über S und einen A-Morphismus $i_X \colon X^{\mathrm{an}} \to X$ derart, daß die Abbildung*

$$\operatorname{Hom}_S(Z, X^{\mathrm{an}}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(Z, X), \quad h \mapsto i_X \circ h,$$

für jeden komplexen Raum Z über S bijektiv ist. Für $x \in X^{\mathrm{an}}$ ist der zu i_X gehörige Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{X, i_X(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}, x}$$

flach und induziert einen Isomorphismus in den Komplettierungen. X^{an} heißt der zu X gehörige komplexe Raum.

Beweis. Gilt der Satz für X, so auch für jedes Unterschema Y von X lokal von endlicher Darstellung: Sei zunächst Y ein offenes Unterschema von

X. Dann ist $i_X^{-1}(Y)$, versehen mit der von X^{an} induzierten Struktur, ein offener analytischer Unterraum von X^{an}. Offenbar besitzt $i_X^{-1}(Y)$ die Y^{an} definierende universelle Eigenschaft. Die Aussage über die Ringhomomorphismen ist ebenfalls erfüllt. Sei nun Y ein abgeschlossener Unterraum von X, definiert durch das endliche Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathcal{O}_X$. Dann ist Y^{an} der durch das kohärente Ideal $\mathfrak{a}\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ definierte abgeschlossene analytische Unterraum von X^{an}. Da Komplettierung und Restklassenbildung bei noetherschen Ringen miteinander verträglich sind, ergibt sich die Aussage über die zu i_Y gehörigen Ringhomomorphismen unmittelbar aus der entsprechenden Aussage über i_X. Aus diesen beiden Spezialfällen folgt sofort der allgemeine Fall eines beliebigen Unterschemas von endlicher Darstellung.

Der Satz gilt, falls $X = \operatorname{Spec} B$ affin ist. Nach dem Bewiesenen genügt es, den Fall eines Polynomringes $B = A[t_1, \dots, t_n]$ zu betrachten. Zu dem kanonischen A-Algebrahomomorphismus $A[t_1, \dots, t_n] \longrightarrow \Gamma(S \times \mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n})$ gehört nach [EGA I, ERRATA ET APPENDA, 1.8.1] ein Morphismus von lokalgeringten Räumen $S \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \operatorname{Spec} A[t_1, \dots, t_n]$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S \times \mathbb{C}^n \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & S \arrow[d, "i_S"] \\
X = \operatorname{Spec} A[t_1, \dots, t_n] \arrow[r] & \operatorname{Spec} A
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Das Paar $(S \times \mathbb{C}^n, i)$ besitzt die X^{an} definierende universelle Eigenschaft. Zu zeigen bleibt die Aussage über i_X. Sei $(s, a_1, \dots, a_n) \in S \times \mathbb{C}^n$, $\mathfrak{m}(s)$ das zu s gehörige maximale Ideal von A sowie $\mathfrak{M}$ das von $\mathfrak{m}(s)$ und $t_i - a_i$, $1 \leq i \leq n$, in $A[t_1, \dots, t_n]$ erzeugte maximale Ideal. Es ist $i_X(s, a_1, \dots, a_n) = \mathfrak{M}$. Bekanntlich ist $A_{\mathfrak{m}(s)}$ noethersch und der kanonische Homomorphismus $A_{\mathfrak{m}(s)} \to \mathcal{O}_{S,s}$ induziert einen Isomorphismus in den Komplettierungen. Wegen

$$A[t_1, \dots, t_n]_{\mathfrak{M}} = A_{\mathfrak{m}(s)}[t_1, \dots, t_n]_{(\mathfrak{m}(s),\, t_1 - a_1, \dots, t_n - a_n)}$$

und

$$(\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n, (s, a_1, \dots, a_n)})^\wedge = \widehat{\mathcal{O}_{S,s}}[[t_1 - a_1, \dots, t_n - a_n]]$$

gilt die entsprechende Aussage auch für die Erweiterung

$$A[t_1, \dots, t_n]_{\mathfrak{M}} \longrightarrow \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n, (s, a_1, \dots, a_n)}.$$

Der allgemeine Fall läßt sich nun auf die behandelten Spezialfälle zurückführen: Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine offen-affine Überdeckung von X. Nach dem ersten Teil des Beweises lassen sich die X_i^{an}, $i \in I$, zu einem komplexen Raum X^{an} über S zusammenkleben, der die geforderten Eigenschaften hat. $\square$

Die Zuordnung $X \mapsto X^{\mathrm{an}}$ ist funktoriell: Zu einem A-Morphismus $f\colon X \to Y$ gehört eine holomorphe S-Abbildung $X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$, die wir mit f^{an} bezeichnen.

Der Funktor $X \mapsto X^{\mathrm{an}}$ kommutiert mit Faserprodukten: Sind X, Y und Z drei A-Schemata lokal von endlicher Darstellung und $X \to Z$, $Y \to Z$ A-Morphismen, so ist

$$(X \times_Z Y)^{\mathrm{an}} = X^{\mathrm{an}} \times_{Z^{\mathrm{an}}} Y^{\mathrm{an}}.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß $X \times_Z Y$ ein Produkt von X und Y in der Kategorie der geringten Räume mit lokalen Ringen über Z ist, vgl. [EGA I, ERRATA ET APPENDA, 3.2.9].

Für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ setzen wir $\mathcal{F}^{\mathrm{an}} := i_X^*(\mathcal{F})$. Wegen (1.1) ist $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ ein exakter Funktor.

Wir führen noch folgende Abkürzungen ein: Ist M eine beliebige Teilmenge von S, so sei $A_M := \Gamma(M, \mathcal{O}_S)$. Für einen komplexen Raum Z über S mit Strukturmorphismus $f\colon Z \to S$ bezeichne $Z|_M$ den $\mathbb{C}$-geringten Raum $(f^{-1}(M), \mathcal{O}_Z|_{f^{-1}(M)})$. Ist M offen, so ist $Z|_M$ wieder ein komplexer Raum. Für eine beliebige Teilmenge T von Z (bzw. einen $\mathcal{O}_Z$-Modul $\mathcal{F}$) sei ebenso $T|_M := T \cap f^{-1}(M)$ (bzw. $\mathcal{F}|_M := \mathcal{F}|_{f^{-1}(M)}$).

(1.2). Basiserweiterung. Sei $S' \to S$ eine holomorphe Abbildung Steinscher Räume und $A' := \Gamma(S', \mathcal{O}_{S'})$. Für jedes A-Schema X lokal von endlicher Darstellung ist dann

$$(X \otimes_A A')^{\mathrm{an}} = X^{\mathrm{an}} \times_S S'.$$

Speziell gilt für einen offenen Steinschen Unterraum $U \subseteq S$

$$(X \otimes_A A_U)^{\mathrm{an}} = X^{\mathrm{an}}|_U.$$

Beweis. Es gibt einen natürlichen A'-Morphismus $i\colon X^{\mathrm{an}} \times_S S' \to X \otimes_A A'$. Man prüft leicht, daß das Paar $(X^{\mathrm{an}} \times_S S', i)$ die $(X \otimes_A A')^{\mathrm{an}}$ definierende universelle Eigenschaft besitzt. □

(1.3). Skalarrestriktion. Es sei $S' \to S$ eine holomorphe Abbildung Steinscher Räume, $A' := \Gamma(S', \mathcal{O}_{S'})$ und X' ein A'-Schema lokal von endlicher Darstellung. X', aufgefaßt als A-Schema, werde mit X bezeichnet. Ist dann X ein A-Schema lokal von endlicher Darstellung und ist $\dim S' < \infty$, so gilt $X^{\mathrm{an}} = X'^{\mathrm{an}}$.

Beweis. Sei $f'\colon X' \to \operatorname{Spec} A'$ der Strukturmorphismus. Zu $f' \circ i_X\colon X^{\mathrm{an}} \to \operatorname{Spec} A'$ gehört wegen $\dim S' < \infty$ eine holomorphe S-Abbildung $\varphi\colon X^{\mathrm{an}} \to S'$, vgl. [For67, § 1]. Sei $Z \xrightarrow{g} S'$ ein komplexer Raum über S' und $\Phi\colon Z \to X'$

ein A'-Morphismus.

$$
\begin{tikzcd}
 & & S \arrow[dd] & \\
 & X^{\mathrm{an}} \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dd, "i_X"'] & & S' \arrow[ul] \arrow[dd, "i_{S'}"] \\
Z \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[urrr, "g"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & \operatorname{Spec} A & \\
 & X' \arrow[ur] \arrow[rr, "f'"'] & & \operatorname{Spec} A' \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

Es gibt eine holomorphe S-Abbildung $h\colon Z \to X^{\mathrm{an}}$ mit $\Phi = i_X \circ h$. Aus

$$i_{S'} \circ \varphi \circ h = f' \circ i_X \circ h = f' \circ \Phi = i_{S'} \circ g$$

folgt $\varphi \circ h = g$. Daher ist h ein S'-Morphismus. Die Eindeutigkeit von h ist trivial. $\square$

Wir notieren die folgende für Reduktionen nützliche Variante von (1.2):

(1.4). $f\colon X \to Y$ sei ein Morphismus von A-Schemata lokal von endlicher Darstellung. Dabei sei $Y = \operatorname{Spec} B$ affin. Sei $C := \Gamma(Y^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}})$ die zu Y^{an} gehörige Steinsche Algebra. Dann ist $X \otimes_B C$ ein C-Schema lokal von endlicher Darstellung und es gilt

$$(X \otimes_B C)^{\mathrm{an}} = X^{\mathrm{an}}$$

als komplexe Räume über Y^{an}.

Der Beweis ergibt sich leicht aus dem oben bereits verwendeten Satz von Igusa–Forster ([For67, § 1]), wenn man noch beachtet, daß B dicht in C liegt.

2 Korrespondenz algebraischer und topologischer Eigenschaften

Wir behalten die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus § 1 bei. Sei $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum, das ist eine semianalytische kompakte Teilmenge von S, die eine Umgebungsbasis aus offenen Steinschen Mengen besitzt. Der Ring $A_K = \Gamma(K, \mathcal{O}_S)$ ist dann noethersch ([Fri67]), ausgezeichnet ([Bin76, § 1]) und Restklassenring eines regulären Ringes. Letzteres folgt aus

(2.1) Lemma. *Seien Z ein Steinscher Raum, Y ein abgeschlossener Unterraum von Z und K ein Steinsches Kompaktum in Y. Dann ist K auch ein Steinsches Kompaktum in Z.*

Beweis. Sei W eine offene Umgebung von K in Z. Wir wählen eine Y-offene Steinsche Menge V mit $K \subseteq V \Subset W$. Nach einem (bisher unveröffentlichten) Satz von A. Douady gibt es eine in Z offene Steinsche Menge U mit $U \cap Y = V$. Gemäß [Kau66] besitzt der abgeschlossene Unterraum $U \cap Y$ von U eine Umgebungsbasis aus offenen Steinschen Mengen. Daher findet man eine offene Steinsche Menge D in U mit $U \cap Y \subseteq D \subseteq U \cap W$. Hieraus folgt die Behauptung. □

Wir benötigen zunächst:

(2.2). Seien $K \subseteq L$ zwei Steinsche Kompakta in S und X ein A-Schema lokal von endlicher Darstellung. Dann ist der kanonische Morphismus

$$X \otimes_A A_K \xrightarrow{i_{L,K}} X \otimes_A A_L$$

regulär.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $\operatorname{Spec} A_K \to \operatorname{Spec} A_L$ regulär ist. Sei dazu $\mathfrak{p} \subseteq A_K$ ein Primideal und $\mathfrak{q} := \mathfrak{p} \cap A_L$. Wir haben zu zeigen, daß $(A_K)_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}(A_K)_\mathfrak{p}$ (geometrisch) regulär ist. Dazu dürfen wir annehmen, daß $\mathfrak{q} = 0$ gilt. Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_S$ ein kohärentes Ideal, dessen Nullstellenmenge mit der Singularitätenmenge von S übereinstimmt und $\mathbf{a} := \Gamma(L, \mathfrak{a})$. Dann gilt bekanntlich $V(\mathbf{a}) = \operatorname{Sing} A_L$ und $V(\mathbf{a}A_K) = \operatorname{Sing} A_K$. Da A_L ein Integritätsring ist, ist $\mathbf{a}$ verschieden vom Nullideal. Folglich ist $\mathbf{a}A_K \not\subseteq \mathfrak{p}$, d. h. $(A_K)_\mathfrak{p}$ ist regulär.

Daß $i_{L,K}$ regulär ist, ergibt sich nun beispielsweise aus [EGA IV$_2$, (6.8.3)]. □

Sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Ist $M \subseteq S$, so bezeichne $\mathcal{F} \otimes_A A_M$ das Urbild von $\mathcal{F}$ unter der Projektion $X \otimes_A A_M \to X$. Für eine beliebige Teilmenge T von X sei $T \otimes_A A_M$ das Urbild von T in $X \otimes_A A_M$ sowie $T^{\mathrm{an}} := i_X^{-1}(T) \subseteq X^{\mathrm{an}}$. Mit diesen Notationen gilt

(2.3). Sei $\mathcal{F}$ ein endlicher quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul und E eine der folgenden Eigenschaften für endliche Moduln über lokalen noetherschen Ringen:

(1) Trivialität (d. h. Nullsein) bzw. Freiheit.

(2) $\mu \leq n$ bzw. $\operatorname{dim.proj} \leq n$....

(3) torsionslos bzw. reflexiv zu sein.

(4) (S_n).

(5) $\operatorname{coprof} \leq n$ bzw. CM-Modul.

Seien $K \subseteq L$ zwei Steinsche Kompakta. Es sei T_K die Menge der Punkte $x \in X \otimes_A A_K$, für die der $\mathcal{O}_X$-Modul $(\mathcal{F} \otimes_A A_K)_x$ die Eigenschaft E nicht hat, und analog T_L. Dann ist T_L abgeschlossen und es gilt

$$T_K = i_{L,K}^{-1}(T_L).$$

Beweis. Daß die Mengen T_L für die unter (1) bis (3) aufgezählten Eigenschaften abgeschlossen sind, ist klar. Für die Eigenschaften aus (4) und (5) ergibt sich die Abgeschlossenheit daraus, daß $X \otimes_A A_L$ lokal in ein reguläres Schema einbettbar ist, vgl. [EGA IV$_2$, (6.11.2)]. Die Beziehung $T_K = i_{L,K}^{-1}(T_L)$ resultiert wegen (2.2) aus den folgenden Aussagen: Sei $B \to C$ ein lokaler Homomorphismus lokaler noetherscher Ringe derart, daß der zugehörige Morphismus $\operatorname{Spec} C \to \operatorname{Spec} B$ regulär ist, und N ein endlicher B-Modul. Genau dann ist N Null bzw. frei, wenn dies für den C-Modul $N \otimes_B C$ gilt. Es ist $\mu_B N = \mu_C N \otimes_B C$ und $\operatorname{dim.proj}_B N = \operatorname{dim.proj}_C N \otimes_B C$. Genau dann ist N torsionslos bzw. reflexiv, wenn dies für $N \otimes_B C$ gilt. N genügt der Bedingung (S_n) dann und nur dann, wenn dies für $N \otimes_B C$ gilt ([EGA IV$_2$, (6.4.2)]). Es ist $\operatorname{coprof}_B N = \operatorname{coprof}_C N \otimes_B C$ ([EGA IV$_2$, (6.3.2)]). $\square$

Wichtiger sind die folgenden, nur für Ringe definierten Eigenschaften.

(2.4). Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$ ein endliches Ideal und E eine der folgenden Eigenschaften für lokale noethersche Ringe bzw. für ein Ideal in einem solchen Ring.

(1) (R_n).

(2) Regularität bzw. Normalität bzw. Reduziertheit.

(3) Vollständiger Durchschnitt bzw. Gorensteinring.

(4) $\operatorname{ht} \geq n$.

Sei T_K die Menge der Punkte $x \in X \otimes_A A_K$, für die $\mathcal{O}_x$ bzw. $(\mathfrak{a} \otimes_A A_K)_x$ die Eigenschaft E nicht hat, und analog T_L. Dann ist T_L abgeschlossen und es ist

$$T_K = i_{L,K}^{-1}(T_L).$$

Der Beweis von (2.4) verläuft analog zu dem Beweis von (2.3). Die Abgeschlossenheit von T_L folgt hier für die unter (1) und (2) angegebenen Eigenschaften aus der Tatsache, daß $X \otimes_A A_L$ ein ausgezeichnetes Schema ist, vgl. [EGA IV$_2$, (7.8.3)].

Für die Eigenschaften aus (3) genügt es, folgendes zu zeigen. Sei $B \to C$ ein flacher Homomorphismus regulärer Ringe, $\mathfrak{b} \subseteq B$ ein Ideal, $\mathfrak{r} \subseteq C$ ein $\mathfrak{b}C$ umfassendes Primideal und $\mathfrak{q} := \mathfrak{r} \cap B$. Genau dann ist $(B/\mathfrak{b})_\mathfrak{q}$ ein vollständiger Durchschnitt bzw. Gorensteinring, wenn dies für $(C/\mathfrak{b}C)_\mathfrak{r}$ gilt. Ferner ist die Menge der Primideale $\mathfrak{q}$, für die $(B/\mathfrak{b})_\mathfrak{q}$ ein vollständiger Durchschnitt bzw. Gorensteinring ist, offen in $\operatorname{Spec} B/\mathfrak{b}$.

Dies resultiert unmittelbar aus den folgenden Tatsachen. $(B/\mathfrak{b})_\mathfrak{q}$ ist vollständiger Durchschnitt genau dann, wenn $\mathfrak{b}_\mathfrak{q}$ von einer Primfolge erzeugt werden kann. Genau dann ist $(B/\mathfrak{b})_\mathfrak{q}$ Gorensteinsch, wenn $\operatorname{Ext}_B^s(B/\mathfrak{b}, B)_\mathfrak{q}$ als $(B/\mathfrak{b})_\mathfrak{q}$-Modul frei (vom Rang 1) ist. Hierbei ist s die Höhe von $\mathfrak{b}_\mathfrak{q}$.

Zur späteren Verwendung zeigen wir

(2.5). Es sei $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum. Ist dann X quasikompakt und $T \subseteq X$ konstruierbar, so sind äquivalent:

(a) Es gibt eine offene Umgebung U von K mit $T^{\mathrm{an}}|_U = \varnothing$.

(b) $T \otimes_A A_K = \varnothing$.

