

SCHRIFTENREIHE
DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS DER UNIVERSITÄT MÜNSTER
herausgegeben von R. Remmert

2. Serie, Heft 10

SCHEMATA ÜBER STEINSCHEN ALGEBREN

von

Jürgen Bingener

Januar 1976

Photomechanische Herstellung:
Phototechnische Zentralstelle der Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	2
§ 1. Der zu einem Schema gehörige komplexe Raum	4
§ 2. Korrespondenz algebraischer und topologischer Eigenschaften	6
§ 3. Korrespondenz bei Morphismen	10
§ 4. Vergleich der Bildgarben. Anwendung auf Gruppoide	12
§ 5. Existenzsatz. Anwendungen	18
§ 6. Modulräume	22
§ 7. Der relative Riemannsche Existenzsatz	22
Literatur	23

Einleitung

Im Jahre 1956 zeigte J.-P. Serre in seiner Arbeit „Géométrie algébrique et géométrie analytique“, daß die Theorien der kohärenten Garben über einem projektiven algebraischen \mathbb{C} -Schema X und über dem zugehörigen komplexen Raum X^{an} äquivalent sind. Dieses Resultat wurde später von A. Grothendieck auf den Fall kompletter Schemata ausgedehnt, vgl. auch [11]. In seinen Vorträgen im Séminaire H. Cartan wies dann A. Grothendieck auf die Notwendigkeit hin, eine relative Theorie der Schemata über geringsten Räumen, insbesondere über komplexen Räumen, zu entwickeln. Wesentliche Grundlage sollte dabei der Satz von H. Grauert und R. Remmert über projektive holomorphe Abbildungen [10] sein. Eine derartige Theorie würde dann insbesondere Anwendungen der problemloseren algebraischen Methoden in der analytischen Geometrie ermöglichen.

Dieses Programm ist inzwischen von M. Hakim in einem allgemeineren Rahmen zum Teil durchgeführt worden ([14]). Dabei wird allerdings ein relativ aufwendiger Begriffsapparat verwendet. Es erscheint daher insbesondere im Hinblick auf die zahlreichen Anwendungen dieser Theorie (Vergleichssatz für die de Rham-Kohomologie, verschiedene Modulprobleme bei „algebraischen“ holomorphen Abbildungen, Divisorenklassengruppen analytischer Algebren [5] usw.) sinnvoll, speziell für den Fall eines komplexen Raumes als Basisraum, einen elementareren Zugang zu diesen Ergebnissen zu geben. Genau dies ist das Ziel der vorliegenden Arbeit. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß analoge Untersuchungen im Falle der nichtarchimedischen Funktionentheorie von U. Köpf in [21] angestellt wurden.

Unsere Vorgehensweise läßt sich folgendermaßen darstellen. Sei S ein Steinscher Raum und X ein Schema lokal von endlicher Darstellung über der zu S gehörigen Steinschen Algebra $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. Diesem Schema kann man in natürlicher Weise einen komplexen Raum X^{an} über S zuordnen. In §1 sind die wichtigsten formalen Eigenschaften dieser Zuordnung zusammengestellt: Flachheit der kanonischen Abbildung $X^{\text{an}} \rightarrow X$, Verträglichkeit mit Faserprodukten und Basiserweiterungen, Skalarrestriktion usw.

In §2 werden algebraische und topologische Eigenschaften des Schemas X mit denen des zugehörigen komplexen Raumes X^{an} verglichen. Für die algebraischen Eigenschaften ergibt sich dabei ein Korrespondenzprinzip, das sich etwa folgendermaßen umreißen läßt. Sei E eine „gute“ Eigenschaft für lokale noethersche Ringe, zum Beispiel Regularität, Normalität, Reduziertheit usw. Dann gibt es zu jedem Steinschen Kompaktum $K \subseteq S$ mit Schnitttring $A_K = \Gamma(K, \mathcal{O}_S)$ nach eventueller Verkleinerung von S als Umgebung von K eine abgeschlossene Teilmenge T von X mit folgenden Eigenschaften: (1) $T \otimes_A A_K$ ist die Menge der Punkte $x \in X \otimes_A A_K$, in denen der Ring \mathcal{O}_X die Eigenschaft E nicht hat. (2) T^{an} ist die Menge der Punkte aus X^{an} , in denen $\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}$ die Eigenschaft E nicht hat. Ist X quasikompakt, so gilt darüberhinaus: Genau dann hat $X \otimes_A A_K$ die Eigenschaft E , wenn dies für den Keim von X^{an} bezüglich K gilt. Hierbei bezeichnet $T \otimes_A A_K$ das Urbild von T unter der Projektion $X \otimes_A A_K \rightarrow X$ und T^{an} das Urbild von T unter $X^{\text{an}} \rightarrow X$. Die Notwendigkeit zur Einbeziehung Steinscher Kompakta ergibt sich dabei aus der Tatsache, daß X i. a. kein lokal noethersches Schema ist, während dies für $X \otimes_A A_K$ aufgrund des Satzes von Frisch der Fall ist.

Speziell für $X = \text{Spec } A$ und $K = \{s_0\}$ mit $s_0 \in S$ erhält man das bekannte Korrespondenzprinzip in der analytischen Geometrie (siehe etwa [6]) zurück, während sich für $S = \text{Spec } \mathbb{C}$ die diesbezüglichen Ergebnisse aus [11], Exp. XII, ergeben.

In §3 vergleichen wir die Eigenschaften eines Morphismus $f : X \rightarrow Y$ von A -Schemata endlicher Darstellung mit denen der zugehörigen holomorphen Abbildung $f^{\text{an}} : X^{\text{an}} \rightarrow Y^{\text{an}}$. In §4 nun sei f eigentlich und \mathcal{F} ein quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Wir zeigen den Vergleichssatz ((4.2)): Die kanonischen Homomorphismen $R^p f_*(\mathcal{F})^{\text{an}} \rightarrow R^p f_*^{\text{an}}(\mathcal{F}^{\text{an}})$ sind bijektiv für alle p . Hierbei bezeichnet \mathcal{F}^{an} das Urbild von \mathcal{F} unter der Abbildung $X^{\text{an}} \rightarrow X$. Unter Heranziehung dieses Satzes geben wir dann einige einfache Fälle an, in denen der Funktor $X \mapsto X^{\text{an}}$ mit der Bildung von Kokernen verträglich ist.

Alsdann beweisen wir in §5 den Existenzsatz, den man folgendermaßen formulieren kann (vgl. (5.3)): Ist X ein eigentliches A -Schema von endlicher Darstellung und $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum, so ist die Kategorie der kohärenten Modul auf $X \otimes_A A_K$ äquivalent zu der Kategorie der Keime bezüglich K von kohärenten Modul auf X^{an} . Aus diesem Satz ergibt sich eine Reihe von Folgerungen, von denen nur zwei erwähnt seien. Die Picardsche Gruppe $\text{Pic}(X \otimes_A A_K)$ ist isomorph zur Gruppe der Keime bezüglich K von Isomorphieklassen von Geradenbündeln auf X^{an} (vgl. (5.4)). Der Ring der meromorphen Funktionen auf $X \otimes_A A_K$ ist kanonisch isomorph zum Ring der Keime bezüglich K von meromorphen Funktionen auf X^{an} ((5.8)). Aus dem Vergleichssatz zusammen mit dem Existenzsatz folgt sofort der obenerwähnte Satz von Grauert-Remmert über projektive holomorphe Abbildungen ((5.11)).

Es seien Y ein (nicht notwendig Steinscher) komplexer Raum und $\mathcal{S} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ eine graduierte \mathcal{O}_Y -Algebra endlichen Typs mit kohärenten homogenen Komponenten. Ähnlich wie in [13] (II) kann man \mathcal{S} ein homogenes analytisches Spektrum $X = \text{Projan } \mathcal{S}$ zuordnen. Mit dem Existenz- und Vergleichssatz folgt, daß die in loc. cit. angegebene Beschreibung der kohärenten Modul auf X durch graduierte \mathcal{S} -Modul auch in dem hier betrachteten Fall gültig bleibt (vgl. (5.12)).

In §6 wenden wir den Existenzsatz an, um aus den bekannten algebraischen Darstellbarkeitssätzen für den Hilbertschen und Picardschen Funktor ([3]) analoge Resultate im analytischen Fall abzuleiten.

Sei X wieder ein (nicht notwendig eigentliches) Schema von endlicher Darstellung über der Steinschen Algebra $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ und $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum. Im letzten Paragraphen zeigen wir, daß die Kategorie der étale-Überlagerungen von $X \otimes_A A_K$ äquivalent ist zur Kategorie der Keime bezüglich K von étale-Überlagerungen von X^{an} (Relativer Riemannscher Existenzsatz (7.4)). Der in [11], Exp. XII, für den Spezialfall $A = \mathbb{C}$ hierfür angegebene Beweis, der sich wesentlich auf den Satz von Grauert-Remmert über die Fortsetzung normaler analytischer Überlagerungen ([12], vgl. auch loc. cit.) stützt, läßt sich in die hier betrachtete allgemeine Situation übertragen.

Die Bezeichnungen übernehmen wir aus [13]; dabei brauchen Schemata gemäß neuerem Sprachgebrauch nicht mehr separiert zu sein. Ist ferner \mathfrak{a} ein Ideal der Strukturgarbe eines lokalgeringten Raumes X , so sei $D(\mathfrak{a})$ das Komplement der Nullstellenmenge $V(\mathfrak{a})$ von \mathfrak{a} in X . Für eine Teilmenge E von $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ sei analog $V(E) := V(\mathcal{O}_X E)$ und $D(E) := X \setminus V(E)$. Für einen Modul M über dem Ring A bezeichne $\mu M = \mu_A M$ die Minimalanzahl von Erzeugenden von M . Ist A noethersch, so sei $\text{Sing } A$ die Singularitätenmenge von $\text{Spec } A$.

Herr Prof. Dr. R. Remmert gab mir die Möglichkeit, die vorliegende Arbeit in dieser Schriftenreihe zu veröffentlichen. Dafür sei ihm hier besonders gedankt. Weiterhin möchte ich den Herren Professoren G. Scheja und U. Storch für ihre Unterstützung meinen herzlichen Dank aussprechen. Frau I. Plänker, Bochum, danke ich für ihre Sorgfalt bei der Anfertigung der Druckvorlagen.

§ 1. Der zu einem Schema gehörige komplexe Raum

Im folgenden sei S ein Steinscher Raum und $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ die zugehörige Steinsche Algebra. X sei ein A -Schema lokal von endlicher Darstellung. Für jeden (nicht notwendig separierten) komplexen Raum Z über S sei $F_X(Z) := \text{Hom}_A(Z, X)$ die Menge der A -Morphismen von lokalgeringten Räumen von Z in X . Man hat so einen kontravarianten Funktor F_X von der Kategorie der komplexen Räume über S in die Kategorie der Mengen definiert.

(1.1) Satz. Der Funktor F_X ist darstellbar, d. h. es gibt einen komplexen Raum X^{an} über S und einen A -Morphismus $i_X : X^{\text{an}} \rightarrow X$ derart, daß die Abbildung

$$\text{Hom}_S(Z, X^{\text{an}}) \longrightarrow \text{Hom}_A(Z, X), \quad h \mapsto i_X \circ h,$$

für jeden komplexen Raum Z über S bijektiv ist. Für $x \in X^{\text{an}}$ ist der zu i_X gehörige Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{X, i_X(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X^{\text{an}}, x}$$

flach und induziert einen Isomorphismus in den Komplettierungen. X^{an} heißt der zu X gehörige komplexe Raum.

Beweis. Gilt der Satz für X , so auch für jedes Unterschema Y von X lokal von endlicher Darstellung: Sei zunächst Y ein offenes Unterschema von X . Dann ist $i_X^{-1}(Y)$, versehen mit der von X^{an} induzierten Struktur, ein offener analytischer Unterraum von X^{an} . Offenbar besitzt $i_X^{-1}(Y)$ die Y^{an} definierende universelle Eigenschaft. Die Aussage über die Ringhomomorphismen ist ebenfalls erfüllt. Sei nun Y ein abgeschlossener Unterraum von X , definiert durch das endliche Ideal \mathfrak{a} von \mathcal{O}_X . Dann ist Y^{an} der durch das kohärente Ideal $\mathfrak{a}\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}$ definierte abgeschlossene analytische Unterraum von X^{an} . Da Komplettierung und Restklassenbildung bei noetherschen Ringen miteinander verträglich sind, ergibt sich die Aussage über die zu i_Y gehörigen Ringhomomorphismen unmittelbar aus der entsprechenden Aussage über i_X . Aus diesen beiden Spezialfällen folgt sofort der allgemeine Fall eines beliebigen Unterschemas von endlicher Darstellung.

Der Satz gilt, falls $X = \text{Spec } B$ affin ist. Nach dem Bewiesenen genügt es, den Fall eines Polynomringes $B = A[t_1, \dots, t_n]$ zu betrachten. Zu dem kanonischen A -Algebrahomomorphismus

$$A[t_1, \dots, t_n] \longrightarrow \Gamma(S \times \mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n})$$

gehört nach [13], ERRATA ET APPENDA, (I 1.8.1), ein Morphismus von lokalgeringten Räumen

$$S \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \text{Spec } A[t_1, \dots, t_n],$$

der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow & S \\ \downarrow i & & \downarrow i_S \\ X = \text{Spec } A[t_1, \dots, t_n] & \longrightarrow & \text{Spec } A \end{array}$$

kommutativ macht. Das Paar $(S \times \mathbb{C}^n, i)$ besitzt die X^{an} definierende universelle Eigenschaft. Zu zeigen bleibt die Aussage über i_X . Sei $(s, a_1, \dots, a_n) \in S \times \mathbb{C}^n$, $\mathfrak{m}(s)$ das zu s gehörige maximale Ideal von A sowie \mathfrak{M} das von $\mathfrak{m}(s)$ und $t_i - a_i$, $1 \leq i \leq n$, in $A[t_1, \dots, t_n]$ erzeugte maximale Ideal. Es ist $i_X(s, a_1, \dots, a_n) = \mathfrak{M}$. Bekanntlich ist $A_{\mathfrak{m}(s)}$ noethersch und der kanonische Homomorphismus $A_{\mathfrak{m}(s)} \rightarrow \mathcal{O}_{S, s}$ induziert einen Isomorphismus in den Komplettierungen. Wegen

$$A[t_1, \dots, t_n]_{\mathfrak{M}} = A_{\mathfrak{m}(s)}[t_1, \dots, t_n]_{(\mathfrak{m}(s), t_1 - a_1, \dots, t_n - a_n)}$$

und

$$(\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n, (s, a_1, \dots, a_n)})^\wedge = (\mathcal{O}_{S, s})^\wedge[[t_1 - a_1, \dots, t_n - a_n]]$$

gilt die entsprechende Aussage auch für die Erweiterung

$$A[t_1, \dots, t_n]_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n, (s, a_1, \dots, a_n)}.$$

Der allgemeine Fall läßt sich nun auf die behandelten Spezialfälle zurückführen: Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine offen-affine Überdeckung von X . Nach dem ersten Teil des Beweises lassen sich die X_i^{an} , $i \in I$, zu einem komplexen Raum X^{an} über S zusammenkleben, der die geforderten Eigenschaften hat. \square

Die Zuordnung $X \mapsto X^{\text{an}}$ ist funktoriell: Zu einem A -Morphismus $f : X \rightarrow Y$ gehört eine holomorphe S -Abbildung $X^{\text{an}} \rightarrow Y^{\text{an}}$, die wir mit f^{an} bezeichnen.