Beweis. Mit $f\colon X \to \operatorname{Spec} A$ werde der Strukturmorphismus bezeichnet. Wir wollen uns zunächst überlegen, daß es genügt, den Fall $X = \operatorname{Spec} A$ zu betrachten. Jedenfalls dürfen wir annehmen, daß $T = X$ affin ist. Es gilt

$$f^{\mathrm{an}}(X^{\mathrm{an}}) = f(X)^{\mathrm{an}} \quad \text{sowie} \quad f \otimes A_K(X \otimes A_K) = f(X) \otimes A_K.$$

Daher ist (a) gleichwertig damit, daß man S als Umgebung von K derart wählen kann, daß $f(X)^{\mathrm{an}} = \varnothing$ ist (vgl. auch (1.2)), während (b) bedeutet, daß $f(X) \otimes A_K = \varnothing$ ist. Da $f(X)$ nach dem Konstruierbarkeitssatz von Chevalley ([EGA IV_1, (1.8.4)]) überdies eine konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Spec} A$ ist, ist die gewünschte Reduktion gezeigt.

Sei nun $X = \operatorname{Spec} A$. Es gibt endlich erzeugte Ideale $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i \subseteq A$, $1 \leq i \leq n$, mit

$$T = \bigcup_{i=1}^{n} V(\mathfrak{a}_i) \cap D(\mathfrak{b}_i).$$

Ohne Einschränkung sei $n = 1$. Bedingung (b) ist dann äquivalent dazu, daß $\mathfrak{b}_1 A_K \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_1 A_K}$ ist. Hingegen besagt (a), daß es eine Umgebung U von K mit $V(\mathfrak{a}_1 \mathcal{O}_U) \cap D(\mathfrak{b}_1 \mathcal{O}_U) = \varnothing$ gilt. Die Gleichwertigkeit von (a) und (b) folgt nun aus dem Nullstellensatz. □

(2.6) Definition. *Sei $\mathcal{F}$ ein endlicher quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Eine Eigenschaft E, die für endliche Modul über lokalen noetherschen Ringen definiert ist, heißt korrespondierend für $\mathcal{F}$, wenn gilt: Ist $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum, so gibt es nach eventueller Verkleinerung von S als Umgebung von K eine abgeschlossene konstruierbare Menge $T \subseteq X$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $T \otimes_A A_K$ ist die Menge der Punkte x aus $X \otimes_A A_K$, in denen $(\mathcal{F} \otimes_A A_K)_x$ die Eigenschaft E nicht hat.

(2) T^{an} ist die Menge der Punkte aus X^{an}, in denen $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ die Eigenschaft E nicht hat.

Ist E eine Eigenschaft lokaler noetherscher Ringe, so definiert man analog, wann E korrespondierend für $\mathcal{O}_X$ heißen soll.

Man beachte, daß T (nach eventueller Verkleinerung von S) durch $T \otimes_A A_K$ eindeutig bestimmt ist, falls X quasikompakt ist, vgl. [EGA IV_3, (8.3.11)].

Betrachten wir noch den Spezialfall $X = \operatorname{Spec} A$. Die Vorgabe von $\mathcal{F}$ ist dann im wesentlichen äquivalent mit der Vorgabe eines kohärenten $\mathcal{O}_S$-Moduls, den wir wieder mit $\mathcal{F}$ bezeichnen wollen. E ist korrespondierend für $\mathcal{F}$ genau dann, wenn es zu jedem Steinschen Kompaktum $K \subseteq S$ nach eventueller Verkleinerung von S ein endliches Ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

(1) $V(\Gamma(K, \mathcal{I}))$ ist die Menge der Primideale $\mathfrak{q} \subseteq A_K$, für die der $(A_K)_{\mathfrak{q}}$-Modul $\Gamma(K, \mathcal{F})_{\mathfrak{q}}$ die Eigenschaft E nicht hat.

(2) $V(\mathcal{I})$ ist die Menge der Punkte $s \in S$, für die $\mathcal{F}_s$ die Eigenschaft E nicht hat.

(2.7). Korrespondenz algebraischer Eigenschaften. X sei ein A-Schema lokal von endlicher Darstellung, $\mathcal{F}$ ein endlicher quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul und $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$ ein endliches Ideal. Sei E eine der in (2.3) und (2.4) betrachteten Eigenschaften für Ringe bzw. Modul bzw. Ideale. Dann ist E korrespondierend. Ist X außerdem quasikompakt, so sind für jedes Steinsche Kompaktum $K \subseteq S$ äquivalent:

(a) Es gibt eine offene Umgebung U von K derart, daß $X^{\mathrm{an}}|_U$ bzw. $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}|_U$ bzw. $\mathfrak{a}^{\mathrm{an}}|_U$ die Eigenschaft E hat.

(b) $X \otimes_A A_K$ bzw. $\mathcal{F} \otimes_A A_K$ bzw. $\mathfrak{a} \otimes_A A_K$ hat E.

Beweis. Es sei $L \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum mit $K \subseteq \mathring{L}$ sowie U eine offene Steinsche Umgebung von K mit $K \subseteq U \subseteq \mathring{L}$. Die Mengen T_L und T_K seien wie in (2.3) und (2.4) definiert. $T := T_L \otimes_{A_L} A_U$ ist eine abgeschlossene konstruierbare Teilmenge von $X \otimes_A A_U$ mit $T \otimes_A A_K = T_K$, vgl. (2.3) und (2.4). Sei $i\colon X^{\mathrm{an}}|_L \to X \otimes_A A_L$ der kanonische Morphismus. Dann ist $i^{-1}(T_L)$ die Menge der Punkte $x \in X^{\mathrm{an}}|_L$, für die $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x}$ bzw. $\mathcal{F}_x^{\mathrm{an}}$ bzw. $\mathfrak{a}_x^{\mathrm{an}}$ die Eigenschaft E nicht hat. Wir ersetzen nun S durch U. Dann hat T die in (2.6) angegebenen Eigenschaften. Folglich ist E korrespondierend. Schließlich ergibt sich die Gleichwertigkeit von (a) und (b) aus (2.5). $\square$

Wir wollen nun die Dimension eines A-Schemas mit der des assoziierten komplexen Raumes vergleichen.

(2.8) Aussage. *Seien X ein eigentliches A-Schema von endlicher Darstellung und $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum. Dann gibt es (nach Schrumpfung von S) abgeschlossene konstruierbare Teilmengen T_n von X mit:*

(1) Es ist T_n^{an} die Menge der Punkte $x \in X^{\mathrm{an}}$, für die $\dim \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x} \geq n$ gilt.

(2) $T_n \otimes_A A_K$ ist die Vereinigung der irreduziblen Komponenten von $X \otimes_A A_K$, deren Dimension $\geq n$ ist.

Ferner gilt für jede hinreichend kleine Umgebung U von K

$$\dim X \otimes_A A_K = \dim X^{\mathrm{an}}|_U.$$

Beweis. Wir zeigen als erstes, daß für jedes (nicht notwendig eigentliche) A-Schema X von endlicher Darstellung und jede Umgebung U von K die Ungleichung $\dim X \otimes A_K \leq \dim X^{\mathrm{an}}|_U$ gilt. Dazu darf man X als affin annehmen. Sei $k := \dim X \otimes A_K$. Es gibt nach Verkleinerung von S konstruierbare Teilmengen $X_i \subseteq X_{i+1}$ von X derart, daß

$$X_0 \otimes A_K < X_1 \otimes A_K < \cdots < X_k \otimes A_K$$

eine Kette von irreduziblen Mengen ist. Nach (7.1) findet man eine Umgebungsbasis (U_λ) von K derart, daß die $X_i^{\mathrm{an}}|_{U_\lambda}$ sämtlich irreduzibel sind. Zusammen mit (2.5) zeigt dies die Gültigkeit der obigen Ungleichung.

Sei nun X eigentlich über A. Dann gibt es eine Umgebung U von K mit $\dim X^{\mathrm{an}}|_U = \dim X^{\mathrm{an}}|_K =: l$, vgl. (3.1). Mithin existiert ein Punkt $x \in X^{\mathrm{an}}|_K$ mit $l = \dim \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x} \leq \dim X \otimes A_K$. Folglich gilt $\dim X \otimes A_K = \dim X^{\mathrm{an}}|_U$ für hinreichend kleines U. Ist S klein genug, so gibt es abgeschlossene konstruierbare Mengen $X_i \subseteq X$, $1 \leq i \leq m$, sowie eine Umgebungsbasis (U_λ) von K dergestalt, daß die $X_i \otimes A_K$ (bzw. $X_i^{\mathrm{an}}|_{U_\lambda}$) genau die irreduziblen Komponenten von $X \otimes A_K$ (bzw. $X^{\mathrm{an}}|_{U_\lambda}$) sind, vgl. (7.2). Wir dürfen annehmen, daß S unter den U_λ vorkommt und daß $\dim X_i \otimes A_K = \dim X_i^{\mathrm{an}}|_{U_\lambda}$ ist für alle i. Man braucht dann nur noch T_n als die Vereinigung über alle X_i mit $\dim X_i \otimes A_K \geq n$ zu wählen. $\square$

Ohne Endlichkeitsvoraussetzung verliert (2.8) seine Gültigkeit, wie das folgende triviale Beispiel zeigt: $S := \mathbb{C}$ mit Koordinate z, $X := \operatorname{Spec} A_z$ und $K := \{0\}$. Dann ist $\dim X \otimes_A A_K = 0$, aber $\dim X^{\mathrm{an}}|_U = 1$ für jede Umgebung U von 0.

Wenden wir uns nun den topologischen Eigenschaften zu.

(2.9). Es sei X ein A-Schema lokal von endlicher Darstellung. Für jede lokal konstruierbare Teilmenge T von X gilt dann

$$\overline{T}^{\mathrm{an}} = \overline{T^{\mathrm{an}}}.$$

Beweis. Man darf annehmen, daß X affin ist. Sei $U \subseteq S$ ein relativkompakter offener Steinscher Unterraum. Da die Ringerweiterung $A \to A_U$ flach ist, gilt für die Projektion $p\colon X \otimes_A A_U \to X$ dann $p^{-1}(\overline{T}) = \overline{p^{-1}(T)} = \overline{T \otimes_A A_U}$, vgl. [EGA IV$_2$, (2.3.10)]. Zusammen mit (1.2) zeigt dies, daß die Behauptung lokal bezüglich S ist. Mit den Resultaten aus [EGA IV$_3$, Chapitre 8] kann man sich nun auf den Fall beschränken, daß T offen und dicht in X ist. Wir setzen $H := X \setminus T$. Für jedes Steinsche Kompaktum $K \subseteq S$ gilt dann $\operatorname{codim}(H \otimes_A A_K, X \otimes_A A_K) \geq 1$. Hieraus folgt $\operatorname{codim}(H^{\mathrm{an}}, X^{\mathrm{an}}) \geq 1$ nach (2.7). Daher ist H^{an} nirgends dicht in X^{an} und folglich $T^{\mathrm{an}} = X^{\mathrm{an}} \setminus H^{\mathrm{an}}$, wie behauptet, dicht in X^{an}. $\square$

Aus (2.9) zusammen mit (2.5) folgt beispielsweise:

(2.10). X sei ein quasikompaktes A-Schema lokal von endlicher Darstellung und T eine konstruierbare Teilmenge von X. Für jedes Steinsche Kompaktum $K \subseteq S$ sind dann äquivalent:

(a) Es gibt eine offene Umgebung U von K derart, daß $T^{\mathrm{an}}|_U$ dicht (bzw. abgeschlossen bzw. offen) in $X^{\mathrm{an}}|_U$ ist.

(b) $T \otimes_A A_K$ ist dicht (bzw. abgeschlossen bzw. offen) in $X \otimes_A A_K$.

Wie die irreduziblen Komponenten (bzw. Zusammenhangskomponenten) eines A-Schemas mit denen des zugehörigen komplexen Raumes zusammenhängen, zeigen wir in § 7.

3 Korrespondenz bei Morphismen

Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien weiter wie in § 1. Wir wollen die Eigenschaften eines Morphismus von A-Schemata mit denen der zugehörigen holomorphen Abbildung vergleichen.

(3.1) Satz (Korrespondenz bei Morphismen). *X und Y seien quasikompakte A-Schemata lokal von endlicher Darstellung und $f\colon X \to Y$ ein A-Morphismus von endlicher Darstellung. Sei P die Eigenschaft*

(1) flach (bzw. unverzweigt bzw. étale bzw. glatt)

(2) surjektiv (bzw. universell injektiv)

(3) Isomorphismus (bzw. offene Einbettung bzw. abgeschlossene Einbettung bzw. Einbettung)

(4) separiert (bzw. Monomorphismus)

(5) eigentlich (bzw. endlich)

(6) dominant

zu sein. Für jedes Steinsche Kompaktum $K \subseteq S$ sind dann äquivalent:

(a) Es gibt eine offene Umgebung U von K derart, daß $f^{\mathrm{an}}|_U\colon X^{\mathrm{an}}|_U \to Y^{\mathrm{an}}|_U$ die Eigenschaft P hat.

(b) $f \otimes_A A_K\colon X \otimes_A A_K \to Y \otimes_A A_K$ hat die Eigenschaft P.

Beweis. Sei L ein Steinsches Kompaktum mit $K \subseteq \mathring{L}$. Es seien

$$i\colon X^{\mathrm{an}}|_L \to X \otimes A_L, \quad j\colon Y^{\mathrm{an}}|_L \to Y \otimes A_L$$

und

$$i_{L,K}\colon X \otimes A_K \to X \otimes A_L, \quad j_{L,K}\colon Y \otimes A_K \to Y \otimes A_L$$

die kanonischen Morphismen. Zum Nachweis der Äquivalenz von (a) und (b) dürfen wir annehmen, daß Y affin ist.

Sei P zunächst eine der in (1) angegebenen Eigenschaften und T_L die Menge aller Punkte aus $X \otimes A_L$, in denen $f \otimes A_L$ die Eigenschaft P nicht hat, und analog T_K. Gemäß [EGA IV$_3$, (11.1.1), (12.1.7)] ist T_L abgeschlossen in $X \otimes A_L$. Es ist $i^{-1}(T_L)$ die Menge der Punkte aus $X^{\mathrm{an}}|_L$, in denen f^{an} die Eigenschaft P nicht hat. Ferner gilt $i_{L,K}^{-1}(T_L) = T_K$, vgl. [EGA IV$_4$, (17.7.1)]. Die Gleichwertigkeit von (a) und (b) ergibt sich nun aus (2.5).

Analog verfährt man bei der Eigenschaft „Surjektivität“.

Sei nun P die Eigenschaft, universell injektiv zu sein. Eine Abbildung von Schemata ist genau dann universell injektiv, wenn sie radiziell ist, während für Abbildungen komplexer Räume die Begriffe „universell injektiv“ und „injektiv“ zusammenfallen. Mit T_L werde die Menge aller Punkte $y \in Y \otimes A_L$ bezeichnet, deren Faser $(X \otimes A_L)_y$ nicht radiziell über dem Restekörper $\kappa(y)$ ist, und analog T_K. Nach [EGA IV$_3$, (9.6.1)] ist T_L konstruierbar in $Y \otimes A_L$. Etwa unter Verwendung von (1.3) sieht man, daß $j^{-1}(T_L)$ genau aus den Punkten $y \in Y^{\mathrm{an}}|_L$ besteht, deren Faser X_y^{an} mindestens zweipunktig ist. Ferner ist $j_{L,K}^{-1}(T_L) = T_K$ wegen [EGA I, (3.5.7)] und [EGA IV$_2$, (2.6.1)]. Die Äquivalenz von (a) und (b) ergibt sich nun wieder aus (2.5).

Ein Morphismus von Schemata ist genau dann eine offene Einbettung, wenn er étale und radiziell ist ([EGA IV$_4$, (17.9.1)]). Ferner ist eine Abbildung von Schemata bzw. von komplexen Räumen genau dann ein Monomorphismus, wenn die zugehörige Diagonalabbildung ein Isomorphismus ist. Hieraus ergibt sich zusammen mit dem oben Bewiesenen die Äquivalenz von (a) und (b) für die Eigenschaften „offene Einbettung“, „Isomorphismus“ und „Monomorphismus“.

Nach dem Konstruierbarkeitssatz von Chevalley ist $T := f(X)$ eine konstruierbare Menge in Y. Es ist $T^{\mathrm{an}}|_U = f^{\mathrm{an}}|_U(X^{\mathrm{an}}|_U)$ sowie $T \otimes A_K = f \otimes A_K(X \otimes A_K)$. Aus (2.10) folgt jetzt die Gleichwertigkeit von (a) und (b) für die Eigenschaft dominant zu sein.

Eine Abbildung von Schemata bzw. komplexen Räumen ist genau dann separiert, wenn die zugehörige Diagonalabbildung ein abgeschlossenes Bild hat. Die Äquivalenz von (a) und (b) für die Eigenschaft separiert zu sein, ergibt sich daher gleichfalls aus (2.10).

Sei f eigentlich. Mit dem Lemma von Chow ([EGA IV$_3$, (8.10.5)]) folgt, daß dann auch f^{an} eigentlich ist. Ist f sogar endlich, so ist f^{an} als eigentliche Abbildung mit endlichen Fasern ebenfalls endlich. Zusammen mit [EGA IV$_3$, (8.10.5)] ergibt sich hieraus die Implikation (b) $\Longrightarrow$ (a) für diese Eigenschaften. Umgekehrt werde vorausgesetzt, daß $f^{\mathrm{an}}|_U$ eigentlich ist. Ohne Einschränkung sei $U = S$. Jedenfalls ist $f \otimes A_K$ separiert. Um zu zeigen, daß $f \otimes A_K$ eigentlich ist, genügt es nachzuweisen, daß die Abbildungen

$$(X \times \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}) \otimes A_K \longrightarrow (Y \times \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}) \otimes A_K, \quad n \in \mathbb{N},$$

abgeschlossen sind (Hierbei bezeichnet $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ den n-dimensionalen affinen Raum).

Dies folgt aber aus (2.10) unter Beachtung von [EGA IV_3, (8.3.11)]. Sei nun $f^{\mathrm{an}}|_U$ endlich. Dann ist $f \otimes A_K$ nach dem Bewiesenen eigentlich. Unter Verwendung des Halbstetigkeitssatzes von Chevalley ([EGA IV_3, (13.3.1)]) zeigt man, daß $f \otimes A_K$ auch endliche Fasern hat. Daher ist $f \otimes A_K$ endlich.