Der Funktor $X \mapsto X^{\text{an}}$ kommutiert mit Faserprodukten: Sind X, Y und Z drei A -Schemata lokal von endlicher Darstellung und $X \rightarrow Z, Y \rightarrow Z$ A -Morphismen, so ist

$$(X \times_Z Y)^{\text{an}} = X^{\text{an}} \times_{Z^{\text{an}}} Y^{\text{an}}.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß $X \times_Z Y$ ein Produkt von X und Y in der Kategorie der geringten Räume mit lokalen Ringen über Z ist, vgl. [13], ERRATA ET APPENDA, (I 3.2.9).

Für einen \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} setzen wir $\mathcal{F}^{\text{an}} := i_X^*(\mathcal{F})$. Wegen (1.1) ist $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\text{an}}$ ein exakter Funktor.

Wir führen noch folgende Abkürzungen ein: Ist M eine beliebige Teilmenge von S , so sei $A_M := \Gamma(M, \mathcal{O}_S)$. Für einen komplexen Raum Z über S mit Strukturmorphismus $f : Z \rightarrow S$ bezeichne $Z|_M$ den \mathbb{C} -geringten Raum $(f^{-1}(M), \mathcal{O}_Z|_{f^{-1}(M)})$. Ist M offen, so ist $Z|_M$ wieder ein komplexer Raum. Für eine beliebige Teilmenge T von Z (bzw. einen \mathcal{O}_Z -Modul \mathcal{F}) sei ebenso $T|_M := T \cap f^{-1}(M)$ (bzw. $\mathcal{F}|_M := \mathcal{F}|_{f^{-1}(M)}$).

Basiserweiterung. (1.2). Sei $S' \rightarrow S$ eine holomorphe Abbildung Steinscher Räume und $A' := \Gamma(S', \mathcal{O}_{S'})$. Für jedes A -Schema X lokal von endlicher Darstellung ist dann

$$(X \otimes_A A')^{\text{an}} = X^{\text{an}} \times_S S'.$$

Speziell gilt für einen offenen Steinschen Unterraum $U \subseteq S$

$$(X \otimes_A A_U)^{\text{an}} = X^{\text{an}}|_U.$$

Beweis. Es gibt einen natürlichen A' -Morphismus $i : X^{\text{an}} \times_S S' \rightarrow X \otimes_A A'$. Man prüft leicht, daß das Paar $(X^{\text{an}} \times_S S', i)$ die $(X \otimes_A A')^{\text{an}}$ definierende universelle Eigenschaft besitzt. \square

Skalarrestriktion. (1.3). Es sei $S' \rightarrow S$ eine holomorphe Abbildung Steinscher Räume, $A' := \Gamma(S', \mathcal{O}_{S'})$ und X' ein A' -Schema lokal von endlicher Darstellung. X' , aufgefaßt als A -Schema, werde mit X bezeichnet. Ist dann X ein A -Schema lokal von endlicher Darstellung und ist $\dim S' < \infty$, so gilt $X^{\text{an}} = X'^{\text{an}}$.

Beweis. Sei $f' : X' \rightarrow \text{Spec } A'$ der Strukturmorphismus. Zu $f' \circ i_X : X^{\text{an}} \rightarrow \text{Spec } A'$ gehört wegen $\dim S' < \infty$ eine holomorphe S -Abbildung $\varphi : X^{\text{an}} \rightarrow S'$, vgl. [7], § 1. Sei $Z \xrightarrow{g} S'$ ein komplexer Raum über S' und $\Phi : Z \rightarrow X'$ ein A' -Morphismus.

$$\begin{array}{ccc}
 & & S \\
 & & \uparrow \\
 & X^{\text{an}} & \xrightarrow{\varphi} S' \\
 & \uparrow i_X & \uparrow \\
 Z & \xrightarrow{g} & \text{Spec } A \\
 \Phi \downarrow & & \uparrow i_{S'} \\
 X' & \xrightarrow{f'} & \text{Spec } A'
 \end{array}$$

Es gibt eine holomorphe S -Abbildung $h : Z \rightarrow X^{\text{an}}$ mit $\Phi = i_X \circ h$. Aus

$$i_{S'} \circ \varphi \circ h = f' \circ i_X \circ h = f' \circ \Phi = i_{S'} \circ g$$

folgt $\varphi \circ h = g$. Daher ist h ein S' -Morphismus. Die Eindeutigkeit von h ist trivial. \square

Wir notieren die folgende für Reduktionen nützliche Variante von (1.2):

(1.4) . $f : X \rightarrow Y$ sei ein Morphismus von A -Schemata lokal von endlicher Darstellung. Dabei sei $Y = \text{Spec } B$ affin. Sei $C := \Gamma(Y^{\text{an}}, \mathcal{O}_{Y^{\text{an}}})$ die zu Y^{an} gehörige Steinsche Algebra. Dann ist $X \otimes_B C$ ein C -Schema lokal von endlicher Darstellung und es gilt

$$(X \otimes_B C)^{\text{an}} = X^{\text{an}}$$

als komplexe Räume über Y^{an} .

Beweis. Der Beweis ergibt sich leicht aus dem oben bereits verwendeten Satz von Igusa-Forster ([7] §1), wenn man noch beachtet, daß B dicht in C liegt. \square

§ 2. Korrespondenz algebraischer und topologischer Eigenschaften

Wir behalten die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus §1 bei. Sei $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum, das ist eine semianalytische kompakte Teilmenge von S , die eine Umgebungsbasis aus offenen Steinschen Mengen besitzt. Der Ring $A_K = \Gamma(K, \mathcal{O}_S)$ ist dann noethersch ([9]), ausgezeichnet ([4], §1) und Restklassenring eines regulären Ringes. Letzteres folgt aus

(2.1) Lemma. Seien Z ein Steinscher Raum, Y ein abgeschlossener Unterraum von Z und K ein Steinsches Kompaktum in Y . Dann ist K auch ein Steinsches Kompaktum in Z .

Beweis. Sei W eine offene Umgebung von K in Z . Wir wählen eine Y -offene Steinsche Menge V mit $K \subseteq V \subset\subset W$. Nach einem (bisher unveröffentlichten) Satz von A. Douady gibt es eine in Z offene Steinsche Menge U mit $U \cap Y = V$. Gemäß [16] besitzt der abgeschlossene Unterraum $U \cap Y$ von U eine Umgebungsbasis aus offenen Steinschen Mengen. Daher findet man eine offene Steinsche Menge D in U mit $U \cap Y \subseteq D \subseteq U \cap W$. Hieraus folgt die Behauptung. \square

Wir benötigen zunächst:

(2.2) . Seien $K \subseteq L$ zwei Steinsche Kompakta in S und X ein A -Schema lokal von endlicher Darstellung. Dann ist der kanonische Morphismus

$$X \otimes_A A_K \xrightarrow{i_{L,K}} X \otimes_A A_L$$

regulär.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $\text{Spec } A_K \rightarrow \text{Spec } A_L$ regulär ist. Sei dazu $\mathfrak{p} \subseteq A_K$ ein Primideal und $\mathfrak{q} := \mathfrak{p} \cap A_L$. Wir haben zu zeigen, daß $(A_K)_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}(A_K)_{\mathfrak{p}}$ (geometrisch) regulär ist. Dazu dürfen wir annehmen, daß $\mathfrak{q} = 0$ gilt. Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_S$ ein kohärentes Ideal, dessen Nullstellenmenge mit der Singularitätenmenge von S übereinstimmt und $\mathfrak{a} := \Gamma(L, \mathfrak{a})$. Dann gilt bekanntlich $V(\mathfrak{a}) = \text{Sing } A_L$ und $V(\mathfrak{a}A_K) = \text{Sing } A_K$. Da A_L ein Integritätsring ist, ist \mathfrak{a} verschieden vom Nullideal. Folglich ist $\mathfrak{a}A_K \not\subseteq \mathfrak{p}$, d. h. $(A_K)_{\mathfrak{p}}$ ist regulär.

Daß $i_{L,K}$ regulär ist, ergibt sich nun beispielsweise aus [13], (IV 6.8.3). \square

Sei \mathcal{F} ein \mathcal{O}_X -Modul. Ist $M \subseteq S$, so bezeichne $\mathcal{F} \otimes_A A_M$ das Urbild von \mathcal{F} unter der Projektion $X \otimes_A A_M \rightarrow X$. Für eine beliebige Teilmenge T von X sei $T \otimes_A A_M$ das Urbild von T in $X \otimes_A A_M$ sowie $T^{\text{an}} := i_X^{-1}(T) \subseteq X^{\text{an}}$. Mit diesen Notationen gilt

(2.3) . Sei \mathcal{F} ein endlicher quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul und E eine der folgenden Eigenschaften für endliche Modul über lokalen noetherschen Ringen:

- (1) Trivialität (d. h. Nullsein) bzw. Freiheit.
- (2) $\mu \leq n$ bzw. $\dim. \text{proj} \leq n$.
- (3) torsionslos bzw. reflexiv zu sein.
- (4) (S_n) .
- (5) $\text{coprof} \leq n$ bzw. CM-Modul.

Seien $K \subseteq L$ zwei Steinsche Kompakta. Es sei T_K die Menge der Punkte $x \in X \otimes_A A_K$, für die der \mathcal{O}_X -Modul $(\mathcal{F} \otimes_A A_K)_x$ die Eigenschaft E nicht hat, und analog T_L . Dann ist T_L abgeschlossen und es gilt

$$T_K = i_{L,K}^{-1}(T_L).$$

Beweis. Daß die Mengen T_L für die unter (1) bis (3) aufgezählten Eigenschaften abgeschlossen sind, ist klar. Für die Eigenschaften aus (4) und (5) ergibt sich die Abgeschlossenheit daraus, daß $X \otimes_A A_L$ lokal in ein reguläres Schema einbettbar ist, vgl. [13], (IV 6.11.2). Die Beziehung $T_K = i_{L,K}^{-1}(T_L)$ resultiert wegen (2.2) aus den folgenden Aussagen: Sei $B \rightarrow C$ ein lokaler Homomorphismus lokaler noetherscher Ringe derart, daß der zugehörige Morphismus $\text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } B$ regulär ist, und N ein endlicher B -Modul. Genau dann ist N Null bzw. frei, wenn dies für den C -Modul $N \otimes_B C$ gilt. Es ist $\mu_B N = \mu_C N \otimes_B C$ und $\dim. \text{proj}_B N = \dim. \text{proj}_C N \otimes_B C$. Genau dann ist N torsionslos bzw. reflexiv, wenn dies für $N \otimes_B C$ gilt. N genügt der Bedingung (S_n) dann und nur dann, wenn dies für $N \otimes_B C$ gilt ([13], (IV 6.4.2)). Es ist $\text{coprof}_B N = \text{coprof}_C N \otimes_B C$ ([13], (IV 6.3.2)). \square

Wichtiger sind die folgenden, nur für Ringe definierten Eigenschaften.

(2.4) . Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$ ein endliches Ideal und E eine der folgenden Eigenschaften für lokale noethersche Ringe bzw. für ein Ideal in einem solchen Ring.

- (1) (R_n) .
- (2) Regularität bzw. Normalität bzw. Reduziertheit.
- (3) Vollständiger Durchschnitt bzw. Gorensteinring.
- (4) $\text{ht} \geq n$.

Sei T_K die Menge der Punkte $x \in X \otimes_A A_K$, für die \mathcal{O}_X bzw. $(\mathfrak{a} \otimes_A A_K)_x$ die Eigenschaft E nicht hat, und analog T_L . Dann ist T_L abgeschlossen und es ist

$$T_K = i_{L,K}^{-1}(T_L).$$

Der Beweis von (2.4) verläuft analog zu dem Beweis von (2.3). Die Abgeschlossenheit von T_L folgt hier für die unter (1) und (2) angegebenen Eigenschaften aus der Tatsache, daß $X \otimes_A A_L$ ein ausgezeichnetes Schema ist, vgl. [13], (IV 7.8.3).

Für die Eigenschaften aus (3) genügt es, folgendes zu zeigen. Sei $B \rightarrow C$ ein flacher Homomorphismus regulärer Ringe, $\mathfrak{b} \subseteq B$ ein Ideal, $\mathfrak{r} \subseteq C$ ein $\mathfrak{b}C$ umfassendes Primideal und $\mathfrak{q} := \mathfrak{r} \cap B$. Genau dann ist $(B/\mathfrak{b})_{\mathfrak{q}}$ ein vollständiger Durchschnitt bzw. Gorensteinring, wenn dies für $(C/\mathfrak{b}C)_{\mathfrak{r}}$ gilt. Ferner ist die Menge der Primideale \mathfrak{q} , für die $(B/\mathfrak{b})_{\mathfrak{q}}$ ein vollständiger Durchschnitt bzw. Gorensteinring ist, offen in $\text{Spec } B/\mathfrak{b}$.

Dies resultiert unmittelbar aus den folgenden Tatsachen. $(B/\mathfrak{b})_{\mathfrak{q}}$ ist vollständiger Durchschnitt genau dann, wenn $\mathfrak{b}_{\mathfrak{q}}$ von einer Primfolge erzeugt werden kann. Genau dann ist $(B/\mathfrak{b})_{\mathfrak{q}}$ Gorensteinsch, wenn $\text{Ext}_B^s(B/\mathfrak{b}, B)_{\mathfrak{q}}$ als $(B/\mathfrak{b})_{\mathfrak{q}}$ -Modul frei (vom Rang 1) ist. Hierbei ist s die Höhe von $\mathfrak{b}_{\mathfrak{q}}$.