Aus der Konstruktion von X^{an} folgt: Mit f ist auch f^{an} eine Einbettung (bzw. abgeschlossene Einbettung). Dies zeigt zusammen mit [EGA IV_3, (8.10.5)], die Gültigkeit der Implikation (b) $\Longrightarrow$ (a) für diese Eigenschaften. Umgekehrt werde angenommen, daß $f^{\mathrm{an}}|_U$ eine Einbettung (bzw. abgeschlossene Einbettung) ist. Ohne Einschränkung sei $U = S$. Nach eventueller Verkleinerung von S als Umgebung von K dürfen wir annehmen, daß das abgeschlossene Bild $Z := \overline{f(X)}$ von X unter f ([EGA I, (9.5.3)]) existiert und von endlicher Darstellung über A ist. Aus der kanonischen Faktorisierung

$$X \xrightarrow{g} Z \longrightarrow Y$$

von f leitet sich eine entsprechende Faktorisierung von f^{an} ab. Wegen $g^{\mathrm{an}}(X^{\mathrm{an}}) = g(X)^{\mathrm{an}}$ folgt aus (2.9), daß $g^{\mathrm{an}}(X^{\mathrm{an}})$ dicht in Z^{an} liegt. Nach Voraussetzung ist $g^{\mathrm{an}}(X^{\mathrm{an}}) = f^{\mathrm{an}}(X^{\mathrm{an}})$ lokal abgeschlossen in Y^{an}. Daher ist $g(X)^{\mathrm{an}}$ offen in Z^{an}. Wegen (2.10) ist dann $g(X)$ offen in Z, falls S klein genug ist. Wir betrachten die kanonische Faktorisierung

$$X \xrightarrow{h} g(X) \longrightarrow Z$$

von g. Es ist h^{an} ein eigentlicher Monomorphismus. Daher ist auch $h \otimes A_K$ ein eigentlicher Monomorphismus, also eine abgeschlossene Einbettung. Insgesamt ist $f \otimes A_K$ eine Einbettung. War f^{an} sogar eine abgeschlossene Einbettung, so hat $f \otimes A_K$ auch ein abgeschlossenes Bild, ist also eine abgeschlossene Einbettung. $\square$

Bemerkungen. (1) Aus (3.1) folgt noch, daß mit f auch f^{an} die Eigenschaft P hat. Hierbei brauchen X und Y weder quasikompakt noch f von endlicher Darstellung zu sein, falls P eine der Eigenschaften aus (1) bis (5) ist.

(2) Ist $f\colon X \to Y$ ein lokal projektiver A-Morphismus von endlicher Darstellung, so ist auch f^{an} lokal projektiv. Umgekehrt gilt: Ist $f : X \to \operatorname{Spec} A$ von endlicher Darstellung und ist f^{an} lokal projektiv, so sind die Morphismen $f \otimes_A \mathcal{O}_s$ projektiv für alle $s \in S$. Dies folgt leicht mit (1.2), (5.5) und (5.6).

4 Vergleich der Bildgarben. Anwendung auf Gruppoide

Sei Z ein Schema (bzw. ein komplexer Raum). Mit $\mathrm{Coh}(Z)$ werde dann die Kategorie der quasikohärenten $\mathcal{O}_Z$-Modul von endlicher Darstellung (bzw. kohärenten $\mathcal{O}_Z$-Modul) bezeichnet.

Im folgenden sei S ein Steinscher Raum und $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ die Algebra der globalen Schnitte von S. Seien X und Y A-Schemata lokal von endlicher Darstellung und $f\colon X \to Y$ ein A-Morphismus. Für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ und jedes $p \in \mathbb{N}$ hat man dann einen kanonischen $\mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}}$-Homomorphismus

$$R^p f_*(\mathcal{F})^{\mathrm{an}} \longrightarrow R^p f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}). \tag{4.1}$$

(4.2) Theorem (Vergleichssatz). *Ist f eigentlich und $\mathcal{F}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, so sind die Homomorphismen* (4.1) *bijektiv.*

Beweis. Offenbar ist die Behauptung lokal bezüglich Y. Daher dürfen wir annehmen, daß $Y = \operatorname{Spec} B$ affin ist. Dann ist $\mathcal{F}$ der direkte Limes seiner endlichen quasikohärenten Untermodul. Es genügt daher, (4.2) für einen endlichen Modul $\mathcal{F}$ zu zeigen. Weil die Behauptung natürlich auch lokal bezüglich S ist, kann man sogar von vornherein voraussetzen, daß $\mathcal{F}$ ein Modul von endlicher Darstellung ist. Dies folgt leicht unter Verwendung Steinscher Kompakta.

Wir wollen uns nun überlegen, daß es genügt, den Fall $Y = \operatorname{Spec} A$ zu betrachten. Nehmen wir also an, daß der Satz für diesen Spezialfall bereits bewiesen ist. Es seien $C := \Gamma(Y^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}})$ die zu Y^{an} gehörige Steinsche Algebra, $K \subseteq Y^{\mathrm{an}}$ ein Steinsches Kompaktum sowie $C_K := \Gamma(K, \mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}})$. Die Homomorphismen $C \to C_K$ und $B \to C_K$ sind flach und es ist $X^{\mathrm{an}} = (X \otimes_B C)^{\mathrm{an}}$ nach (1.4). Aufgrund unserer Annahme ist

$$R^p(f \otimes_B C)_*(\mathcal{F} \otimes_B C)^{\mathrm{an}} = R^p(f \otimes_B C)_*^{\mathrm{an}}((\mathcal{F} \otimes_B C)^{\mathrm{an}}).$$

Daher gilt

$$j^*\Big(R^p(f \otimes_B C)_*((\mathcal{F} \otimes_B C) \otimes_C C_K)\Big) = R^p f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}})|_K.$$

Hierbei bezeichnet $j : K \to \operatorname{Spec} C_K$ den kanonischen Morphismus. Es ist ferner

$$\begin{aligned} R^p f_*(\mathcal{F}) \otimes_B C_K &= R^p(f \otimes_B C_K)_*(\mathcal{F} \otimes_B C_K) \\ &= R^p(f \otimes_B C)_*(\mathcal{F} \otimes_B C) \otimes_C C_K. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} R^p f_*(\mathcal{F})^{\mathrm{an}}|_K &= j^*(R^p f_*(\mathcal{F}) \otimes_B C_K) \\ &= R^p f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}})|_K. \end{aligned}$$

Da K beliebig war, folgt die Behauptung.

Als nächstes betrachten wir den Fall, daß X ein abgeschlossenes Unterschema von $\mathbb{P}_A^r = \operatorname{Proj} A[t_0, \dots, t_r]$ ist. Offenbar darf man annehmen, daß $X = \mathbb{P}_A^r$ ist. Wir zeigen zunächst:

(4.3) Hilfssatz. *Ist Z ein Steinscher Raum, so gilt*

$$\Gamma(Z \times \mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{Z\times\mathbb{P}^r}) = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \quad \text{und} \quad H^p(Z \times \mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{Z\times\mathbb{P}^r}) = 0 \quad \text{für } p > 0.$$

Beweis von (4.3). Sei $U_i = D_+(t_i)$ das Komplement der durch t_i definierten Hyperfläche im komplex-projektiven Raum $\mathbb{P}^r$, $0 \le i \le r$. Dann ist $\mathcal{U} = (U_i)$ eine Steinsche Überdeckung von $\mathbb{P}^r$. Wir überlegen uns zunächst, daß in dem augmentierten Čechkomplex

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}) \longrightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}) \longrightarrow \cdots$$

die Identität nullhomotop ist.

Es sei $\pi\colon \mathbb{C}^{r+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^r$ die natürliche Projektion und $V_i := \pi^{-1}(U_i) = D(t_i)$. Vermittels π läßt sich $\Gamma(U_{i_0\ldots i_p}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r})$ mit der Menge derjenigen Funktionen aus $\Gamma(V_{i_0\ldots i_p}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{r+1}})$ identifizieren, die auf den Fasern von π konstant sind. Seien Λ die Menge aller $(r+1)$-Tupel $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_r)$ mit $\lambda_i = \pm 1$, $\delta_i^{(1)}$ und $\delta_i^{(-1)}$ Zahlen mit $0 < \delta_i^{(-1)} < \delta_i^{(1)}$ und $K_i^{(\pm 1)}$ der orientierte Rand des Kreises um Null in $\mathbb{C}$ mit Radius $\delta_i^{(\pm 1)}$. Jede in $\mathbb{C}^{*\,r+1}$ holomorphe Funktion h gestattet dann die Darstellung

$$h = \sum_{M \subseteq \{0,\ldots,r\}} C_M(h).$$

Hierbei ist $C_M(h)$ die durch

$$C_M(h)(t) := \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ M=\{i:\lambda_i=-1\}}} \lambda_0 \cdots \lambda_r \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\right)^{r+1} \int_{K_0^{(\lambda_0)}} \cdots \int_{K_r^{(\lambda_r)}} \frac{h(z)}{(z_0 - t_0)\cdots(z_r - t_r)} \mathrm{d}z_r \cdots \mathrm{d}z_0$$

für $\delta_i^{(-1)} < |t_i| < \delta_i^{(1)}$ auf $\mathbb{C}^{*\,r+1}$ definierte holomorphe Funktion. Wir notieren einige Eigenschaften von C_M (vgl. hierzu auch [Abh01, S. 48 ff], und [Sch61]):

(a) Mit h ist auch $C_M(h)$ in $V_{i_0\ldots i_p}$ holomorph.

(b) Mit h ist auch $C_M(h)$ auf den Fasern von π konstant. Ferner ist in diesem Falle $C_M(h) = 0$ für $M = \{0, \ldots, r\}$.

(c) Ist h in $V_{ii_0\ldots i_p}$ holomorph und $i \notin M$, so ist $C_M(h)$ in $V_{i_0\ldots i_p}$ holomorph.

Sei nun $f = (f_{i_0\ldots i_p}) \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r})$. Zu jeder echten Teilmenge M von $\{0, \ldots, r\}$ fixieren wir einen Index $i \in \{0, \ldots, r\} \setminus M$. Sodann setzen wir

$$\Phi_M^p(f)_{i_0\ldots i_{p-1}} := C_M(f_{ii_0\ldots i_{p-1}}) \quad \text{für} p > 0$$

und

$$\Phi_M^0(f) := C_M(f_i) \in \mathbb{C}.$$

Man prüft sofort nach, daß durch $\Phi^p := \sum_M \Phi^p_M$ eine stetige Homotopieabbildung der oben gesuchten Art definiert wird.

Im allgemeinen Fall ist $\mathcal{W} = (Z \times U_i)$ eine Steinsche Überdeckung von $Z \times \mathbb{P}^r$. Wegen $C^\bullet(\mathcal{W}, \mathcal{O}_{Z\times\mathbb{P}^r}) = C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r})\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ ist auch in dem augmentierten Komplex

$$0 \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{W}, \mathcal{O}_{Z\times\mathbb{P}^r})$$

die Identität nullhomotop. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Leray. □

Wir fahren im Beweis von (4.2) fort. Nach (4.3) ist $f^{\mathrm{an}}_*(\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}) = \mathcal{O}_S$ sowie $R^p f^{\mathrm{an}}_*(\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}) = 0$ für $p > 0$. Gemäß [EGA III$_1$, (2.1)], gilt eine entsprechende Aussage auch für f. Dies beweist (4.2) für $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. Durch Induktion nach r zeigen wir nun, daß (4.2) auch für $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(n)$ gilt. Der Fall $r = 0$ ist trivial. Sei $r > 0$ und $\mathfrak{a} = (A[t_0, \dots, t_r] \cdot t_r)^\sim$ das durch t_r definierte $\mathcal{O}_X$-Ideal. Dann ist $\mathfrak{a}$ isomorph zu $\mathcal{O}_X(-1)$ und das durch $\mathfrak{a}$ definierte Unterschema E ist isomorph zu $\mathbb{P}^{r-1}_A$. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow 0$$

erhalten wir dann durch Tensorieren mit $\mathcal{O}_X(n)$ die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(n-1) \longrightarrow \mathcal{O}_X(n) \longrightarrow \mathcal{O}_E(n) \longrightarrow 0$$

und eine analoge Sequenz auf X^{an}. Durch Vergleich der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenzen folgt aus der Induktionsvoraussetzung, daß die Homomorphismen (4.1) genau für $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(n)$ bijektiv sind, wenn dies für $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(n-1)$ gilt. Da wir (4.2) für $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(0) = \mathcal{O}_X$ bereits gezeigt hatten, gilt (4.2) für $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Sei nun $\mathcal{F}$ ein beliebiger endlicher quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Wir zeigen durch absteigende Induktion nach p, daß der Homomorphismus (4.1) in jedem Punkt $s \in S$ bijektiv ist. Dazu dürfen wir annehmen, daß S die endliche Einbettungsdimension m hat. Für $p > 2(m+r)$ sind dann $R^p f_*(\mathcal{F})^{\mathrm{an}}$ und $R^p f^{\mathrm{an}}_*(\mathcal{F}^{\mathrm{an}})$ beide Null, so daß der Induktionsanfang gesichert ist. Nach Verkleinerung von S als Umgebung von s gibt es eine exakte Sequenz von endlichen quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

wobei $\mathcal{L}$ direkte Summe von Modul der Gestalt $\mathcal{O}_X(n)$ ist. Nach dem bereits Bewiesenen gilt (4.2) daher für $\mathcal{L}$. Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
R^p f_*(\mathcal{R})^{\mathrm{an}} & \longrightarrow & R^p f_*(\mathcal{L})^{\mathrm{an}} & \longrightarrow & R^p f_*(\mathcal{F})^{\mathrm{an}} & \longrightarrow & R^{p+1} f_*(\mathcal{R})^{\mathrm{an}} & \longrightarrow & R^{p+1} f_*(\mathcal{L})^{\mathrm{an}} \\
{\scriptstyle \varepsilon_1}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon_2}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon_3}\downarrow & & {\scriptstyle \varepsilon_4}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_5} \\
R^p f^{\mathrm{an}}_*(\mathcal{R}^{\mathrm{an}}) & \longrightarrow & R^p f^{\mathrm{an}}_*(\mathcal{L}^{\mathrm{an}}) & \longrightarrow & R^p f^{\mathrm{an}}_*(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}) & \longrightarrow & R^{p+1} f^{\mathrm{an}}_*(\mathcal{R}^{\mathrm{an}}) & \longrightarrow & R^{p+1} f^{\mathrm{an}}_*(\mathcal{L}^{\mathrm{an}})
\end{array}$$

in dem ε_4 nach Induktionsvoraussetzung und ε_2 und ε_5 nach dem Bewiesenen bijektiv sind. Nach dem Fünfer-Lemma ist dann auch ε_3 surjektiv. Da dies für jedes $\mathcal{F}$ gilt, insbesondere auch für $\mathcal{R}$ gilt, ist auch ε_1 surjektiv. Eine nochmalige Anwendung des Fünfer-Lemmas zeigt, daß ε_3 auch injektiv und damit bijektiv ist. Damit ist (4.2) für ein projektives A-Schema X bewiesen.

Wir betrachten nun den Fall, daß X eigentlich über $\operatorname{Spec} A$ liegt. Es genügt zu zeigen, daß die Homomorphismen

$$R^p f_*(\mathcal{F})_s^{\mathrm{an}} \longrightarrow R^p f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}})_s \tag{4.4}$$

für jedes $s \in S$ bijektiv sind. Der natürliche Funktor

$$\varinjlim_{U \ni s} \operatorname{Coh}(X \otimes_A A_U) \longrightarrow \operatorname{Coh}(X \otimes_A \mathcal{O}_s)$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien ([EGA IV$_3$, (8.5.2)]). Ferner gilt

$$R^p f_*(\mathcal{F})_s^{\mathrm{an}} = H^p(X, \mathcal{F}) \otimes_A \mathcal{O}_s = H^p(X \otimes_A \mathcal{O}_s, \mathcal{F} \otimes_A \mathcal{O}_s).$$

Die obigen Homomorphismen hängen daher nur von dem $\mathcal{O}_{X \otimes_A \mathcal{O}_s}$-Modul $\mathcal{F} \otimes_A \mathcal{O}_s$ ab.

Sei $K_s = \operatorname{Coh}(X \otimes_A \mathcal{O}_s)$ die Kategorie der kohärenten Modul auf $X \otimes_A \mathcal{O}_s$ und K_s' die volle Unterkategorie von K_s, die aus allen kohärenten Modul besteht, für die eine offene Umgebung U von s und eine Liftung zu einem kohärenten Modul auf $X \otimes_A A_U$ existieren, für den die Homomorphismen (4.4) bijektiv sind. Jeder direkte Summand eines Moduls aus K_s' gehört wieder zu K_s. Wir haben zu zeigen, daß $K_s' = K_s$ ist. Weil K_s' eine exakte Unterkategorie von K_s ist, können wir dazu das „Lemme de dévissage" ([EGA III$_1$, (3.1)]) heranziehen. Es genügt also zu zeigen: Zu jeder abgeschlossenen irreduziblen Teilmenge Y_s von $X \otimes_A \mathcal{O}_s$ existiert ein kohärenter Modul $\mathcal{G}_s \in K_s'$, dessen Träger mit Y_s übereinstimmt. Dazu dürfen wir annehmen, daß $X \otimes_A \mathcal{O}_s$ irreduzibel ist und daß $Y_s = X \otimes_A \mathcal{O}_s$ ist.