Zur späteren Verwendung zeigen wir

(2.5) . Es sei $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum. Ist dann X quasikompakt und $T \subseteq X$ konstruierbar, so sind äquivalent:

- (a) Es gibt eine offene Umgebung U von K mit $T^{\text{an}} \cap U = \emptyset$.
- (b) $T \otimes_A A_K = \emptyset$.

Beweis. Mit $f : X \rightarrow \text{Spec } A$ werde der Strukturmorphismus bezeichnet. Wir wollen uns zunächst überlegen, daß es genügt, den Fall $X = \text{Spec } A$ zu betrachten. Jedenfalls dürfen wir annehmen, daß $T = X$ affin ist. Es gilt

$$f^{\text{an}}(X^{\text{an}}) = f(X)^{\text{an}} \quad \text{sowie} \quad f \otimes_{A_K}(X \otimes A_K) = f(X) \otimes A_K.$$

Daher ist (a) gleichwertig damit, daß man S als Umgebung von K derart wählen kann, daß $f(X)^{\text{an}} = \emptyset$ ist (vgl. auch (1.2)), während (b) bedeutet, daß $f(X) \otimes A_K = \emptyset$ ist. Da $f(X)$ nach dem Konstruierbarkeitssatz von Chevalley ([13], (IV 1.8.4)) überdies eine konstruierbare Teilmenge von $\text{Spec } A$ ist, ist die gewünschte Reduktion gezeigt.

Sei nun $X = \text{Spec } A$. Es gibt endlich erzeugte Ideale $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i \subseteq A$, $1 \leq i \leq n$, mit

$$T = \bigcup_{i=1}^n V(\mathfrak{a}_i) \cap D(\mathfrak{b}_i).$$

Ohne Einschränkung sei $n = 1$. Bedingung (b) ist dann äquivalent dazu, daß $\mathfrak{b}_1 A_K \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_1 A_K}$ ist. Hingegen besagt (a), daß es eine Umgebung U von K mit $V(\mathfrak{a}_1 \mathcal{O}_U) \cap D(\mathfrak{b}_1 \mathcal{O}_U) = \emptyset$ gilt. Die Gleichwertigkeit von (a) und (b) folgt nun aus dem Nullstellensatz. \square

(2.6) Definition. Sei \mathcal{F} ein endlicher quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Eine Eigenschaft E , die für endliche Modul über lokalen noetherschen Ringen definiert ist, heißt korrespondierend für \mathcal{F} , wenn gilt: Ist $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum, so gibt es nach eventueller Verkleinerung von S als Umgebung von K eine abgeschlossene konstruierbare Menge $T \subseteq X$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $T \otimes_A A_K$ ist die Menge der Punkte x aus $X \otimes_A A_K$, in denen $(\mathcal{F} \otimes_A A_K)_x$ die Eigenschaft E nicht hat.
- (2) T^{an} ist die Menge der Punkte aus X^{an} , in denen \mathcal{F}^{an} die Eigenschaft E nicht hat.

Ist E eine Eigenschaft lokaler noetherscher Ringe, so definiert man analog, wann E korrespondierend für \mathcal{O}_X heißen soll.

Man beachte, daß T (nach eventueller Verkleinerung von S) durch $T \otimes_A A_K$ eindeutig bestimmt ist, falls X quasikompakt ist, vgl. [13], (IV 8.3.11).

Betrachten wir noch den Spezialfall $X = \text{Spec } A$. Die Vorgabe von \mathcal{F} ist dann im wesentlichen äquivalent mit der Vorgabe eines kohärenten \mathcal{O}_S -Moduls, den wir wieder mit \mathcal{F} bezeichnen wollen. E ist korrespondierend für \mathcal{F} genau dann, wenn es zu jedem Steinschen Kompaktum $K \subseteq S$ nach eventueller Verkleinerung von S ein endliches Ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (1) $V(\Gamma(K, \mathcal{I}))$ ist die Menge der Primideale $\mathfrak{q} \subseteq A_K$, für die der $(A_K)_{\mathfrak{q}}$ -Modul $\Gamma(K, \mathcal{F})_{\mathfrak{q}}$ die Eigenschaft E nicht hat.
- (2) $V(\mathcal{I})$ ist die Menge der Punkte $s \in S$, für die \mathcal{F}_s die Eigenschaft E nicht hat.

Korrespondenz algebraischer Eigenschaften. (2.7). X sei ein A -Schema lokal von endlicher Darstellung, \mathcal{F} ein endlicher quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul und $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$ ein endliches Ideal. Sei E eine der in (2.3) und (2.4) betrachteten Eigenschaften für Ringe bzw. Modul bzw. Ideale. Dann ist E korrespondierend. Ist X außerdem quasikompakt, so sind für jedes Steinsche Kompaktum $K \subseteq S$ äquivalent:

- (a) Es gibt eine offene Umgebung U von K derart, daß $X^{\text{an}}|U$ bzw. $\mathcal{F}^{\text{an}}|U$ bzw. $\mathfrak{a}^{\text{an}}|U$ die Eigenschaft E hat.
- (b) $X \otimes_A A_K$ bzw. $\mathcal{F} \otimes_A A_K$ bzw. $\mathfrak{a} \otimes_A A_K$ hat E .

Beweis. Es sei $L \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum mit $K \subseteq \overset{\circ}{L}$ sowie U eine offene Steinsche Umgebung von K mit $K \subseteq U \subseteq \overset{\circ}{L}$. Die Mengen T_L und T_K seien wie in (2.3) und (2.4) definiert. $T := T_L \otimes_{A_L} A_U$ ist eine abgeschlossene konstruierbare Teilmenge von $X \otimes_A A_U$ mit $T \otimes_A A_K = T_K$, vgl. (2.3) und (2.4). Sei $i : X^{\text{an}}|L \rightarrow X \otimes_A A_L$ der kanonische Morphismus. Dann ist $i^{-1}(T_L)$ die Menge der Punkte $x \in X^{\text{an}}|L$, für die $\mathcal{O}_{X^{\text{an}},x}$ bzw. $\mathcal{F}_x^{\text{an}}$ bzw. $\mathfrak{a}_x^{\text{an}}$ die Eigenschaft E nicht hat. Wir ersetzen nun S durch U . Dann hat T die in (2.6) angegebenen Eigenschaften. Folglich ist E korrespondierend. Schließlich ergibt sich die Gleichwertigkeit von (a) und (b) aus (2.5). \square

Wir wollen nun die Dimension eines A -Schemas mit der des assoziierten komplexen Raumes vergleichen.

(2.8) Aussage. Seien X ein eigentliches A -Schema von endlicher Darstellung und $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum. Dann gibt es (nach Schrumpfung von S) abgeschlossene konstruierbare Teilmengen T_n von X mit:

- (1) Es ist T_n^{an} die Menge der Punkte $x \in X^{\text{an}}$, für die $\dim \mathcal{O}_{X^{\text{an}},x} \geq n$ gilt.
- (2) $T_n \otimes_A A_K$ ist die Vereinigung der irreduziblen Komponenten von $X \otimes_A A_K$, deren Dimension $\geq n$ ist.

Ferner gilt für jede hinreichend kleine Umgebung U von K

$$\dim X \otimes_A A_K = \dim X^{\text{an}}|U.$$

Beweis. Wir zeigen als erstes, daß für jedes (nicht notwendig eigentliche) A -Schema X von endlicher Darstellung und jede Umgebung U von K die Ungleichung $\dim X \otimes_A A_K \leq \dim X^{\text{an}}|U$ gilt. Dazu darf man X als affin annehmen. Sei $k := \dim X \otimes_A A_K$. Es gibt nach Verkleinerung von S konstruierbare Teilmengen $X_i \subseteq X_{i+1}$ von X derart, daß

$$X_0 \otimes_A A_K < X_1 \otimes_A A_K < \cdots < X_k \otimes_A A_K$$

eine Kette von irreduziblen Mengen ist. Nach (7.1) findet man eine Umgebungsbasis (U_λ) von K derart, daß die $X_i^{\text{an}}|U_\lambda$ sämtlich irreduzibel sind. Zusammen mit (2.5) zeigt dies die Gültigkeit der obigen Ungleichung.

Sei nun X eigentlich über A . Dann gibt es eine Umgebung U von K mit $\dim X^{\text{an}}|U = \dim X^{\text{an}}|K =: l$, vgl. (3.1). Mithin existiert ein Punkt $x \in X^{\text{an}}|K$ mit $l = \dim \mathcal{O}_{X^{\text{an}},x} \leq \dim X \otimes_A A_K$. Folglich gilt $\dim X \otimes_A A_K = \dim X^{\text{an}}|U$ für hinreichend kleines U . Ist S klein genug, so gibt es abgeschlossene konstruierbare Mengen $X_i \subseteq X$, $1 \leq i \leq m$, sowie eine Umgebungsbasis (U_λ) von K dergestalt, daß die $X_i \otimes_A A_K$ (bzw. $X_i^{\text{an}}|U_\lambda$) genau die irreduziblen Komponenten von $X \otimes_A A_K$ (bzw. $X^{\text{an}}|U_\lambda$) sind, vgl. (7.2). Wir dürfen annehmen, daß S unter den U_λ vorkommt und daß $\dim X_i \otimes_A A_K = \dim X_i^{\text{an}}|U_\lambda$ ist für alle i . Man braucht dann nur noch T_n als die Vereinigung über alle X_i mit $\dim X_i \otimes_A A_K \geq n$ zu wählen. \square

Ohne Endlichkeitsvoraussetzung verliert (2.8) seine Gültigkeit, wie das folgende triviale Beispiel zeigt: $S := \mathbb{C}$ mit Koordinate z , $X := \text{Spec } A_z$ und $K := \{0\}$. Dann ist $\dim X \otimes_A A_K = 0$, aber $\dim X^{\text{an}}|U = 1$ für jede Umgebung U von 0.

Wenden wir uns nun den topologischen Eigenschaften zu.

(2.9) . Es sei X ein A -Schema lokal von endlicher Darstellung. Für jede lokal konstruierbare Teilmenge T von X gilt dann

$$\overline{T}^{\text{an}} = \overline{T^{\text{an}}}.$$

Beweis. Man darf annehmen, daß X affin ist. Sei $U \subseteq S$ ein relativkompakter offener Steinscher Unterraum. Da die Ringerweiterung $A \rightarrow A_U$ flach ist, gilt für die Projektion $p : X \otimes_A A_U \rightarrow X$ dann $p^{-1}(\overline{T}) = \overline{p^{-1}(T)} = \overline{T \otimes_A A_U}$, vgl. [13], (IV 2.3.10). Zusammen mit (1.2) zeigt dies, daß die Behauptung lokal bezüglich S ist. Mit den Resultaten aus [13] (IV 8) kann man sich nun auf den Fall beschränken, daß T offen und dicht in X ist. Wir setzen $H := X \setminus T$. Für jedes Steinsche Kompaktum $K \subseteq S$ gilt dann $\text{codim}(H \otimes_A A_K, X \otimes_A A_K) \geq 1$. Hieraus folgt $\text{codim}(H^{\text{an}}, X^{\text{an}}) \geq 1$ nach (2.7). Daher ist H^{an} nirgends dicht in X^{an} und folglich $T^{\text{an}} = X^{\text{an}} \setminus H^{\text{an}}$, wie behauptet, dicht in X^{an} . \square

Aus (2.9) zusammen mit (2.5) folgt beispielsweise:

(2.10) . X sei ein quasikompaktes A -Schema lokal von endlicher Darstellung und T eine konstruierbare Teilmenge von X . Für jedes Steinsche Kompaktum $K \subseteq S$ sind dann äquivalent:

- (a) Es gibt eine offene Umgebung U von K derart, daß $T^{\text{an}}|U$ dicht (bzw. abgeschlossen bzw. offen) in $X^{\text{an}}|U$ ist.
- (b) $T \otimes_A A_K$ ist dicht (bzw. abgeschlossen bzw. offen) in $X \otimes_A A_K$.

Wie die irreduziblen Komponenten (bzw. Zusammenhangskomponenten) eines A -Schemas mit denen des zugehörigen komplexen Raumes zusammenhängen, zeigen wir in § 7.

§ 3. Korrespondenz bei Morphismen

Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien weiter wie in § 1. Wir wollen die Eigenschaften eines Morphismus von A -Schemata mit denen der zugehörigen holomorphen Abbildung vergleichen.

(3.1) Satz (Korrespondenz bei Morphismen). X und Y seien quasikompakte A -Schemata lokal von endlicher Darstellung und $f : X \rightarrow Y$ ein A -Morphismus von endlicher Darstellung. Sei P die Eigenschaft

- (1) flach (bzw. unverzweigt bzw. étale bzw. glatt)
- (2) surjektiv (bzw. universell injektiv)
- (3) Isomorphismus (bzw. offene Einbettung bzw. abgeschlossene Einbettung bzw. Einbettung)
- (4) separiert (bzw. Monomorphismus)
- (5) eigentlich (bzw. endlich)
- (6) dominant

zu sein. Für jedes Steinsche Kompaktum $K \subseteq S$ sind dann äquivalent:

- (a) Es gibt eine offene Umgebung U von K derart, daß $f^{\text{an}}|U : X^{\text{an}}|U \rightarrow Y^{\text{an}}|U$ die Eigenschaft P hat.

(b) $f \otimes_A A_K : X \otimes_A A_K \rightarrow Y \otimes_A A_K$ hat die Eigenschaft P .

Beweis. Sei L ein Steinsches Kompaktum mit $K \subseteq \overset{\circ}{L}$. Es seien

$$\begin{aligned} i : X^{\text{an}}|L &\rightarrow X \otimes A_L, & j : Y^{\text{an}}|L &\rightarrow Y \otimes A_L, \\ i_{L,K} : X \otimes A_K &\rightarrow X \otimes A_L, & j_{L,K} : Y \otimes A_K &\rightarrow Y \otimes A_L \end{aligned}$$

die kanonischen Morphismen. Zum Nachweis der Äquivalenz von (a) und (b) dürfen wir annehmen, daß Y affin ist.

Sei P zunächst eine der in (1) angegebenen Eigenschaften und T_L die Menge aller Punkte aus $X \otimes A_L$, in denen $f \otimes A_L$ die Eigenschaft P nicht hat, und analog T_K . Gemäß [13], (IV 11.1.1) und (IV 12.1.7) ist T_L abgeschlossen in $X \otimes A_L$. Es ist $i^{-1}(T_L)$ die Menge der Punkte aus $X^{\text{an}}|L$, in denen f^{an} die Eigenschaft P nicht hat. Ferner gilt $i_{L,K}^{-1}(T_L) = T_K$, vgl. [13], (IV 17.7.1). Die Gleichwertigkeit von (a) und (b) ergibt sich nun aus (2.5).