Nach dem Lemma von Chow ([EGA II, (5.6.2)]) in Verbindung mit den Resultaten aus [EGA IV$_3$, Chapitre 8] gibt es (nach eventueller Verkleinerung von S als Umgebung von s) ein projektives A-Schema X' endlicher Darstellung und einen projektiven und surjektiven A-Morphismus $g\colon X' \to X$. Wir dürfen ferner annehmen, daß für genügend großes n

$$R^p g_*\Big(\mathcal{O}_{X'}(n)\Big) = 0 \quad \text{für alle } p > 0 \tag{4.5}$$

gilt. Sei $\mathcal{G} := g_*(\mathcal{O}_{X'}(n))$. Dann hat

$$\mathcal{G} \otimes_A \mathcal{O}_s = (g \otimes_A \mathcal{O}_s)_*\Big(\mathcal{O}_{X' \otimes_A \mathcal{O}_s}(n)\Big)$$

den Träger $X \otimes_A \mathcal{O}_s$. Es genügt zu zeigen, daß $\mathcal{G} \otimes_A \mathcal{O}_s$ in K_s' liegt. Zunächst einmal sind die natürlichen Homomorphismen

$$H^p\left(X \otimes_A \mathcal{O}_s, (g \otimes_A \mathcal{O}_s)_*\Big(\mathcal{O}_{X' \otimes_A \mathcal{O}_s}(n)\Big)\right) \longrightarrow H^p\left(X' \otimes_A \mathcal{O}_s, \mathcal{O}_{X' \otimes_A \mathcal{O}_s}(n)\right),$$

$p \geq 0$, bijektiv wegen (4.5) (vgl. hierzu [EGA II, (12.1.7)]. Da g projektiv ist, folgt aus (4.5) zusammen mit dem bereits Bewiesenen, daß

$$R^p g_*^{\mathrm{an}}\Big(\mathcal{O}_{X'^{\mathrm{an}}}(n)\Big) = 0 \quad \text{für alle } p > 0$$

ist. Mithin degeneriert die Leraysche Spektralsequenz

$$R^p f_*^{\mathrm{an}}\bigg(R^q g_*^{\mathrm{an}}\Big(\mathcal{O}_{X'^{\mathrm{an}}}(n)\Big)\bigg) \Longrightarrow R^{p+q}(f^{\mathrm{an}} \circ g^{\mathrm{an}})_*(\mathcal{O}_{X'^{\mathrm{an}}}(n)),$$

so daß man natürliche Isomorphismen

$$R^p f_*^{\mathrm{an}}\bigg(g_*^{\mathrm{an}}\Big(\mathcal{O}_{X'^{\mathrm{an}}}(n)\Big)\bigg) \longrightarrow R^p(f \circ g)_*^{\mathrm{an}}\Big(\mathcal{O}_{X'^{\mathrm{an}}}(n)\Big)$$

hat. Da $f \circ g$ projektiv ist, sind die Homomorphismen

$$H^p\Big(X' \otimes_A \mathcal{O}_s, \mathcal{O}_{X' \otimes_A \mathcal{O}_s}(n)\Big) \longrightarrow R^p(f \circ g)_*^{\mathrm{an}}\Big(\mathcal{O}_{X'^{\mathrm{an}}}(n)\Big)_s, \quad p \geq 0,$$

bijektiv. Wegen $g_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{O}_{X'^{\mathrm{an}}}(n)) = \mathcal{G}^{\mathrm{an}}$ ist daher

$$H^p(X \otimes_A \mathcal{O}_s, \mathcal{G} \otimes_A \mathcal{O}_s) \longrightarrow R^p f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{G}^{\mathrm{an}})_s$$

bijektiv für alle $p \geq 0$. □

(4.6) Korollar. *Es seien X ein A-Schema von endlicher Darstellung und $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ endliche quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Modul derart, daß der Durchschnitt ihrer Träger eigentlich über* Spec A *liegt. Für jedes Steinsche Kompaktum $K \subseteq S$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann kanonische Isomorphismen*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{X \otimes_A A_K}}\Big(X \otimes_A A_K; \mathcal{F} \otimes_A A_K, \mathcal{G} \otimes_A A_K\Big) \to \varinjlim_U \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}|_U}}\Big(X^{\mathrm{an}}|_U, \mathcal{F}^{\mathrm{an}}|_U, \mathcal{G}^{\mathrm{an}}|_U\Big).$$

Hierbei durchlaufe U das System der offenen Steinschen Umgebungen von K. Speziell ist der natürliche Homomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X \otimes_A A_K}}(\mathcal{F} \otimes_A A_K, \mathcal{G} \otimes_A A_K) \longrightarrow \varinjlim_U \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}|_U}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}|_U, \mathcal{G}^{\mathrm{an}}|_U)$$

bijektiv.

Beweis. Man darf annehmen, daß $\mathcal{F}$ lokal bezüglich X eine Auflösung durch endliche freie Modul besitzt. Wie im Beweis von [EGA III_1, (0.12.3.5)] folgt dann, daß die Homomorphismen

$$\mathcal{E}xt^\bullet_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes A_K \longrightarrow \mathcal{E}xt^\bullet_{\mathcal{O}_{X \otimes A_K}}(\mathcal{F} \otimes A_K, \mathcal{G} \otimes A_K)$$
$$\mathcal{E}xt^\bullet_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathcal{E}xt^\bullet_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}, \mathcal{G}^{\mathrm{an}})$$

bijektiv sind. Wir betrachten die Spektralsequenzen

$$H^p\Big(X\otimes A_K, \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X\otimes A_K}}(\mathcal{F}\otimes A_K, \mathcal{G}\otimes A_K)\Big) \Longrightarrow \operatorname{Ext}^{p+q}_{\mathcal{O}_{X\otimes A_K}}(X\otimes A_K; \mathcal{F}\otimes A_K, \mathcal{G}\otimes A_K)$$

$$\varinjlim_U H^p\Big(X^{\mathrm{an}}|_U, \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}|_U}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}|_U, \mathcal{G}^{\mathrm{an}}|_U)\Big) \Longrightarrow \varinjlim_U \operatorname{Ext}^{p+q}_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}|_U}}(X^{\mathrm{an}}|_U; \mathcal{F}^{\mathrm{an}}|_U, \mathcal{G}^{\mathrm{an}}|_U).$$

Offenbar genügt es zu zeigen, daß die natürlichen Homomorphismen zwischen den $E_2^{p,q}$-Termen bijektiv sind. Etwas allgemeiner gilt: Ist $\mathcal{F}$ ein endlicher quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, dessen Träger eigentlich über $\operatorname{Spec} A$ liegt, so gibt es kanonische Isomorphismen

$$H^p(X\otimes A_K, \mathcal{F}\otimes A_K) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_U H^p(X^{\mathrm{an}}|_U, \mathcal{F}^{\mathrm{an}}|_U), \quad p\in\mathbb{N}.$$

Ohne Einschränkung sei dazu $\mathcal{F}$ ein Modul endlicher Darstellung. Sei $\mathfrak{a}$ der Annullator von $\mathcal{F}$ und Z das durch $\mathfrak{a}$ definierte Unterschema von X. Durch Schrumpfung von S können wir erreichen, daß Z von endlicher Darstellung ist. Indem wir X durch Z ersetzen, dürfen wir schließlich voraussetzen, daß X eigentlich über $\operatorname{Spec} A$ liegt.

Nach (4.2) ist jedenfalls $R^pf_*(\mathcal{F})^{\mathrm{an}} \to R^pf_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}})$ bijektiv. Zusammen mit

$$\Gamma\Big(K, R^pf_*(\mathcal{F})^{\mathrm{an}}\Big) = \Gamma\Big(\operatorname{Spec} A_K, R^p(f\otimes A_K)_*(\mathcal{F}\otimes A_K)\Big) = H^p(X\otimes A_K, \mathcal{F}\otimes A_K)$$

und

$$\Gamma\Big(K, R^pf_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}})\Big) = \varinjlim_U \Gamma\Big(U, R^pf_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}})\Big) = \varinjlim_U H^p(X^{\mathrm{an}}|_U, \mathcal{F}^{\mathrm{an}}|_U)$$

liefert dies die gewünschten Isomorphismen. □

(4.7) Korollar. *Unter den Voraussetzungen von (4.2) ist der kanonische Homomorphismus zwischen der algebraischen und analytischen de Rham-Kohomologie*

$$R^pf_*(\Omega^\bullet_{X/Y})^{\mathrm{an}} \longrightarrow R^pf_*^{\mathrm{an}}(\Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}/Y^{\mathrm{an}}}), \quad p\in\mathbb{N},$$

bijektiv.

Der Beweis ergibt sich sofort aus der Hyperkohomologiespektralsequenz

$$R^qf_*(\Omega^p_{X/Y}) \Longrightarrow R^{p+q}f_*(\Omega^\bullet_{X/Y})$$

und der analogen Spektralsequenz auf Y^{an}.

Für die anschließenden Betrachtungen ist es zweckmäßig, die in § 1 gegebene Definition des assoziierten komplexen Raumes wie folgt zu verallgemeinern. Sei $\mathbb{K}$ die Kategorie derjenigen A-Schemata X, für die eine offene Steinsche Überdeckung (U_i) von S so existiert, daß $X\otimes_A A_{U_i}$ lokal von endlicher Darstellung über A_{U_i} ist für alle i. Wegen (1.2) kann man einem solchen Schema X in natürlicher Weise einen komplexen Raum zuordnen, den wir wieder mit X^{an} bezeichnen. Die bis hierhin gewonnenen Resultate gelten mutatis mutandis auch für die Schemata aus $\mathbb{K}$.

Wir wollen einige einfache Fälle angeben, in denen der Funktor $X \mapsto X^{\mathrm{an}}$ mit der Bildung von Kokernen verträglich ist. Dabei beschränken wir uns von vornherein auf $\mathbb{K}$-Gruppoide.

Wir erinnern zunächst an einige diesbezügliche Definitionen, vgl. [SGA 3, Exp. V] Ein Gruppoid ist eine Kategorie, deren Objekte eine Menge bilden und deren Morphismen Isomorphismen sind. Sei X_0 die Objektmenge und X_1 die Menge aller Morphismen eines Gruppoids. Man hat dann die Abbildungen $d_0, d_1 \colon X_1 \to X_0$, die einem Morphismus $a \to b$ das Ziel b bzw. die Quelle a zuordnen, sowie die Multiplikation

$$d_1' \colon (X_1, d_1) \times_{X_0} (X_1, d_0) = X_1 \times_{X_0} X_1 \to X_1,$$

die einem Paar von Morphismen $(b \to c, a \to b)$ das Produkt $a \to c$ zuordnet, ferner das „Einselement" $e \colon X_0 \to X_1$, das einem Objekt a die Identität von a zuordnet, und die Symmetrieabbildung $s \colon X_1 \to X_1$, die einem Morphismus den inversen Morphismus zuordnet.

Sei nun C eine Kategorie mit Produkten und Faserprodukten. Ein Paar

$$X_* = \Big(X_1 \overset{d_1}{\underset{d_0}{\rightrightarrows}} X_0,\, d_1'\Big),$$

bestehend aus Morphismen $d_0, d_1 \colon X_1 \to X_0$ und $d_1' \colon X_1 \times_{X_0} X_1 \to X_1$ in C, heißt C-Gruppoid, wenn gilt: Für jedes $T \in C$ ist $X_0(T)$ bzw. $X_1(T)$ die Menge der Objekte bzw. Morphismen eines Gruppoids $X_*(T)$ mit Zielabbildung $d_0(T)$ und Quellabbildung $d_1(T)$. Hierbei bezeichnet wie üblich $X_0(T)$ die Menge $\mathrm{Hom}(T, X_0)$ und $d_0(T)$ die durch d_0 induzierte Abbildung $X_1(T) \to X_0(T)$ usw.

In einem C-Gruppoid X_* läßt sich in natürlicher Weise ein Einselement $e \colon X_0 \to X_1$ sowie eine Symmetrieabbildung $s \colon X_1 \to X_1$ definieren. Ein Gruppoid X_* heißt eine Äquivalenzrelation mit dem Graphen X_1, wenn $(d_0, d_1) \colon X_1 \to X_0 \times X_0$ ein Monomorphismus ist.

Wichtige Beispiele von C-Gruppoiden gewinnt man wie folgt aus den Gruppenoperationen. Dabei wollen wir voraussetzen, daß in C beliebige, mit Faserprodukten verträgliche, direkte Summen und Zusammenhangskomponenten existieren. Die Gruppe G operiere auf $X_0 \in C$ als Gruppe von Automorphismen. Wir setzen

$$X_1 = \coprod_{\sigma \in G} X_\sigma \quad \text{mit} \quad X_\sigma = X_0 \text{ für alle } \sigma \in G.$$

i_σ bezeichne die kanonische Abbildung $X_\sigma \to X_1$. Die Abbildungen d_1, d_0 seien definiert durch $d_1 \circ i_\sigma = \mathrm{id}_{X_\sigma}$, $d_0 \circ i_\sigma = \sigma$ für $\sigma \in G$. Es ist $X_1 \times_{X_0}$

$X_1 = \coprod_{\sigma,\tau\in G} X_{\sigma,\tau}$ mit $X_{\sigma,\tau} = X_0$ für alle σ, τ. Die Abbildung d_1' werde definiert durch $d_1'|_{X_{\sigma,\tau}} = i_{\sigma\tau}$. Dann ist $(X_1 \rightrightarrows X_0, d_1')$ ein C-Gruppoid. Genau dann ist dies eine Äquivalenzrelation, wenn G fixpunktfrei operiert, d. h. die Operation von G auf der Menge $X_0(T)$ ist fixpunktfrei für alle $T \in C$.

Sei nun $Z \in \mathbb{K}$ und $X_* = (X_1 \rightrightarrows X_0, d_1')$ ein $(\mathbb{K}/Z)$-Gruppoid. Weil man Gruppoide durch kommutative und kartesische Diagramme charakterisieren kann, vgl. [SGA 3, (V.1)], ist dann $X_*^{\mathrm{an}} = (X_1^{\mathrm{an}} \rightrightarrows X_0^{\mathrm{an}}, d_1'^{\mathrm{an}})$ ein Gruppoid in der Kategorie der komplexen Räume über Z^{an}. Ist X_* eine Äquivalenzrelation, so auch X_*^{an}, vgl. (3.1).

(4.8) Satz. *Es seien Z ein Schema aus $\mathbb{K}$ und $X_* = (X_1 \rightrightarrows X_0, d_1')$ ein $(\mathbb{K}/Z)$-Gruppoid. Eine der drei folgenden Voraussetzungen sei erfüllt:*

(1) d_1 ist endlich und lokalfrei und für jedes $x \in X_0$ ist $d_0(d_1^{-1}(x))$ in einer offenen affinen Teilmenge von X_0 enthalten.

(2) X_0 ist von endlicher Darstellung und quasiprojektiv über Z, d_1 ist von endlicher Darstellung, eigentlich und flach, und $(d_0, d_1)\colon X_1 \to X_0 \times_Z X_0$ ist quasiendlich.

(3) $X_1 \rightrightarrows X_0$ ist eine effektive étale Äquivalenzrelation ([Knu71]).

Dann existiert der Kokern (Y, p) von (d_0, d_1) in $(\mathbb{K}/Z)$ und $(Y^{\mathrm{an}}, p^{\mathrm{an}})$ ist der Kokern von $(d_0^{\mathrm{an}}, d_1^{\mathrm{an}})$ sogar in der Kategorie aller geringten Räume.

Beweis. Sei (1) erfüllt. Nach [SGA 3, S. V.4.1] ist der Kokern (Y, p) von (d_0, d_1) in der Kategorie aller geringten Räume ein Z-Schema und $p\colon X_0 \to Y$ ist ganz. Da die Situation mit flachen Basiserweiterungen $Z' \to Z$ verträglich ist, folgt unter Verwendung Steinscher Kompakta, daß Y in $(\mathbb{K}/Z)$ liegt, und daß $p^{\mathrm{an}}\colon X_0^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ endlich und surjektiv ist. Weil Y als topologischer Raum Quotient der durch d_0, d_1 auf X_0 definierten Äquivalenzrelation ist, gilt daher die analoge Aussage auch für Y^{an}. Sei $h := p \circ d_0 = p \circ d_1$.

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow p_*(\mathcal{O}_{X_0}) \rightrightarrows h_*(\mathcal{O}_{X_1})$$

ist eine exakte Sequenz von quasikohärenten $\mathcal{O}_Y$-Algebren. Aus dieser Sequenz erhalten wir, da $Y^{\mathrm{an}} \to Y$ flach ist, die exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}}$-Algebren

$$\mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}} \longrightarrow p_*(\mathcal{O}_{X_0})^{\mathrm{an}} \rightrightarrows h_*(\mathcal{O}_{X_1})^{\mathrm{an}}.$$

Nach (4.2) gilt $p_*(\mathcal{O}_{X_0})^{\mathrm{an}} = p_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{O}_{X_0^{\mathrm{an}}})$ und analog für h. Die Behauptung folgt nun aus der Konstruktion des Kokerns in der Kategorie der geringten Räume.

Der Beweis von (4.8) unter der Voraussetzung (2) verläuft analog. Man hat diesmal [SGA 3, (V.7.1), (V.9)] heranzuziehen.

Sei nun (3) erfüllt und (Y, p) der Kokern von (p_0, p_1) in der Kategorie der Schemata. Nach [Knu71, S. 75] ist dann $p\colon X_0 \to Y$ étale und surjektiv und es ist $X_1 = X_0 \times_Y X_0$. Ferner liegt Y in $(\mathbb{K}/Z)$, wie aus [EGA IV_4, (17.7.5)] folgt. Da $X_0^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ ein surjektiver lokaler Isomorphismus ist, resultiert die Behauptung beispielsweise aus [Kie68, Folgerung 3.5], . $\square$

Aus (4.8) folgt unmittelbar

(4.9) Korollar. *Sei X ein Schema aus $\mathbb{K}$ und G eine endliche Untergruppe von $\mathrm{Aut}_A X$ derart, daß jede Bahn in einer offenen affinen Teilmenge von X enthalten ist. Dann existiert der Quotient X/G in $\mathbb{K}$ und es gilt*

$$(X/G)^{\mathrm{an}} = X^{\mathrm{an}}/G.$$

5 Existenzsatz. Anwendungen

Wie bereits in der Einleitung angekündigt, soll nun gezeigt werden, daß die Kategorien der kohärenten Moduln auf einem eigentlichen Schema endlicher Darstellung über $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ und auf dem zugehörigen komplexen Raum „äquivalent" sind. Genauer gilt:

(5.1) Theorem (Existenzsatz). *Sei S ein Steinscher Raum, $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, X ein separiertes A-Schema von endlicher Darstellung und $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum. Dann definiert der Funktor $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der kohärenten Moduln auf $X \otimes_A A_K$, deren Träger eigentlich über* $\mathrm{Spec}\, A_K$ *liegt, und der Kategorie der Keime bezüglich K von kohärenten Moduln auf X^{an}, deren Träger eigentlich über S liegt.*

Beweis. Gemäß (4.6) ist der betrachtete Funktor volltreu. Es genügt daher zu zeigen: Ist $\mathcal{F}'$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$-Modul, dessen Träger eigentlich über S liegt, so gibt es eine offene Umgebung V von K und einen Modul endlicher Darstellung $\mathcal{F}$ auf Umgebung V von K und einen Modul endlicher Darstellung $\mathcal{F}$ auf $X \otimes A_V$, dessen Träger eigentlich über $\mathrm{Spec}\, A_V$ liegt, derart, daß $\mathcal{F}'|_V$ zu $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ isomorph ist. Man sagt dann, daß $\mathcal{F}$ eine Liftung von $\mathcal{F}'$ ist.

Wir gehen schrittweise vor:

(α) Sei $i\colon X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung von eigentlichen A-Schemata endlicher Darstellung. Besitzt dann jeder kohärente $\mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}}$-Modul eine Liftung, so auch jeder kohärente $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$-Modul.