Analog verfährt man bei der Eigenschaft „Surjektivität“.

Sei nun P die Eigenschaft, universell injektiv zu sein. Eine Abbildung von Schemata ist genau dann universell injektiv, wenn sie radizial ist, während für Abbildungen komplexer Räume die Begriffe „universell injektiv“ und „injektiv“ zusammenfallen. Mit T_L werde die Menge aller Punkte $y \in Y \otimes A_L$ bezeichnet, deren Faser $(X \otimes A_L)_y$ nicht radizial über dem Restekörper $k(y)$ ist, und analog T_K . Nach [13] (IV 9.6.1) ist T_L konstruierbar in $Y \otimes A_L$. Etwa unter Verwendung von (1.3) sieht man, daß $j^{-1}(T_L)$ genau aus den Punkten $y \in Y^{\text{an}}|L$ besteht, deren Faser X_y^{an} mindestens zweipunktig ist. Ferner ist $j_{L,K}^{-1}(T_L) = T_K$ wegen [13], (I 3.5.7) und (IV 2.6.1). Die Äquivalenz von (a) und (b) ergibt sich nun wieder aus (2.5).

Ein Morphismus von Schemata ist genau dann eine offene Einbettung, wenn er étale und radizial ist ([13], (IV 17.9.1)). Ferner ist eine Abbildung von Schemata bzw. von komplexen Räumen genau dann ein Monomorphismus, wenn die zugehörige Diagonalabbildung ein Isomorphismus ist. Hieraus ergibt sich zusammen mit dem oben Bewiesenen die Äquivalenz von (a) und (b) für die Eigenschaften „offene Einbettung“, „Isomorphismus“ und „Monomorphismus“.

Nach dem Konstruierbarkeitssatz von Chevalley ist $T := f(X)$ eine konstruierbare Menge in Y . Es ist $T^{\text{an}}|U = f^{\text{an}}|U(X^{\text{an}}|U)$ sowie $T \otimes A_K = f \otimes A_K(X \otimes A_K)$. Aus (2.10) folgt jetzt die Gleichwertigkeit von (a) und (b) für die Eigenschaft dominant zu sein.

Eine Abbildung von Schemata bzw. komplexen Räumen ist genau dann separiert, wenn die zugehörige Diagonalabbildung ein abgeschlossenes Bild hat. Die Äquivalenz von (a) und (b) für die Eigenschaft separiert zu sein, ergibt sich daher gleichfalls aus (2.10).

Sei f eigentlich. Mit dem Lemma von Chow ([13], (IV 8.10.5)) folgt, daß dann auch f^{an} eigentlich ist. Ist f sogar endlich, so ist f^{an} als eigentliche Abbildung mit endlichen Fasern ebenfalls endlich. Zusammen mit [13] (IV 8.10.5) ergibt sich hieraus die Implikation (b) \Rightarrow (a) für diese Eigenschaften. Umgekehrt werde vorausgesetzt, daß $f^{\text{an}}|U$ eigentlich ist. Ohne Einschränkung sei $U = S$. Jedenfalls ist $f \otimes A_K$ separiert. Um zu zeigen, daß $f \otimes A_K$ eigentlich ist, genügt es nachzuweisen, daß die Abbildungen

$$(X \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n) \otimes A_K \longrightarrow (Y \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n) \otimes A_K, \quad n \in \mathbb{N},$$

abgeschlossen sind (Hierbei bezeichnet $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ den n -dimensionalen affinen Raum). Dies folgt aber aus (2.10) unter Beachtung von [13], (IV 8.3.11). Sei nun $f^{\text{an}}|U$ endlich. Dann ist $f \otimes A_K$ nach dem Bewiesenen eigentlich. Unter Verwendung des Halbstetigkeitssatzes von Chevalley ([13] (IV 13.3.1)) zeigt man, daß $f \otimes A_K$ auch endliche Fasern hat. Daher ist $f \otimes A_K$ endlich.

Aus der Konstruktion von X^{an} folgt: Mit f ist auch f^{an} eine Einbettung (bzw. abgeschlossene Einbettung). Dies zeigt zusammen mit [13], (IV 8.10.5), die Gültigkeit der Implikation (b) \Rightarrow (a) für diese Eigenschaften. Umgekehrt werde angenommen, daß $f^{\text{an}}|U$ eine Einbettung (bzw. abgeschlossene Einbettung) ist. Ohne Einschränkung sei $U = S$. Nach eventueller Verkleinerung

von S als Umgebung von K dürfen wir annehmen, daß das abgeschlossene Bild $Z := \overline{f(X)}$ von X unter f ([13], (I 9.5.3)) existiert und von endlicher Darstellung über A ist. Aus der kanonischen Faktorisierung

$$X \xrightarrow{g} Z \longrightarrow Y$$

von f leitet sich eine entsprechende Faktorisierung von f^{an} ab. Wegen $g^{\text{an}}(X^{\text{an}}) = g(X)^{\text{an}}$ folgt aus (2.9), daß $g^{\text{an}}(X^{\text{an}})$ dicht in Z^{an} liegt. Nach Voraussetzung ist $g^{\text{an}}(X^{\text{an}}) = f^{\text{an}}(X^{\text{an}})$ lokal abgeschlossen in Y^{an} . Daher ist $g(X)^{\text{an}}$ offen in Z^{an} . Wegen (2.10) ist dann $g(X)$ offen in Z , falls S klein genug ist. Wir betrachten die kanonische Faktorisierung

$$X \xrightarrow{h} g(X) \longrightarrow Z$$

von g . Es ist h^{an} ein eigentlicher Monomorphismus. Daher ist auch $h \otimes A_K$ ein eigentlicher Monomorphismus, also eine abgeschlossene Einbettung. Insgesamt ist $f \otimes A_K$ eine Einbettung. War f^{an} sogar eine abgeschlossene Einbettung, so hat $f \otimes A_K$ auch ein abgeschlossenes Bild, ist also eine abgeschlossene Einbettung. \square

Bemerkungen. (1) Aus (3.1) folgt noch, daß mit f auch f^{an} die Eigenschaft P hat. Hierbei brauchen X und Y weder quasikompakt noch f von endlicher Darstellung zu sein, falls P eine der Eigenschaften aus (1) bis (5) ist.

(2) Ist $f : X \rightarrow Y$ ein lokal projektiver A -Morphismus von endlicher Darstellung, so ist auch f^{an} lokal projektiv. Umgekehrt gilt: Ist $f : X \rightarrow \text{Spec } A$ von endlicher Darstellung und ist f^{an} lokal projektiv, so sind die Morphismen $f \otimes_A \mathcal{O}_{S,s}$ projektiv für alle $s \in S$. Dies folgt leicht mit (1.2), (5.5) und (5.6).

§ 4. Vergleich der Bildgarben. Anwendung auf Gruppoide

Sei Z ein Schema (bzw. ein komplexer Raum). Mit $\text{Coh}(Z)$ werde dann die Kategorie der quasikohärenten \mathcal{O}_Z -Modul von endlicher Darstellung (bzw. kohärenten \mathcal{O}_Z -Modul) bezeichnet.