Sei $\mathfrak{a}$ das X definierende endliche $\mathcal{O}_Y$-Ideal und $\mathcal{F}'$ ein kohärenter Modul auf X^{an}. Der $\mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}}$-Modul $\mathcal{G}' := i_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}')$ besitzt nach Voraussetzung eine Liftung $\mathcal{G}$. Nach geeigneter Schrumpfung von S dürfen wir annehmen, daß $\mathcal{G}$ ein Modul auf Y ist. Wegen $(\mathfrak{a}\mathcal{G})^{\mathrm{an}} = \mathfrak{a}^{\mathrm{an}}\mathcal{G}^{\mathrm{an}}$ gilt $\mathfrak{a}\mathcal{G} = 0$, falls S klein genug ist. Dann ist $\mathcal{F} := i^*(\mathcal{G})$ eine Liftung von $\mathcal{F}'$.

(β) Der Satz gilt für den Fall, daß X ein projektives A-Schema endlicher Darstellung ist.

Wegen (α) genügt es, den Fall $X = \mathbb{P}_A^r$ zu betrachten. Wir gehen durch Induktion nach r vor. Der Fall $r = 0$ folgt aus Theorem B. Sei daher nun $r > 0$ und seien $\mathcal{F}'$ ein kohärenter Modul auf X^{an} sowie $U \Subset S$ eine offene

Umgebung von K. Wir wollen uns zunächst überlegen, daß es ein n_0 derart gibt, daß die Homomorphismen $f^{an*}(f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}'(n))) \xrightarrow{v_n} \mathcal{F}'(n)$ für jedes $n \geq n_0$ auf $f^{an-1}(U)$ surjektiv sind. Hierbei bezeichnet f den Strukturmorphismus $X \to \operatorname{Spec} A$.

Sei $x \in X^{\mathrm{an}}$ und $s := f^{\mathrm{an}}(x)$. Erzeugt dann $f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}'(n))_s$ den Modul $\mathcal{F}'(n)_x$, so gilt dieselbe Eigenschaft auch für jedes $m \geq n$. Dies folgt sofort durch Betrachtung der Homothetien t_k^{m-n}, $0 \leq k \leq r$. Aus Kompaktheitsgründen genügt es daher, die folgende Aussage zu zeigen: Zu jedem $x = (s, a) \in S \times \mathbb{P}^r = X^{\mathrm{an}}$ existiert ein n dergestalt, daß $f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}'(n))_a$ den Modul $\mathcal{F}'(n)_x$ erzeugt. Sei dazu f eine von Null verschiedene Linearform aus $\mathbb{C}[t_0, \ldots, t_r]$ mit $f(a) = 0$ und $\mathfrak{a}$ das durch f definierte kohärente Ideal von $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$. Weil $\mathfrak{a}$ zu $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}(-1)$ isomorph ist, erhalten wir aus

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathcal{O}^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathcal{O}^{\mathrm{an}}/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$$

durch Tensorieren mit $\mathcal{F}'$ die exakte Sequenz

$$\mathcal{F}'(-1) \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}'/\mathfrak{a}\mathcal{F}' \longrightarrow 0.$$

Setzen wir noch $\mathcal{G}' := \mathcal{F}'/\mathfrak{a}\mathcal{F}'$ sowie $\mathcal{H}' := \operatorname{Kern}(\mathcal{F}'(-1) \to \mathcal{F}')$, so gewinnen wir hieraus durch Tensorieren mit $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}(n)$ die exakten Sequenzen

$$0 \to \mathcal{H}'(n) \to \mathcal{F}'(n-1) \to \mathcal{F}'(n) \to \mathcal{G}'(n) \to 0,$$

welche sich in zwei kurze exakte Sequenzen zerlegen lassen:

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}'(n) \longrightarrow \mathcal{F}'(n-1) \longrightarrow \mathcal{H}_n \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{F}'(n) \longrightarrow \mathcal{G}'(n) \longrightarrow 0.$$

Diese wiederum geben Anlaß zu folgenden exakten Bildgarbensequenzen in s:

$$R^1 f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}'(n-1))_s \longrightarrow R^1 f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{H}_n)_s \longrightarrow R^2 f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{H}'(n))_s$$
$$R^1 f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{H}_n)_s \longrightarrow R^1 f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}'(n))_s \longrightarrow R^1 f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{G}'(n))_s$$

Die Moduln $\mathcal{G}'$ und $\mathcal{H}'$ werden von $\mathfrak{a}$ annulliert, lassen sich also als kohärente Moduln auf dem von $\mathfrak{a}$ definierten analytischen Unterraum von X^{an} auffassen. Dieser ist aber gleich $S \times \mathbb{P}^{r-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung sind $\mathcal{G}'$ und $\mathcal{H}'$ daher liftbar. Wegen (4.2) und [EGA III_1, (2.2.1)] existiert folglich eine Zahl n_0 derart, daß $R^1 f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{G}'(n))_s = 0$ und $R^2 f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{H}'(n))_s = 0$ für alle $n > n_0$ gilt. Für $n > n_0$ sind dann die Homomorphismen

$$R^1 f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}'(n-1))_s \longrightarrow R^1 f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}'(n))_s \qquad (5.2)$$

surjektiv. Nun ist $R^1 f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}'(n_0 - 1))_s$ nach dem Grauertschen Kohärenzsatz (vgl. z. B. [KV71]) ein endlicher $\mathcal{O}_{S,s}$-Modul. Weil $\mathcal{O}_{S,s}$ noethersch ist, folgt:

Es gibt ein $n_1 \geq n_0$ derart, daß (5.2) für jedes $n \geq n_1$ bijektiv ist. Dann ist auch $R^1 f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{H}_n)_s \to R^1 f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}'(n))_s$ für $n \geq n_1$ bijketiv und mithin

$$f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}'(n))_s \to f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{G}'(n))_s \quad \text{surjektiv für } n \geq n_1.$$

Weil $\mathcal{G}'$ eine Liftung besitzt und x in der Nullstellenmenge von $\mathfrak{a}$ liegt, gibt es wegen [EGA III_1, (2.2.1)] eine Zahl $n > n_1$ derart, daß $f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{G}'(n))_s$ den Modul $\mathcal{G}'(n)_x$ erzeugt. Aus dem Lemma von Nakayama folgt nun, daß auch $\mathcal{F}'(n)_x$ von $f_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}'(n))_s$ erzeugt wird.

Da S Steinsch ist, gibt es nach Verkleinerung von S als Umgebung von K eine exakte Sequenz

$$\mathcal{O}_S^{\ell} \longrightarrow f_*^{\mathrm{an}}\mathcal{F}'(n) \longrightarrow 0.$$

Hieraus resultiert die exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$-Moduln

$$\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}^{\ell} \longrightarrow \mathcal{F}'(n) \longrightarrow 0,$$

aus der man endlich durch Tensorieren mit $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}(-n)$ die exakte Sequenz

$$\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}(-n)^{\ell} \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow 0$$

gewinnt. Dieselbe Betrachtung läßt sich auch für den Kern dieses Homomorphismus durchführen. Man erhält schließlich eine exakte Sequenz

$$\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}(-m)^{k} \longrightarrow \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}^{\ell} \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow 0.$$

Da der Funktor volltreu ist, läßt sich v' zu einem Homomorphismus v von $\mathcal{O}(-m)^k$ in $\mathcal{O}(-n)^{\ell}$ liften, falls S klein genug ist. Dann ist $\mathcal{F} := \operatorname{Kokern} v$ eine Liftung von $\mathcal{F}'$.

(γ) Der Satz gilt für den Fall, daß X quasiprojektiv über $\operatorname{Spec} A$ ist.

Man darf in diesem Falle annehmen, daß X ein offenes Unterschema eines projektiven A-Schemas Z von endlicher Darstellung ist. Sei $i\colon X \hookrightarrow Z$ die kanonische Injektion. Der Träger des vorgegebenen $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$-Moduls $\mathcal{F}'$ ist abgeschlossen in Z^{an}, zu dem gemäß (β) nach Schrumpfung von S ein $\mathcal{O}_Z$-Modul $\mathcal{H}$ endlicher Darstellung mit $\mathcal{H}^{\mathrm{an}} \cong i_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}')$ existiert. Wegen $(\operatorname{Supp}\mathcal{H})^{\mathrm{an}} = \operatorname{Supp}(\mathcal{H}^{\mathrm{an}}) = \operatorname{Supp}\mathcal{F}' \subseteq X^{\mathrm{an}}$ liegt der Träger von $\mathcal{H}$ nach hinreichender Verkleinerung von S in X, vgl. (2.5). Dann ist $\mathcal{F} := \mathcal{H}|_X$ eine Liftung von $\mathcal{F}'$.

Wir behandeln nun den allgemeinen Fall. Sei $Y \subseteq X \otimes A_K$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann gibt es eine offene Steinsche Umgebung U von K und eine abgeschlossene konstruierbare Menge $Y_U \subseteq X \otimes A_U$ mit $Y_U \otimes A_K = Y$. Mit $P(Y)$ werde die folgende Eigenschaft bezeichnet:

> Ist V eine in U enthaltene offene Steinsche Umgebung von K und $\mathcal{F}'$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}|_V}$-Modul, dessen Träger eigentlich über V liegt und in $Y_U^{\mathrm{an}}|_V$ enthalten ist, so ist $\mathcal{F}'$ liftbar.

Man beachte, daß $P(Y)$ nur von Y abhängt und daß $P(\varnothing)$ trivialerweise gültig ist. Wir haben zu zeigen, daß $P(X \otimes A_K)$ erfüllt ist. Dazu dürfen wir annehmen, daß $P(Y)$ für jede echte Teilmenge Y von $X \otimes A_K$ bereits bewiesen ist (Noethersche Induktion).

Nach dem Lemma von Chow ([EGA II, (5.6.1)]) in Verbindung mit den Resultaten aus [EGA IV_3, Chapitre 8] existieren nach Verkleinerung von S folgende Daten: Ein quasiprojektives A-Schema X' von endlicher Darstellung, ein projektiver und surjektiver A-Morphismus $X' \xrightarrow{g} X$ sowie eine offene Teilmenge V von X mit $V \otimes A_K \neq \varnothing$ dergestalt, daß g über V einen Isomorphismus induziert.

Sei nun $\mathcal{F}'$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ Modul, dessen Träger eigentlich über S liegt. Nach (γ) ist der $\mathcal{O}_{X'^{\mathrm{an}}}$-Modul $g^{\mathrm{an}*}(\mathcal{F}')$ liftbar. Aus dem Vergleichssatz (4.2) folgt, daß dann auch $g_*^{\mathrm{an}} g^{\mathrm{an}*}(\mathcal{F}')$ liftbar ist. Wir betrachten den kanonischen Homomorphismus $v\colon \mathcal{F}' \to g_*^{\mathrm{an}} g^{\mathrm{an}*}(\mathcal{F}')$. Die Träger von Kern v und Kokern v liegen eigentlich über S und sind in $(X \setminus V)^{\mathrm{an}}$ enthalten. Daher sind diese Moduln nach Voraussetzung liftbar. Aus Flachheitsgründen ist ist dann auch Bild v liftbar. Daß $\mathcal{F}'$ liftbar ist, ergibt sich nun aus

(δ) Ist $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{G}' \to \mathcal{H}' \to 0$ eine exakte Sequenz von kohärenten $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$-Moduln mit über S eigentlich Trägern, so ist mit $\mathcal{F}'$ und $\mathcal{H}'$ auch $\mathcal{G}'$ liftbar.

Nach Verkleinerung von S gibt es $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ von endlicher Darstellung mit über $\operatorname{Spec} A$ eigentlichen Trägern und $\mathcal{F}^{\mathrm{an}} = \mathcal{F}'$, $\mathcal{H}^{\mathrm{an}} = \mathcal{H}'$. Zu der gegebenen Erweiterung von $\mathcal{H}^{\mathrm{an}}$ durch $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ gehört ein Element aus $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}}(X^{\mathrm{an}}; \mathcal{H}^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}^{\mathrm{an}})$. Aus der Isomorphie

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X\otimes A_K}}(X \otimes A_K; \mathcal{H} \otimes A_K, \mathcal{F} \otimes A_K) \cong \varinjlim_U \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}|_U}}(X^{\mathrm{an}}|_U; \mathcal{H}^{\mathrm{an}}|_U, \mathcal{F}^{\mathrm{an}}|_U)$$

vgl. (4.6), folgt nun (δ). □

Der wichtigste Spezialfall von (5.1) ist:

(5.3) Korollar. *Sei X ein eigentliches A-Schema von endlicher Darstellung. Für jedes Steinsche Kompaktum $K \subseteq S$ ist dann der natürliche Funktor*

$$\operatorname{Coh}(X \otimes_A A_K) \longrightarrow \varinjlim_{U \supseteq K} \operatorname{Coh}(X^{\mathrm{an}}|_U)$$

eine Äquivalenz von Kategorien. Hierbei durchlaufe U das System der offenen Steinschen Umgebungen von K.

Hieraus folgt weiter:

(5.4) Korollar. *Für ein eigentliches A-Schema X von endlicher Darstellung sind die natürlichen Abbildungen*

$$H^1\big(X \otimes_A A_K, \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})\big) \longrightarrow \varinjlim_U H^1\big(X^{\mathrm{an}}|_U, \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})\big) = H^1\big(X^{\mathrm{an}}|_K, \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})\big)$$

bijektiv. Insbesondere hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Pic}(X \otimes_A A_K) \longrightarrow \varinjlim_U \mathrm{Pic}(X^{\mathrm{an}}|_U) = \mathrm{Pic}(X^{\mathrm{an}}|_K)$$

zwischen den Picardschen Gruppen.

Eine weitere Folgerung aus (5.1) ist:

(5.5) Korollar. *Sei X ein separiertes A-Schema endlicher Darstellung. Dann entsprechen die abgeschlossenen Unterschemata von $X \otimes_A A_K$, die eigentlich über* $\operatorname{Spec} A_K$ *liegen, umkehrbar eindeutig den Keimen bezüglich K von über S eigentlichen abgeschlossenen analytischen Unterräumen von X^{an}.*

(5.6) Korollar. *Es seien X ein eigentliches A-Schema von endlicher Darstellung und Y ein separiertes A-Schema von endlicher Darstellung. Für jedes Steinsche Kompaktum $K \subseteq S$ ist dann die kanonische Abbildung*

$$\mathrm{Hom}_{A_K}(X \otimes_A A_K, Y \otimes_A A_K) \longrightarrow \varinjlim_U \mathrm{Hom}_U(X^{\mathrm{an}}|_U, Y^{\mathrm{an}}|_U)$$

bijektiv.

Beweis. Die Morphismen von $X \otimes A_K$ in $Y \otimes A_K$ entsprechen umkehrbar eindeutig den abgeschlossenen Unterschemata Z von $(X \times_A Y) \otimes A_K$, für die die erste Projektion einen Isomorphismus $Z \xrightarrow{\sim} X \otimes A_K$ induziert. Eine analoge Aussage gilt für die holomorphen Abbildungen von $X^{\mathrm{an}}|_U$ in $Y^{\mathrm{an}}|_U$. Die Behauptung folgt nun aus (5.5) in Verbindung mit (3.1). □

Für einen geringten Raum Z bezeichne $\mathcal{M}_Z$ wie üblich die Garbe der Keime von meromorphen Funktionen auf Z sowie $M(Z) = \Gamma(Z, \mathcal{M}_Z)$ den Ring der meromorphen Funktionen auf Z. Sei X ein A-Schema von endlicher Darstellung und $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum. Da der Morphismus $X^{\mathrm{an}}|_U \to X \otimes_A A_U$ flach ist für jede offene Steinsche Umgebung U von K, gibt es natürliche Abbildungen

$$M(X \otimes_A A_K) \longrightarrow M(X^{\mathrm{an}}|_U), \quad m \mapsto m^{\mathrm{an}},$$

Diese geben zusammen mit der analog erhaltenen Abbildung $M(X \otimes_A A_K) \to M(X^{\mathrm{an}}|_K)$ Anlaß zu dem folgenden kommutativen Diagramm

(5.7)
$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_U M(X \otimes_A A_U) & \longrightarrow & \varinjlim_U M(X^{\mathrm{an}}|_U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M(X \otimes_A A_K) & \longrightarrow & M(X^{\mathrm{an}}|_K). \end{array}$$

in dem der Homomorphismus i bijektiv ist. Als Anwendung von (5.1) erhalten wir

(5.8) Satz. *Ist X eigentlich über A, so sind die Homomorphismen in (5.7) sämtlich bijektiv.*

Beweis. (vgl. auch [HM68]) Sei zunächst Z ein geringter Raum mit kohärenter Strukturgarbe $\mathcal{O}_Z$ und $m \in M(Z)$ eine meromorphe Funktion. Mit $\lambda_m \colon \mathcal{O}_Z \to \mathcal{M}_Z$ werde das Multiplizieren mit m bezeichnet. $\mathcal{P}_m := \lambda_m^{-1}(\mathcal{O}_Z)$ heißt die Polgarbe von m. Unter derangegebenen Voraussetzung ist $\mathcal{P}_m$ ein kohärentes $\mathcal{O}_Z$-Ideal: Wir dürfen hierzu annehmen, daß Schnitte $f, g \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$, g Nichtnullteiler in allen Halmringen, existieren mit $m = f/g$. Dann ist

$$\mathcal{P}_m = \mathrm{Kern}(\mathcal{O}_Z \xrightarrow{\lambda_f} \mathcal{O}_Z / g \cdot \mathcal{O}_Z)$$

kohärent. $m \cdot \mathcal{P}_m$ ist ein kohärentes Ideal, dessen Träger mit dem Träger von m übereinstimmt.

Offenbar genügt es zu zeigen, daß die untere Abbildung in (5.7) bijektiv ist. Sei dazu $m \in M(X \otimes A_K)$ eine auf $X \otimes A_K$ meromorphe Funktion. Dann ist $\mathcal{P}_{m^{\mathrm{an}}} = \mathcal{P}_m^{\mathrm{an}}$. Ist $m^{\mathrm{an}} = 0$, so ist $0 = m^{\mathrm{an}} \cdot \mathcal{P}_m^{\mathrm{an}}$, also $m \cdot \mathcal{P}_m = 0$, vgl. (2.7). Dies zeigt die Injektivität.

Zum Nachweis der Surjektivität sei $m' \in M(X^{\mathrm{an}}|_K)$. Es sei $\mathcal{P}' := \mathcal{P}_{m'}$, die Polgarbe von m' und $\mathfrak{Z}' := m' \cdot \mathcal{P}'$. Nach (5.5) gibt es kohärente Ideale $\mathcal{P}, \mathcal{Z}$ der Strukturgarbe von $X \otimes A_K$ mit $\mathcal{P}^{\mathrm{an}} \cong \mathcal{P}'$ und $\mathcal{Z}^{\mathrm{an}} \cong \mathcal{Z}'$; da $\mathcal{P}'$ lokal einen Nichtnullteiler enthält, gilt dies auch für $\mathcal{P}$. Wegen (5.3) existiert ein Homomorphismus $\mu \colon \mathcal{P} \to \mathcal{Z}$ mit $\mu^{\mathrm{an}} = \lambda_m$. Zu jedem Punkt aus $X \otimes A_K$ gibt es eine offen-affine Umgebung V und einen Nichtnullteiler $g \in \Gamma(V, \mathcal{P})$. Sei $f := \mu(g)$. Das Element $f/g \in M(V)$ ist unabhängig von der Wahl von g. Folglich lassen sich die so erhaltenen Schnitte zu einer meromorphen Funktion $m \in M(X \otimes A_K)$ zusammenkleben. Es ist offenbar $\lambda_m = \mu$. Aus $\lambda_{m'} = (\lambda_m)^{\mathrm{an}} = \lambda_{m^{\mathrm{an}}}$ folgt aber $m' = m^{\mathrm{an}}$. □

Wir betrachten noch den allgemeinen Fall eines nicht notwendig eigentlichen A-Schemas.

(5.9) Aussage. *Es seien X ein A-Schema endlicher Darstellung und $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum. $X \otimes_A A_K$ sei reduziert. Dann gilt:*

(1) $\Gamma(X \otimes_A A_K, \mathcal{O}_{X \otimes_A A_K})$ *ist ganz abgeschlossen in*

$$\varinjlim_U \Gamma(X^{\mathrm{an}}|_U, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}|_U}).$$

(2) $M(X \otimes_A A_K)$ *ist ganz abgeschlossen in* $\varinjlim_U M(X^{\mathrm{an}}|_U)$.

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei X affin. Zu (1). Die Funktion $f \in \Gamma(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}})$ genüge der Ganzheitsgleichung

$$P(f) = 0, \quad P \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)[T] \text{ unitär.}$$

Wir setzen $C := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)[T]/(P)$ und $Z := \operatorname{Spec} C$. Dann entspricht f umkehrbar eindeutig einer holomorphen Abbildung aus $\operatorname{Hom}_{X^{\mathrm{an}}}(X^{\mathrm{an}}, Z^{\mathrm{an}})$. Wegen (7.5) rührt diese Abbildung nach eventueller Verkleinerung von S von einem X-Morphismus $X \to Z$ her. Dieser Morphismus definiert ein Element $g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ mit $P(g) = 0$, das von dem natürlichen Homomorphismus $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}})$ auf f abgebildet wird. Dies zeigt die Behauptung.

Zu (2). Wir dürfen hier sogar annehmen, daß $X \otimes A_K$ normal ist. Mit M werde das System der Nichtnullteiler aus dem globalen Schnittring von $X \otimes A_K$ bezeichnet. Wegen (1) ist $M(X \otimes A_K) = \Gamma(X \otimes A_K, \mathcal{O}_{X \otimes A_K})$ ganz abgeschlossen in C_M. Hierbei sei $C := \varinjlim_U \Gamma(X^{\mathrm{an}}|_U, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}|_U})$. Da X^{an} gemäß (2.7) (nach Schrumpfung von S) gleichfalls normal ist, ist C_M ganz abgeschlossen in $\varinjlim_U M(X^{\mathrm{an}}|_U)$. Insgesamt ist $M(X \otimes A_K)$ ganz abgeschlossen in $\varinjlim_U M(X^{\mathrm{an}}|_U)$. $\square$

Auf die Reduziertheitsvoraussetzung kann in (5.9) nicht verzichtet werden, wie triviale Beispiele lehren.

Als Ergänzung zu (1.1) und (4.2) zeigen wir

(5.10) Aussage. *Es seinen X ein affines A-Schema von endlicher Darstellung und $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum. Dann ist die Ringerweiterung*

$$\Gamma(X \otimes_A A_K, \mathcal{O}_{X \otimes_A A_K}) \to \varinjlim_{U \supseteq K} \Gamma(X^{\mathrm{an}}|_U, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}|_U})$$

treuflach.

Beweis. Den rechts stehenden Ring bezeichnen wir kurz mit C. Sei ferner B der globale Schnittring von X und $B_K := B \otimes_A A_K$. Sei $\mathfrak{b}'$ ein Ideal in B_K. Weil B_K noethersch ist, gibt es nach Verkleinerung von S ein Ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$ mit $\mathfrak{b} \otimes_B B_K = \mathfrak{b}'$ und eine exakte Sequenz $B^n \to B^m \to \mathfrak{b} \to 0$. Aus dieser Sequenz erhalten wir wegen (1.1) und Theorem B das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} C^n & \longrightarrow & C^m & \longrightarrow & \mathfrak{b} \otimes_B C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow & & \\ C^n & \longrightarrow & C^m & \longrightarrow & \varinjlim_U \Gamma(X^{\mathrm{an}}|_U, \mathfrak{b}\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}|_U}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Wegen $\varinjlim \Gamma(X^{\mathrm{an}}|_U, \mathfrak{b}\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}|_U}) \subseteq C$ ist der kanonische Homomorphismus $\mathfrak{b}' \otimes_{B_K} C = \mathfrak{b} \otimes_B C \to C$ folglich injektiv. Daher ist C ein flacher B_K-Modul. Sei $\mathfrak{m} \subseteq B_s$ ein maximales Ideal. Nach eventueller Schrumpfung von S gibt es ein endliches Ideal $\mathfrak{n}$ von B mit $\mathfrak{n}B_K = \mathfrak{m}$. Aus (2.5), auf $T = V(\mathfrak{n})$ angewandt, folgt, daß $\mathfrak{n}\Gamma(X^{\mathrm{an}}|_U, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}|_U})$ vom Einheitsideal verschieden ist für alle offenen Umgebungen U von K. Daher ist $\mathfrak{m}C \neq C$. Damit ist (5.10) gezeigt. $\square$

Bermerkung. Für ein A-Schema X von endlicher Darstellung ist der kanonische Homomorphismus $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}})$ im allgemeinen nicht flach, selbst wenn X affin ist. Sei zum Beispiel $S = \mathbb{C}^3$ und $X = \operatorname{Spec} A[t]$, also $X^{\mathrm{an}} = \mathbb{C}^4$. Wäre $A[t] \to \Gamma(\mathbb{C}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^4})$ flach, so wäre erst recht $\Gamma(\mathbb{C}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^4})$ falch über $\Gamma(\mathbb{C}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3})$. Letzteres widerspräche einem Resultat von A. Douady und L. Szpiro.

Aus dem Existenzsatz (5.1) zusammen mit dem Vergleichssatz (4.2) und dem Satz von Serre über projektive Abblidungen [EGA III_1, (2.2.1)] folgt unmittelbar:

(5.11) Theorem (Grauert–Remmert [GR58b]). *Sei Y ein komplexer Raum, $X = Y \times \mathbb{P}^r$, $f\colon X \to Y$ die kanonische Projektion, V eine relativkompakte Teilmenge von Y, $\mathcal{O}(1)$ der kanonische invertierbare Modul auf X und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann gilt:*

(1) Die $\mathcal{O}_Y$-Moduln $R^p f_*(\mathcal{F})$ sind kohärent.

(2) Es existiert eine Zahl n_0 derart, daß die Homomorphismen

$$f^*(f_*(\mathcal{F}(n))) \to \mathcal{F}(n)$$

auf $f^{-1}(V)$ surjektiv sind für alle $n > n_0$.

(3) Es existiert eine Zahl n_0 derart, daß $R^p f_*(\mathcal{F}(n)) = 0$ ist auf V für alle $n \geq n_0$ und alle $p > 0$.

Abschließend möchten wir auf eine weitere Anwendung der bis hierhin erhaltenen Aussagen hinweisen. Sei Y ein (nicht notwendig Steinscher) komplexer Raum und $\mathcal{S} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ eine graduierte $\mathcal{O}_Y$-Algebra endlichen Typs, wobei die $\mathcal{S}_n$ als $\mathcal{O}_Y$-Moduln kohärent seien. Sei $\mathbb{B}$ das System aller offenen Steinschen Mengen $U \subseteq Y$, für die $\bar{U}$ ein Steinsches Kompaktum ist. Nach [Bin76, Beweis von (1.5)] ist dann $\Gamma(\bar{U}, \mathcal{S})$ eine $\Gamma(\bar{U}, \mathcal{O}_Y)$-Algebra endlicher Darstellung. Wir setzen

$$A_U \coloneqq \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \qquad \text{und} \qquad S_U \coloneqq \Gamma(\bar{U}, \mathcal{S}) \otimes_{\Gamma(\bar{U}, \mathcal{O}_Y)} A_U$$

für $U \in \mathbb{B}$. Dann gilt

$$S_V = S_U \otimes_{A_U} A_V \text{ für } V \subseteq U.$$

Weiter ist $X_U \coloneqq \operatorname{Proj} S_U$ ein A_U-Schema von endlicher Darstellung mit

$$X_V = X_U \otimes_{A_U} A_V \text{ für } V \subseteq U.$$

Wegen (1.2) lassen sich daher die komplexen Räume $(X_U)^{\mathrm{an}}$ zu einem komplexen Raum X über Y zusammenkleben. X heißt das homogene analytische Spektrum von $\mathcal{S}$ und wird mit $\operatorname{Projan} \mathcal{S}$ bezeichnet. Wie die algebraischen Eigenschaften von $\mathcal{S}$ mit denen von $X = \operatorname{Projan} \mathcal{S}$ zusammenhängen, liest man etwa aus (2.7) ab. (Natürlich läßt sich auch das analytische Spektrum Specan $\mathcal{A}$ einer $\mathcal{O}_Y$-Algebra von endlicher Darstellung ([Cartan 60/61]) in dieser Weise gewinnen.)

Sei nun $\mathfrak{M} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}_n$ ein graduierter $\mathcal{S}$-Modul, dessen homogene Komponenten als $\mathcal{O}_Y$-Moduln kohärent sind. Für $U \in \mathbb{B}$ sei

$$M_U := \Gamma(\bar{U}, \mathcal{M}) \otimes_{\Gamma(\bar{U}, \mathcal{O}_Y)} A_U.$$

M_U ist ein graduierter S_U-Modul. Wegen

$$M_V = M_U \otimes_{A_U} A_V \text{ für } V \subseteq U$$

gilt für die zugehörigen Garben auf X_V und X_U

$$\widetilde{M_U} = \widetilde{M_V} \otimes_{\mathcal{O}_{X_U}} \mathcal{O}_{X_V}.$$

Folglich definieren die Moduln $\widetilde{M_U}^{\text{an}}$ durch Zusammenkleben einen Modul auf X, den wir den zu $\mathcal{M}$ gehörigen $\mathcal{O}_X$-Modul nennen und mit $\widetilde{\mathcal{M}}$ bezeichnen. Wegen (1.1) und [EGA II, (2.5.4)] ist $\widetilde{\mathcal{M}}$ ein additiver <u>exakter</u> Funktor in $\mathcal{M}$. Wir setzen noch

$$\mathcal{O}_X(n) := \widetilde{\mathcal{S}(n)} \quad \text{und } \mathcal{F}(n) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$.

Es werde nun vorausgesetzt, daß $\mathcal{S}$ von $\mathcal{S}_1$ erzeugt wird. Dann ist $\mathcal{O}_X(n) = \mathcal{O}_X(1)^{\otimes n}$ inversibel und es ist $\widetilde{\mathcal{M}(n)} = \widetilde{\mathcal{M}}(n)$. Weiter ist für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} p_*(\mathcal{F}(n))$$

ein graduierter Modul über $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$, vgl. [EGA I, (0.5.4.6)]. Hierbei bezeichnet p den Strukturmorphismus $X \to Y$. Für einen graduierten $\mathcal{S}$-Modul $\mathcal{M}$ der oben angegebenen Art definieren die kanonischen Homomorphismen

$$M_U \xrightarrow{\alpha_U} \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X_U, \widetilde{M_U}(n)) \to \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(p^{-1}(U), \widetilde{M}(n)),$$

vgl. [EGA II, (2.6)], einen Homomorphismus

$$\alpha \colon \mathcal{M} \to \Gamma_*(\widetilde{\mathcal{M}}).$$

Sei $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist $\widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})}$ aufgrund des Grauertschen Bildgarbensatzes definiert und man kan wie in [EGA II, (2.6.4)] einen $\mathcal{O}_X$-Homomorphismus

$$\beta_{\mathcal{F}} \colon \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})} \to \mathcal{F}$$

erklären.

(5.12) Satz. *Sei Y ein komplexer Raum, $\mathcal{S} = \mathcal{O}_Y[\mathcal{S}_1]$ eine graduierte $\mathcal{O}_Y$-Algebra, deren homogene Komponenten als $\mathcal{O}_Y$-Moduln kohärent sind, und $X^{\mathrm{an}} = \mathrm{Proj}^{\mathrm{an}}\,\mathcal{S}$. Weiter sei $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist $\beta_{\mathcal{F}}$ bijektiv. Insbesondere ist $\mathcal{F}$ zu einem Modul der Form $\widetilde{\mathcal{M}}$ isomorph. Zu jeder relativkompakten Teilmenge V von Y gibt es einen endlichen $\mathcal{S}$-Modul $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{F}|_{p^{-1}(V)} \cong \widetilde{\mathcal{M}}|_{p^{-1}(V)}$.*

Beweis. Sei $U \in \mathbb{B}$. Nach dem Existenzsatz (5.3) gibt es nach eventueller Schrumpfung von U einen endlichen quasikohärenten Modul $\mathcal{G}$ auf $X_U = \mathrm{Proj}\,S_U$ mit $\mathcal{G}^{\mathrm{an}} = \mathcal{F}|_{p^{-1}(U)}$. Ist U klein genug, so gilt nach dem Vergleichssatz (4.2)

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X_U, \mathcal{G}(n)) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(U, p_*(\mathcal{F}(n))).$$

Gemäß [EGA II, S. 2.7.5] ist $\beta_{\mathcal{G}} \colon \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{G})} \to \mathcal{G}$ bijektiv. Nach Konstruktion von $\widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})}$ gilt $\widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})}|_{p^{-1}(U)} = \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{G})}^{\mathrm{an}}$, so daß $\beta_{\mathcal{F}}|_{p^{-1}(U)} = (\beta_{\mathcal{G}})^{\mathrm{an}}$ und damit auch $\beta_{\mathcal{F}}$ bijektiv ist.

Sei $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{S}$-Modul mit $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{F}$. Es ist $\mathcal{M} = \varinjlim \mathcal{M}_i$ der dirrekte Limes über alle endlichen graduierten $\mathcal{S}$-Untermoduln $\mathcal{M}_i$. Hieraus folgt $\widetilde{\mathcal{M}} = \varinjlim \widetilde{\mathcal{M}_i}$. Weil $p^{-1}(V)$ relativikompakt in X liegt, gibt es ein i mit $\mathcal{F}|_{p^{-1}(V)} = \widetilde{\mathcal{M}_i}|_{p^{-1}(V)}$. □

Zwei wichtige Spezialfälle der obigen Konstruktion verdienen Erwähnung: Ist $\mathcal{E}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul mit symmetrischer Algebra $S(\mathcal{E})$, so ist $\mathbb{P}(\mathcal{E}) := \mathrm{Proj}^{\mathrm{an}}\, S(\mathcal{E})$ der durch $\mathcal{E}$ definierte projektive Faserraum. Ist $\mathfrak{a}$ ein kohärentes $\mathcal{O}_Y$-Ideal, so ist $M_{\mathfrak{a}}(Y) := \mathrm{Proj}^{\mathrm{an}}(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}^n t^n)$ die monoideale Transformation von Y längs $\mathfrak{a}$.

Sei nun $\mathcal{S}'$ eine weitere $\mathcal{O}_Y$-Algebra der oben beschriebenen Art und $\varphi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ ein Homomorphismus graduierter Algebren. φ definiert für jedes $U \in \mathbb{B}$ einen Homomorphismus $\varphi_U \colon S_U \to S'_U$ graduierter A_U-Algebren, zu dem wiederum ein Morphismus $\Phi_U \colon G(\varphi_U) \to X_U$ gehört. Hierbei bezeichnet $G(\varphi_U)$ das Komplement von $V_+(\varphi_U((S_U)_+))$ in $X'_U = \mathrm{Proj}\, S'_U$. Es gibt eine offene Teilmenge $G(\varphi)$ von $X' = \mathrm{Proj}^{\mathrm{an}}\,\mathcal{S}'$ und eine holomorphe Abbildung $\Phi\colon G(\varphi) \to X$ mit $G(\varphi) \cap p'^{-1}(U) = G(\varphi_U)^{\mathrm{an}}$ und $\Phi|_{p'^{-1}(U)} = \Phi_U^{\mathrm{an}}$ für alle $U \in \mathbb{B}$. Hierbei ist $p'\colon X' \to Y$ die Strukturabblidung. Φ heißt die durch φ definierte holomorphe Abblidung und wird auch $\mathrm{Proj}^{\mathrm{an}}\,\varphi$ bezeichnet.

Der Homomorphismus $\varphi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ heiße (TN)-surjektiv (bzw. (TN)-injektiv, (TN)-bijektiv), wen die Homomorphismen $\varphi_U \colon S_U \to S'_U$, $U \in \mathbb{B}$ sämtlich (TN)-surjektiv (bzw. (TN)-injektiv, (TN)-bijektiv) in Sinne von [EGA II, (3.6)], sind. Nach diesen Vorbereitungen lassen sich die abgeschlossenen analytischen Unterräume von $X = \mathrm{Proj}^{\mathrm{an}}\,\mathcal{S}$ wie im algebraischen Fall charakterisieren.

(5.13) Aussage. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

(1) Ist $\varphi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ ein (TN)-surjektiver Homomorphismus, so ist die zu φ gehörige holomorphe Abbildung $\Phi = \operatorname{Proj}^{\mathrm{an}}(\varphi)$ auf ganz $\operatorname{Proj}^{\mathrm{an}} \mathcal{S}'$ definiert und ist eine abgeschlossene Einbettung. Ist $\mathcal{J} = \operatorname{Kern} \varphi$, so wird der zu Φ gehörige Underraum von X durch das $\mathcal{O}_X$-Ideal $\widetilde{\mathcal{J}}$ definiert.

(2) Es gelte $\mathcal{S} = \mathcal{O}_Y[\mathcal{S}_1]$. Sei X' ein abgeschlossener analytischer Unterraum von X, definiert durch das kohärente $\mathcal{O}_X$-Ideal $\mathcal{I}$. Sei $\mathcal{J}$ das Urbild von $\Gamma_*(\mathcal{I})$ unter dem Homomorphismus $\alpha\colon \mathcal{S} \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$, und sei $\mathcal{S}' := \mathcal{S}/\mathcal{J}$. Dann gilt $X' = \operatorname{Proj}^{\mathrm{an}} \mathcal{S}'$.

Beweis. (1) folgt sofort aus der analogen algebraischen Aussage ([EGA II, (3.6.2)]) in Verbindung mit (3.1).

Zu (2): Es genügt zu zeigen, daß das $\mathcal{O}_X$-Ideal $\widetilde{\mathcal{J}}$ mit $\mathcal{I}$ übereinstimmt. Sei $U \in \mathbb{B}$. Nach (5.5) gibt es nach Verkleinerung von U ein endliches quasikohärentes Ideal $\mathfrak{a}$ in X_U mit $\mathfrak{a}^{\mathrm{an}} = \mathcal{I}|_{p^{-1}(U)}$. Ist U klein genug, so gilt

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(U, p_*(\mathcal{I}(n))) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X_U, \mathfrak{a}(n)) = \Gamma_*(\mathfrak{a})$$

und analog für $\mathcal{O}_X$, vgl. (4.2). Bezeichnet $\mathcal{J}_U$ das durch $\mathcal{J}$ definierte S_U-Ideal, so gilt folglich $\widetilde{\mathcal{J}_U} = \mathfrak{a}$ auf X_U, vgl. [EGA II, (2.7.11)]. Erst recht ist $\widetilde{\mathcal{J}}|_{p^{-1}(U)} = \mathcal{I}|_{p^{-1}(U)}$. □

Das homogene analytische Spektrum ist mit Basiserweiterung verträglich: Ist $Y' \to Y$ eine holomorphe Abblidung, so gilt

$$\operatorname{Proj}^{\mathrm{an}}(\mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}) = \operatorname{Proj}^{\mathrm{an}} \mathcal{S} \times_Y Y'.$$

Ist ferner $\mathcal{M}$ ein graduierter $\mathcal{S}$-Modul mit kohärente homogenen Komponenten, so ist

$$\mathcal{M} \widetilde{\otimes_{\mathcal{O}_Y}} \mathcal{O}_{Y'} = q^*(\widetilde{\mathcal{M}}).$$

Hierbei bezeichnet q die Projektion auf den ersten Faktor. Speziell sind die Fasern des homogenen Spektrums gegeben durch $(\operatorname{Proj}^{\mathrm{an}} \mathcal{S})_y = \operatorname{Proj}^{\mathrm{an}}(\mathcal{S}_y/\mathfrak{m}_y\mathcal{S}_y)$, $y \in Y$.

6 Modulräume

Sei $g\colon Z \to T$ ein Morphismus von Schemata lokal von endlicher Darstellung (bzw. eine holomorphe Abblidung). Ist T' ein Schema (bzw. ein komplexer Raum) über T und $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_Z$-Modul, so bezeichne $g'\colon Z' \to T'$ die Basiserweiterung von g un $\mathcal{G}'$ den $\mathcal{O}_{Z'}$-Modul $\mathcal{G}_{\otimes \mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_{Z'}$.

Set $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_Z$-Modul von endlicher Darstellung. Dann ist der Grothendiecksche Funktor $Q = Q_{\mathcal{G}/Z/T}$ folgendermaßen definiert: Für jedes Schema (bzw. jeden komplexen Raum) T' über T ist $Q(T')$ die Menge der Isomorphieklassen von

Quotienten von $\mathcal{G}'$, die von endlicher Darstellung und T'-flach sind, und deren Träger eigentlich über T' liegt. Speziell für $\mathcal{G} = \mathcal{O}_Z$, erhält man den Hilbertschen Funktor $H_{Z/T}$.

Sei nun g zusätzlich eigentlich. Bekanntlich ist dann der Picardsche Funktor $P = \mathrm{Pic}_{Z/T}$ von Z über T in folgender Weise definiert. Im algebraischen Fall ist dies die zu

$$T' \mapsto \mathrm{Pic}(Z')$$

gehörige étale-Garbe. Im analytischen Fall ist $P(T') := \Gamma(T', R^1 g'_*(\mathcal{O}^*_{Z'}))$.

Im folgenden benötigen wir den Begriff des algebraischen Raumes. Es sei kurz an die Definition erinnert (vgl. [Art69], [Knu71]). Sei T ein nicht notwendig noethersches Schema. Ein kontravarianter Funktor F von der Kategorie der T-Schemata in die Kategorie der Mengen heißt ein algebraischer Raum (bzw. separierter algebraischer Raum) lokal von endlicher Darstellung über T, wenn gilt:

(1) F Ist eine Garbe in der étale-Topologie.

(2) Es gibt ein T-Schema W_0 lokal von endlicher Darstellung und eine Garbenabbildung $W_0 \to F$ derart, daß für jedes T-Schema V und jede Abbildung $V \to F$ der Funktor $W_0 \times_F V$ durch ein Unterschema (bzw. abgeschlossenes Unterschema) von $W_0 \times_F V$ darstellbar ist, und die Projektion $W_0 \times_F V \to V$ durch eine surjektive étale Abbildung induziert wird.

Hierbei haben wir von der Konvention Gebrauch gemacht, darstellbare Funktoren und die sie repräsentierenden Objekte mit demselben Symbol zu bezeichnen. Sei $W_1 := W_0 \times_F W_0$. Dann ist $W_1 \rightrightarrows W_0$ eine étale Äquivalenzrelation in der Kategorie der Schemata und es gilt $F = \mathrm{Kokern}(W_1 \rightrightarrows W_0)$ als étale-Garben (vgl. [Knu71, S. 92ff]). Ist T lokal von endlicher Darstellung über einer Steinschen Algebra, so hat die étale Äquivalenzrelation $W_1^{\mathrm{an}} \rightrightarrows W_0^{\mathrm{an}}$ gemäß [Kie68, Theorem 2.1] einen Kokern in der Kategorie der komplexen Räume, den wir mit F^{an} bezeichnen. Wegen (4.8) (3) steht dies in Einklang mit der in (1.1) gegebenen Definition.

Es sei S ein Steinscher Raum und $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$.

(6.1) Satz. *Sei $f\colon X \to Y$ ein separierter quasikompakter Morphismus von A-Schemata lokal von endlicher Darstellung und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul endlicher Darstellung. Dann gilt:*

(1) Der Funktor $Q_{\mathcal{F}/X/Y}$ ist ein separierter algebraischer Raum lokal von endlicher Darstellung über Y.

(2) Der Funktor $Q_{\mathcal{F}^{\mathrm{an}}/X^{\mathrm{an}}/Y^{\mathrm{an}}}$ ist darstellbar und es ist

$$Q_{\mathcal{F}^{\mathrm{an}}/X^{\mathrm{an}}/Y^{\mathrm{an}}} = Q^{\mathrm{an}}_{\mathcal{F}/X/Y}.$$

(6.2) Satz. *Sei $f\colon X \to Y$ ein flacher eigentlicher Morphismus von A-Schemata lokal von endlicher Darstellung, der über-dies kohomologisch flach in der Dimension Null ist. Dann gilt:*

(1) Der relative Picardsche Funktor $\mathrm{Pic}_{X/Y}$ ist ein algebraischer Raum, lokal von endlicher Darstellung über Y.

(2) Der relative Picardsche Funktor $\mathrm{Pic}_{X^{\mathrm{an}}/Y^{\mathrm{an}}}$ *ist darstellbar und es ist*

$$\mathrm{Pic}_{X^{\mathrm{an}}/Y^{\mathrm{an}}} = \mathrm{Pic}_{X/Y}^{\mathrm{an}}.$$

Beweis von (6.1) und (6.2). Die jeweiligen Aussagen (1) folgen aus den Darstellbarkeitssätzen von M. Artin ([Art69, Theoreme (6.1), (7.3)]). Zum Nachweis von (2) dürfen wir annehmen, daß $Y = \mathrm{Spec}\, A$ ist. Zur Vereinfachung der Schreibweise werde der in (6.1) (bzw. (6.2)) betrachtete Funktor auf der Kategorie der A-Schemata mit F und der analoge Funktor auf der Kategorie der komplexen Räume über S mit F' bezeichnet.

Es sei $W_0 \to F$ eine Garbenabbildung der in der oben angegebenen Definition des algebraischen Raumes beschriebenen Art und $W_1 = W_0 \times_F W_0$. Hierbei ist W_0 ein A-Schema lokal von endlicher Darstellung. Zu id_{W_0} gehört ein Element $\bar{\xi} \in F(W_0)$, das im Kern von $F(W_0) \rightrightarrows F(W_1)$ liegt. Den Kokern der étalen Äquivalenzrelation $W_1^{\mathrm{an}} \rightrightarrows W_0^{\mathrm{an}}$ bezeichen wir mit R. Die kanonische holomorphe Abbildung $W_0^{\mathrm{an}} \to R$ ist étale und surjektiv, vgl. [Kie68, Theorem 2.1]. Das Element $\bar{\xi} \in F(W_0)$ definiert ein Element $\bar{\xi}^{\mathrm{an}} \in F'(W_0^{\mathrm{an}})$, welches im Kern von $F'(W_0^{\mathrm{an}}) \rightrightarrows F'(W_1^{\mathrm{an}})$ liegt. Weil die kanonische Sequenz

$$F'(R) \to F'(W_0^{\mathrm{an}}) \rightrightarrows F'(W_1^{\mathrm{an}})$$

exakt ist (vgl. 1oc. cit., Satz 5.4), gibt es daher genau ein $\xi \in F'(R)$, das auf $\bar{\xi}^{\mathrm{an}}$ abgebildet wird.

Wir behaupten, daß das Paar (R, ξ) den Funktor F' repräsentiert. Dazu haben wir zu zeigen, daß für jeden komplexen Raum T über S die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_S(T, R) \to F'(T), h \mapsto F'(h)(\xi), \tag{6.3}$$

bijektiv ist. Offenbar darf T hierzu beliebig verkleinert werden. Insbesondere dürfen wir T von vornherein als Steinsch annehmen. Sei $B = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ die Algebra der globalen Schnitte von T und $\eta' \in F'(T)$. Es ist $X^{\mathrm{an}} \times_S T = (X \otimes_A B)^{\mathrm{an}}$ nach (1.2). Indem wir T gegebenenfalls schrumpfen lassen, können wir daher wegen (5.1) erreichen, daß ein $\eta \in F(B)$ existiert mit $\eta^{\mathrm{an}} = \eta'$. Durch Basiserweiterung mit der durch η definierten Abbildung $\mathrm{Spec}\, B \to F$ erhalten wir das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "h_1"'] & V_0 \arrow[r] \arrow[d, "h_0"] & \mathrm{Spec}\, B \arrow[d] \\
W_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & W_0 \arrow[r] & F
\end{tikzcd}$$

in dem die $V_i = W_i \times_F \mathrm{Spec}\, B$ Schemata lokal von endlicher Darstellung über B sind. $V_i \rightrightarrows V_0$ ist eine étale Aguivalenzrelation mit Quotient $\mathrm{Spec}\, B$. Wegen (4.8) (3) ist folglich auch $V_1^{\mathrm{an}} \rightrightarrows V_0^{\mathrm{an}}$ eine étale Äquivalenzrelation mit Quotient T. Die Abbildung h_0^{an} definiert daher eine holomorphe

Abbildung $h\colon T \to R$, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_0^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d, "h_0^{\mathrm{an}}"'] & T \arrow[d, "h"] \\ W_0^{\mathrm{an}} \arrow[r] & R \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Betrachten wir die beiden Elemente $\eta', F'(h)(\xi) \in F'(T)$. Offenbar sind ihre Bilder in $F'(V_0^{\mathrm{an}})$ gleich. Weil $F'(T) \to F'(V_0^{\mathrm{an}})$ injektiv ist, folgt $\eta' = F'(h)(\xi)$. Dies zeigt die Surjektivität der Abbildung (6.3).

Zum Nachweis der Injektivität dürfen wir annehmen, daß T ein einpunktiger komplexer Raum ist. Seien also g, h zwei holomorphe Abbildungen von T in R mit $F'(g)(\xi) = F'(h)(\xi)$. Weil die Abbildung $W_0^{\mathrm{an}} \to R$ lokal Schnitte besitzt, lassen sich g und h zu holomorphen Abbildungen $\bar{g}, \bar{h}\colon T \to W_0^{\mathrm{an}}$ hochheben. Dann liefern die Kompositionen von $i_W \circ \bar{g}$ und $i_{W_0} \circ \bar{h}$ mit $W_0 \to F$ dieselbe Abbildung $T \to F$. Folglich gibt es eine holomorphe Abbildung $T \to W_1^{\mathrm{an}}$, deren Komposition mit den beiden Abbildungen $W_1^{\mathrm{an}} \to W_0^{\mathrm{an}}$ gerade $\bar{g}$ bzw. $\bar{H}$ ergibt. Wegen $W_1^{\mathrm{an}} = W_0^{\mathrm{an}} \times_R W_0^{\mathrm{an}}$ folgt hieraus $g = h$. $\square$

7 Der relative Riemannsche Existenzsatz

Ein Morphismus $Z' \to Z$ von Schemata (bzw. von komplexen Räumen) heißt étale-Überlagerung, wenn er endlich und étale ist. Mit $\mathrm{Et}(Z)$ werde die Kategorie der étale-Überlagerungen von Z bezeichnet.

Sei wieder S ein Steinscher Raum und $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. Wir wollen in diesem Paragraphen die étale-Überlagerungen eines A-Schemas von endlicher Darstellung mit denen des zugehörigen komplexen Raumes vergleichen. Vorbereitend zeigen wir dazu:

(7.1) Lemma. *Es sei $(X_i)_{1 \le i \le n}$ eine endliche Familie von A-Schemata von endlicher Darstellung. Für jedes Steinsche Kompaktum $K \subseteq S$ sind äquivalent:*

(a) Es gibt eine Umgebungsbasis $\mathfrak{U} = (U_\lambda)$ (aus offenen Mengen) von K derart, daß $X_i^{\mathrm{an}}|_{U_\lambda}$ irreduzibel (bzw. zusammenhängend) ist für alle i, λ.

(b) $X_i \otimes_A A_K$ ist irreduzibel (bzw. zusammenhängend) für alle i.

Beweis. Zum Nachweis der Implikation $(b) \Rightarrow (a)$. Wir betrachten zunächst die nicht eingeklammerten Aussagen. Seien also die $X_i \otimes A_K$ irreduzibel. Es sei Y_{ij}, $1 \le j \le n_i$, eine endliche offen-affin Überdeckung von X_i. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $Y_{ij} \otimes A_K \neq \varnothing$ für alle i, j. Können wir die Behauptung für die Familie Y_{ij}, $1 \le j \le n_i$, $1 \le i \le n$, zeigen, so gilt sie auch für (X_i). Wir dürfen daher voraussetzen, daß die X_i affin sind.

Durch die Betrachtung der Normalisierung von $(X_i \otimes A_K)_{\mathrm{red}}$ zeigt man, daß man zusätzlich annehmen darf, daß $X_i \otimes A_K$ normal ist für alle i.

Nach eventueller Verkleinerung von S als Umgebung von K gibt es projektive A-Schemata P_i von endlicher Darstellung und offene Einbettungen $f_i\colon X_i \to P_i$ darart, daß $P_i \otimes A_K$ und P_i^{an} normal und $f_i \otimes A_K$ dominant ist. Wegen (3.1) (6) genügt es, die Behauptung für (P_i) zu zeigen. Seien $g_i\colon P_i \to \operatorname{Spec} A$ die Strukturmorphismen, und $\mathcal{F}_i := (g_i^{\mathrm{an}})_*(\mathcal{O}_{P_i^{\mathrm{an}}})$ und $\mathcal{F}$ der kohärente $\mathcal{O}_S$-Modul $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{F}_i$. Es gibt eine Umgebungsbasis $\mathfrak{U} = (U_\lambda)_{\lambda \in I}$ von K derart, daß $\Gamma(U_\lambda, \mathcal{F}) \to \Gamma(K, \mathcal{F})$ injektiv ist für alle λ (vgl. [Fri67]). Dies bedeutet genau, daß die Homomorphismen

$$\Gamma(P_i^{\mathrm{an}}|_{U_\lambda}, \mathcal{O}_{P_i^{\mathrm{an}}|_{U_\lambda}}) \longrightarrow \Gamma(P_i^{\mathrm{an}}|_K, \mathcal{O}_{P_i^{\mathrm{an}}|_K})$$

sämtlich injektiv sind. Der rechts stehende Ring stimmt wegen (4.2) mit dem globalen Schnittring von $P_i \otimes A_K$ überein, ist also ein Integritätsring. Daher sind auch die globalen Schnittringe von $P_i^{\mathrm{an}}|_{U_\lambda}$ Integritätsringe. Es folgt, daß $P_i^{\mathrm{an}}|_{U_\lambda}$ zusammenhängend und normal, also irreduzibel ist.

Zum Beweis der eingeklammerten Aussage. Sei $X_i \otimes A_K$ zusammenhängend für $1 \leq i \leq n$. Nach eventueller Verkleinerung von S gibt es abgeschlossene A-Unterschemata von endlicher Darstellung $Y_{ij \subseteq X_i}$, $1 \leq j \leq n_i$, derart, daß die $Y_{ij} \otimes A_K$ genau die irreduziblen Komponenten von $X_i \otimes A_K$ sind. Da $X_i \otimes A_K$ zusammenhängend ist, gibt es zu je zwei Punkten $x, y \in X_i \otimes A_K$ eine Teilmenge $\{j_1, \ldots, j_m\}$ von $\{1, \ldots, n_i\}$ mit $x \in Y_{ij_1} \otimes A_K$, $y \in Y_{ij_m} \otimes A_K$ und $Y_{ij_\nu} \otimes A_K \cap Y_{ij_{\nu+1}} \otimes A_K \neq \varnothing$ für $1 \leq \nu < m$. Nach dem bereits bewiesenen Teil gibt es eine Umgebungsbasis $\mathfrak{U} = (U_\lambda)_{\lambda \in I}$ von K derart, daß $Y_{ij}^{\mathrm{an}}|_{U_\lambda}$ irreduzibel für alle j, i, λ ist. Mit (2.5) ergibt sich hieraus die Behauptung.

Schließlich folgt die Implikation $(a) \Rightarrow (b)$ ebenfalls aus (2.5). □

Aus (7.1) ergibt sich noch unmittelbar:

(7.2). Es seien (X_i) eine endliche Familie von A-Schemata von endlicher Darstellung und $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum. Dann gibt es (nach Schrumpfung von S als Umgebung von K) abgeschlossene Unterschemata von endlicher Darstellung $Y_{ij} \subseteq X_i$, $1 \leq j \leq k_i$, und eine Umgebungsbasis $\mathfrak{U} = (U_\lambda)$ von K mit:

(1) Die $Y_{ij}^{\mathrm{an}}|_{U_\lambda}$, $1 \leq j \leq k_i$, sind genau die irreduziblen Komponenten (bzw. Zusammenhangskomponenten) von $X_i^{\mathrm{an}}|_{U_\lambda}$ für alle λ.

(2) Die $Y_{ij} \otimes_A A_K$, $1 \leq j \leq k_i$, sind genau die irreduziblen Komponenten (bzw. Zusammenhangskomponenten) von $X_i \otimes_A A_K$.

Sei wieder $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum und X ein A-Schema von endlicher Darstellung. Für jede offene Steinsche Umgebung U von K hat man wegen (3.1) einen natürlichen Funktor $\operatorname{Et}(X \otimes_A A_U) \to \operatorname{Et}(X^{\mathrm{an}}|_U)$. Durch Übergang zum induktiven Limes erhalten wir den Funktor

$$\operatorname{Et}(X \otimes_A A_K) \longrightarrow \varinjlim_U \operatorname{Et}(X^{\mathrm{an}}|_U). \tag{7.3}$$

(7.4) Theorem (Relativer Riemannscher Existenzsatz). *Der Funktor (7.3) ist eine Äquivalenz von Kategorien.*

Beweis. Wir überlegen uns zunächst, daß der in Rede stehende Funktor volltreu ist, daß also für je zwei étale-Überlagerungen $X', X'' \in \mathrm{Et}(X)$ die natürliche Abbildung
(7.5)

$$\mathrm{Hom}_{X\otimes_A A_K}(X' \otimes_A A_K,\, X'' \otimes_A A_K) \longrightarrow \varinjlim_U \mathrm{Hom}_{X^{\mathrm{an}}|_U}(X'^{\mathrm{an}}|_U,\, X''^{\mathrm{an}}|_U)$$

bijektiv ist. Gemäß [EGA IV$_3$, (8.8.2)], ist die Abbildung

$$\varinjlim_U \mathrm{Hom}_{X\otimes A_U}\left(X' \otimes A_U, X'' \otimes A_U\right) \to \mathrm{Hom}_{X\otimes A_K}\left(X' \otimes A_K, X'' \otimes A_K\right)$$

bijektiv. Wir dürfen annehmen, daß $X' \otimes A_K$ zusammenhängend ist, vgl. (7.2). Dann ist die Vorgabe eines $X \otimes A_K$-Morphismus $X' \otimes A_K \to X'' \otimes A_K$ gleichwertig mit der Vorgabe einer Zusammenhangskomponente Z von $(X' \times_X X'') \otimes A_K$, für die der von der ersten Projektion induzierte Morphismus $Z \to X' \otimes A_K$ ein Isomorphismum ist. Ebebnso ist ein Element aus $\varinjlim \mathrm{Hom}_{X^{\mathrm{an}}|_U}(X'^{\mathrm{an}}|_U, X''^{\mathrm{an}}|_U)$ gegenben durch ein U, für das $X'^{\mathrm{an}}|_U$ zusammenhängend ist, und eine Zusammenhangskomponente Z von $(X'^{\mathrm{an}} \times_{X^{\mathrm{an}}} X''^{\mathrm{an}})|_U$ derart, daß die von der ersten Projektion induzierte Abblidung $Z \to X'|_U$ biholomorph ist.

Seien $u_i \in \mathrm{Hom}_X(X', X'')$, $i = 1, 2$, Morphismen mit $u_1^{\mathrm{an}} = u_2^{\mathrm{an}}$. Dann gilt für die Graphen von u_i:

$$\Gamma_{u_1}^{\mathrm{an}} = \Gamma_{u_1^{\mathrm{an}}} = \Gamma_{u_2^{\mathrm{an}}} = \Gamma_{u_2}^{\mathrm{an}}.$$

Mit (2.5) folgt $\Gamma_{u_1\otimes A_K} = \Gamma_{u_1} \otimes A_K = \Gamma_{u_2} \otimes A_K = \Gamma_{u_2\otimes A_K}$, also $u_1 \otimes A_K = u_2 \otimes A_K$. Dies zeigt die Injektivität.

Zum Nachweis der Surjektivität sei U eine Steinsche Umgebung von K derart, daß $X'^{\mathrm{an}}|_U$ zusammenhängend ist und $Z \subseteq (X'^{\mathrm{an}} \times_{X^{\mathrm{an}}} X''^{\mathrm{an}})|_U$ eine Zusammenhangskomponent der oben beschriebenen Art. Ohne Einschränkung sei $U = S$. Nach weiterer Schrumpfung von S gibt es Unterschemata von endlicher Darstellung Z_i von $X' \times_X X''$, $1 \le i \le m$, derart, daß die $Z_i \otimes A_K$ genau die Zusammenhangskomponenten von $(X' \times_X X'') \otimes A_K$ sind. Wegen (7.2) dürfen wir annehmen, daß die Z_i^{an} genau die Zusammenhangskomponenten von $X'^{\mathrm{an}} \times_{X^{\mathrm{an}}} X''^{\mathrm{an}}$ sind. Daher existiert ein i mit $Z = Z_i^{\mathrm{an}}$. Gemäß (3.1) ist dann die durch die erste Projektion induzierte Abbildung $Z_i \otimes A_K \to X' \otimes A_K$ ein Isomorphismus. Folglich gehört $Z_i \otimes A_K$ zu einem $X \otimes A_K$-Morphismus $X' \otimes A_K \to X'' \otimes A_K$.

Es bleibt nachzuweisen, daß der Funktor (7.3) im wesentlichen surjektiv ist. Sei dazu $\mathfrak{X}'$ eine étale-Überlagerung von X^{an}. Wir haben zu zeigen, daß nach Verkleinerung von S als Umgebung von K eine étale-U¨berlagerung $X' \subseteq \mathrm{Et}(X)$ existiert mit $X'^{\mathrm{an}} \cong \mathfrak{X}'$. Da der Funktor volltreu ist, ist dies ein bezüglich X locales Porblem.

Ist S klein genug, so findet man ein abgeschlossenes Unterschema von endlicher Darstellung Y von X mit $Y \otimes A_K = (X \otimes A_K)_{\mathrm{red}}$. In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Et}(X \otimes A_K) & \longrightarrow & \varinjlim_U \mathrm{Et}(X^{\mathrm{an}}|_U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Et}(Y \otimes A_K) & \longrightarrow & \varinjlim_U \mathrm{Et}(Y^{\mathrm{an}}|_U) \end{array}$$

sind dann die vertikalen Pfeile Äquivalenzen von Kategorien (vgl. (2.7) und [EGA IV$_4$, (18.1.2)]). Wir dürfen daher annehmen, daß $X \otimes A_K$ reduziert ist.

Als nächstes zeigen wir, daß man $X \otimes A_K$ sogar als normal voraussetzen kann. Nach Verkleinerung von S gibt es ein A-Schema von endlicher Darstellung $\tilde{X}$ und einen A-Morphismus $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ derart, daß $\tilde{X} \otimes A_K \to X \otimes A_K$ die Normalisierung von $X \otimes A_K$ ist. p ist ein effektiver Abstiegsmorphismus für die Kategorie der étale-Überlagerungen, vgl. [SGA 1, (IX 4.7)]. Zu $p^{\mathrm{an}*}(\mathfrak{X}'^{\mathrm{an}}) \in \mathrm{Et}(\tilde{X}^{\mathrm{an}})$ gibt es nach Annahme ein $\tilde{X}' \in \mathrm{Et}(\tilde{X})$ mit $(\tilde{X}')^{\mathrm{an}} \cong p^{\mathrm{an}*}(\mathfrak{X}'^{\mathrm{an}})$, falls S klein genug ist. Da (7.3) volltreu ist, dürfen wir annehmen, daß $\tilde{X}'$ mit einem natürlichen Abstieg versehen ist. Dies liefert ein $X' \in \mathrm{Et}(X)$ mit $p^*(X') \cong \tilde{X}'$. Nach dem analytischen Analogon zu [SGA 1, (IX 3.2)], ist $p^{\mathrm{an}} \colon \tilde{X}^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ ein Abstiegsmorphismus für die Kategorie der étale-Überlagerungen, so daß der Isomorphismus $p^{\mathrm{an}*}(X'^{\mathrm{an}}) \cong p^{\mathrm{an}*}(\mathfrak{X}'^{\mathrm{an}})$ von einem Isomorphismus $X'^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}'^{\mathrm{an}}$ herrührt.

Sei nun X affin und $X \otimes A_K$ normal. Nach Schrumpfung von S gibt es sodann ein projektives A-Schema P von endlicher Darstellung und eine offene Einbettung $X \hookrightarrow P$ derart, daß P^{an} normal und $X^{\mathrm{an}} \hookrightarrow P^{\mathrm{an}}$ dominant ist. Nach dem Theorem von Grauert–Remmert über endliche normale analytische Überlagerungen ([GR58b], vgl. auch [SGA 1, (XII 5.4)]) läßt sich $\mathfrak{X}'$ zu einer endlichen normalen Überlagerung Z von P^{an} fortsetzen. Sei $\mathcal{B}$ die Z definierende endliche $\mathcal{O}_{P^{\mathrm{an}}}$-Algebra. Gemäß (5.3) und (4.2) existiert (nach Schrumpfung von S) eine $\mathcal{O}_P$-Algebra $\mathcal{A}$, die als Modul von endlicher Darstellung ist, mit $\mathcal{A}^{\mathrm{an}} \cong \mathcal{B}$. Für $Y := \operatorname{Spec} \mathcal{A}$ gilt daher $Y^{\mathrm{an}} \cong Z$. Ist S klein genug, so ist $X' := Y|_X$ eine étale-Überlagerung von X mit $X'^{\mathrm{an}} \cong \mathfrak{X}'$. $\square$

(7.5) Aussage. *Es seien X ein A-Schema endlicher Darstellung, X' und X'' zwei endliche X-Schemata endlicher Darstellung sowie $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum. $X' \otimes_A A_K$ sei reduziert. Dann ist die natürliche Abbildung*

$$\mathrm{Hom}_{X \otimes_A A_K}(X' \otimes_A A_K, X'' \otimes_A A_K) \longrightarrow \varinjlim_U \mathrm{Hom}_{X^{\mathrm{an}}|_U}(X'^{\mathrm{an}}|_U, X''^{\mathrm{an}}|_U)$$

bijektiv.

Beweis nach einer Idee aus [Art66]. Offenbar dürfen wir annehmen, daß X und damit auch X' und X'' affin ist. Es seien B, C und D die globalen Schnittalgebren von $X \otimes A_K$, $X' \otimes A_K$ und $X'' \otimes A_K$ sowie $B^{\mathrm{an}} :=$

$\varinjlim \Gamma(X^{\mathrm{an}}|_U, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}|_U})$, und analog C^{an} und D^{an}. Es ist $C^{\mathrm{an}} = C \otimes_B B^{\mathrm{an}}$ und $D^{\mathrm{an}} = D \otimes_B B^{\mathrm{an}}$. Wir haben zu zeigen, daß die kanonische Abbildung

$$\mathrm{Hom}_B(D, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B^{\mathrm{an}}}(D^{\mathrm{an}}, C^{\mathrm{an}}), \quad u \mapsto u^{\mathrm{an}}$$

bijektiv ist. Da der Homomorphismus $C \to C^{\mathrm{an}}$ nach (5.10) treuflach, insbesondere injektiv ist, ist diese Abbildung injektiv. Zum Nachweis der Surjektivität dürfen wir voraussetzen, daß C normal ist: Sei nämlich $C \to \overline{C}$ die Normalisierung von C und die Aussage für $\overline{C}$ bereits bewiesen. Weil C^{an} eine treuflache C-Algebra ist, gibt $C^{\mathrm{an}} \cap \overline{C} = C$. Sei $v\colon D^{\mathrm{an}} \to C^{\mathrm{an}}$ ein B^{an}-Algebrahomomorphismus. $w\colon D^{\mathrm{an}} \to \overline{C}^{\mathrm{an}}$ bezeichne die Komposition von v mit $C^{\mathrm{an}} \to \overline{C}^{\mathrm{an}}$. Aufgrund unserer Annahme gibt es einen B-Algebrahomomorphismus $u\colon D \to \overline{C}$ mit $u^{\mathrm{an}} = w$. Wegen $u(D) \subseteq C^{\mathrm{an}} \cap \overline{C} = C$ induziert u einen Homomorphismus der gewünschten Art. Sei daher nun C normal. Wir dürfen ferner annehmen, daß C auch nullteilerfrei ist.

Da die Vorgabe eines B-Homomorphismus $D \to C$ gleichwertig mit der Vorgabe eines C-Homomorphismus $D \otimes_B C \to C$ ist, und da $D^{\mathrm{an}} \otimes_{B^{\mathrm{an}}} C^{\mathrm{an}} = (D \otimes_B C)^{\mathrm{an}}$ gilt, dürfen wir zusätzlich voraussetzen daß $B = C$ ist. Weiter können wir D als reduziert annehmen. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in D, so ist das Erweiterungsideal $\mathfrak{p}D^{\mathrm{an}}$ wieder prim, vgl. (7.1) und (2.7). Daher können wir D sogar als nullteilerfrei voraussetzen. Wir haben dann noch zu zeigen, daß $B \to D$ genau dann bijektiv ist, wenn dies für $B^{\mathrm{an}} \to D^{\mathrm{an}}$ gilt. Dies resultiert aus der Treuflachheit von B^{an} über B. □

(7.6) Aussage. *Es seien X ein A-Schema von endlicher Darstellung, T eine abgeschlossene konstruierbare Teilmenge von X und $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum. $X \otimes_A A_K$ sei normal und es gelte*

$$\mathrm{codim}(T \otimes_A A_K,\, X \otimes_A A_K) \geq 1.$$

Dann definiert der Funktor $X' \mapsto X' \otimes_A A_K$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie aller endlichen normalen Überlagerungen von $X \otimes_A A_K$, die außerhalb von $T \otimes_A A_K$ étale sind, und der Kategorie der Keime bezüglich K der endlichen normalen Überlagerungen von X^{an}, die außerhalb von T^{an} étale sind.

Der <u>Beweis</u> von (7.6) ist wegen (7.5) analog zu dem letzten Teil des Beweises von (7.4).

Literatur

[EGA I] A. Grothendieck und J. Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique I.* Springer, 1971.

[EGA II] A. Grothendieck und J. Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique II.* Springer, 1961.

[EGA III_1] A. Grothendieck und J. Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique III.1*. 11. 1961.

[EGA IV_1] A. Grothendieck und J. Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique IV.1*. 20. 1964.

[EGA IV_2] A. Grothendieck und J. Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique IV.2*. 24. 1965.

[EGA IV_3] A. Grothendieck und J. Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique IV.3*. 28. 1966.

[EGA IV_4] A. Grothendieck und J. Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique IV.4*. 32. 1967.

[SGA 1] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Bd. 224. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1971.

[SGA 3] *Schémas en groupes I, II, III (SGA 3)*. Bd. 151, 152, 153. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1970.

[Abh01] S. S. Abhyankar. *Local analytic geometry*. Reprint of the 1964 original. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001, S. xvi+488. URL: https://doi.org/10.1142/9789812810342.

[Art66] M. Artin. „Etale coverings of schemes over Hensel rings“. In: *Amer. J. Math.* 88 (1966), S. 915–934. URL: https://doi.org/10.2307/2373088.

[Art69] M. Artin. „Algebraization of formal moduli. I“. In: *Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira)*. Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1969, S. 21–71.

[Bin75] J. Bingener. „Divisorenklassengruppen der Komplettierungen analytischer Algebren“. In: *Math. Ann.* 217.2 (1975), S. 113–120. URL: https://doi.org/10.1007/BF01351289.

[Bin76] J. Bingener. „Holomorph-prävollständige Resträume zu analytischen Mengen in Steinschen Räumen“. In: *J. Reine Angew. Math.* 285 (1976), S. 149–171. URL: https://doi.org/10.1515/crll.1976.285.149.

[Cartan 60/61] *Séminaire Henri Cartan. 13e année: Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique*. Bd. 13. Séminaire Henri Cartan. Année 1960–1961; 2e édition corrigée. Paris: Secrétariat mathématique, 1962.

[For67] O. Forster. „Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln“. In: *Math. Z.* 97 (1967), S. 376–405. URL: https://doi.org/10.1007/BF01112815.

[Fri67] J. Frisch. „Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes“. In: *Invent. Math.* 4 (1967), S. 118–138. URL: https://doi.org/10.1007/BF01425245.

[GR58a] H. Grauert und R. Remmert. „Bilder und Urbilder analytischer Garben“. In: *Ann. of Math. (2)* 68 (1958), S. 393–443. URL: https://doi.org/10.2307/1970254.

[GR58b] H. Grauert und R. Remmert. „Komplexe Räume“. In: *Math. Ann.* 136 (1958), S. 245–318. URL: https://doi.org/10.1007/BF01362011.

[Hak72] M. Hakim. *Topos annelés et schémas relatifs*. Bd. Band 64. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, S. vi+160.

[HM68] H. Hironaka und H. Matsumura. „Formal functions and formal embeddings“. In: *J. Math. Soc. Japan* 20 (1968), S. 52–82. URL: https://doi.org/10.2969/jmsj/02010052.

[Kau66] L. Kaup. „Eine topologische Eigenschaft Steinscher Räume“. In: *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* 1966 (1966), S. 213–224.

[Kie68] R. Kiehl. „Äquivalenzrelationen in analytischen Räumen“. In: *Math. Z.* 105 (1968), S. 1–20. URL: https://doi.org/10.1007/BF01135445.

[Knu71] D. Knutson. *Algebraic spaces*. Bd. Vol. 203. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, S. vi+261.

[Köp74] U. Köpf. „Über eigentliche Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Räumen“. In: *Schr. Math. Inst. Univ. Münster (2)* (1974), S. iv+72.

[KV71] R. Kiehl und J.-L. Verdier. „Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert“. In: *Math. Ann.* 195 (1971), S. 24–50. URL: https://doi.org/10.1007/BF02059414.

[Sch61] G. Scheja. „Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen“. In: *Math. Ann.* 144 (1961), S. 345–360. URL: https://doi.org/10.1007/BF01470506.

Von Mingchen Xia als LaTeX-Version gesetzt.
xiamingchen2008@gmail.com
https://mingchenxia.github.io/.