Im folgenden sei S ein Steinscher Raum und $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ die Algebra der globalen Schnitte von S . Seien X und Y A -Schemata lokal von endlicher Darstellung und $f : X \rightarrow Y$ ein A -Morphismus. Für jeden \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} und jedes $p \in \mathbb{N}$ hat man dann einen kanonischen $\mathcal{O}_{Y^{\text{an}}}$ -Homomorphismus

$$R^p f_* (\mathcal{F})^{\text{an}} \longrightarrow R^p f_*^{\text{an}} (\mathcal{F}^{\text{an}}). \quad (4.1)$$

(4.2) Theorem (Vergleichssatz). Ist f eigentlich und \mathcal{F} ein quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul, so sind die Homomorphismen (4.1) bijektiv.

Beweis. Offenbar ist die Behauptung lokal bezüglich Y . Daher dürfen wir annehmen, daß $Y = \text{Spec } B$ affin ist. Dann ist \mathcal{F} der direkte Limes seiner endlichen quasikohärenten Untermodul. Es genügt daher, (4.2) für einen endlichen Modul \mathcal{F} zu zeigen. Weil die Behauptung natürlich auch lokal bezüglich S ist, kann man sogar von vornherein voraussetzen, daß \mathcal{F} ein Modul von endlicher Darstellung ist. Dies folgt leicht unter Verwendung Steinscher Kompakta.

Wir wollen uns nun überlegen, daß es genügt, den Fall $Y = \text{Spec } A$ zu betrachten. Nehmen wir also an, daß der Satz für diesen Spezialfall bereits bewiesen ist. Es seien $C := \Gamma(Y^{\text{an}}, \mathcal{O}_{Y^{\text{an}}})$ die zu Y^{an} gehörige Steinsche Algebra, $K \subseteq Y^{\text{an}}$ ein Steinsches Kompaktum sowie $C_K := \Gamma(K, \mathcal{O}_{Y^{\text{an}}})$. Die Homomorphismen $C \rightarrow C_K$ und $B \rightarrow C_K$ sind flach und es ist $X^{\text{an}} = (X \otimes_B C)^{\text{an}}$ nach (1.4). Aufgrund unserer Annahme ist

$$R^p (f \otimes_B C)_* (\mathcal{F} \otimes_B C)^{\text{an}} = R^p (f \otimes_B C)_*^{\text{an}} ((\mathcal{F} \otimes_B C)^{\text{an}}).$$

Daher gilt

$$j^* (R^p (f \otimes_B C)_* ((\mathcal{F} \otimes_B C) \otimes_C C_K)) = R^p f_*^{\text{an}} (\mathcal{F}^{\text{an}}) | K.$$

Hierbei bezeichnet $j : K \rightarrow \text{Spec } C_K$ den kanonischen Morphismus. Es ist ferner

$$\begin{aligned} R^p f_*(\mathcal{F}) \otimes_B C_K &= R^p(f \otimes_B C_K)_*(\mathcal{F} \otimes_B C_K) \\ &= R^p(f \otimes_B C)_*(\mathcal{F} \otimes_B C) \otimes_C C_K. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} R^p f_*(\mathcal{F})^{\text{an}} | K &= j^*(R^p f_*(\mathcal{F}) \otimes_B C_K) \\ &= R^p f_*^{\text{an}}(\mathcal{F}^{\text{an}}) | K. \end{aligned}$$

Da K beliebig war, folgt die Behauptung.

Als nächstes betrachten wir den Fall, daß X ein abgeschlossenes Unterschema von $\mathbb{P}_A^r = \text{Proj } A[t_0, \dots, t_r]$ ist. Offenbar darf man annehmen, daß $X = \mathbb{P}_A^r$ ist. Wir zeigen zunächst:

(4.3) Hilfssatz. Ist Z ein Steinscher Raum, so gilt

$$\Gamma(Z \times \mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{Z \times \mathbb{P}^r}) = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \quad \text{und} \quad H^p(Z \times \mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{Z \times \mathbb{P}^r}) = 0 \quad \text{für } p > 0.$$

Beweis (Beweis von (4.3)). Sei $U_i = D_+(t_i)$ das Komplement der durch t_i definierten Hyperfläche im komplex-projektiven Raum \mathbb{P}^r , $0 \leq i \leq r$. Dann ist $\mathcal{U} = (U_i)$ eine Steinsche Überdeckung von \mathbb{P}^r . Wir überlegen uns zunächst, daß in dem augmentierten Čechkomplex

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}) \longrightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}) \longrightarrow \dots$$

die Identität nullhomotop ist.

Es sei $\pi : \mathbb{C}^{r+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^r$ die natürliche Projektion und $V_i := \pi^{-1}(U_i) = D(t_i)$. Vermittels π läßt sich $\Gamma(U_{i_0 \dots i_p}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r})$ mit der Menge derjenigen Funktionen aus $\Gamma(V_{i_0 \dots i_p}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{r+1}})$ identifizieren, die auf den Fasern von π konstant sind. Seien Λ die Menge aller $(r+1)$ -Tupel $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_r)$ mit $\lambda_i = \pm 1$, $\delta_i^{(1)}$ und $\delta_i^{(-1)}$ Zahlen mit $0 < \delta_i^{(-1)} < \delta_i^{(1)}$ und $K_i^{(\pm 1)}$ der orientierte Rand des Kreises um Null in \mathbb{C} mit Radius $\delta_i^{(\pm 1)}$. Jede in \mathbb{C}^{*r+1} holomorphe Funktion h gestattet dann die Darstellung

$$h = \sum_{M \subseteq \{0, \dots, r\}} C_M(h).$$

Hierbei ist $C_M(h)$ die durch

$$C_M(h)(t) := \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ M = \{i: \lambda_i = -1\}}} \lambda_0 \cdots \lambda_r \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^{r+1} \int_{K_0^{(\lambda_0)}} \cdots \int_{K_r^{(\lambda_r)}} \frac{h(z)}{(z_0 - t_0) \cdots (z_r - t_r)} dz_r \cdots dz_0$$

für $\delta_i^{(-1)} < |t_i| < \delta_i^{(1)}$ auf \mathbb{C}^{*r+1} definierte holomorphe Funktion. Wir notieren einige Eigenschaften von C_M (vgl. hierzu auch [1], S. 48 ff, und [22]):

- (a) Mit h ist auch $C_M(h)$ in $V_{i_0 \dots i_p}$ holomorph.
- (b) Mit h ist auch $C_M(h)$ auf den Fasern von π konstant. Ferner ist in diesem Falle $C_M(h) = 0$ für $M = \{0, \dots, r\}$.
- (c) Ist h in $V_{i_0 \dots i_p}$ holomorph und $i \notin M$, so ist $C_M(h)$ in $V_{i_0 \dots i_p}$ holomorph.

Sei nun $f = (f_{i_0 \dots i_p}) \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r})$. Zu jeder echten Teilmenge M von $\{0, \dots, r\}$ fixieren wir einen Index $i \in \{0, \dots, r\} \setminus M$. Sodann setzen wir

$$\Phi_M^p(f)_{i_0 \dots i_{p-1}} := C_M(f_{i_0 \dots i_{p-1}}) \quad \text{für } p > 0$$

und

$$\Phi_M^0(f) := C_M(f_i) \in \mathbb{C}.$$

Man prüft sofort nach, daß durch $\Phi^p := \sum_M \Phi_M^p$ eine stetige Homotopieabbildung der oben gesuchten Art definiert wird.

Im allgemeinen Fall ist $\mathcal{W} = (Z \times U_i)$ eine Steinsche Überdeckung von $Z \times \mathbb{P}^r$. Wegen $C^\bullet(\mathcal{W}, \mathcal{O}_{Z \times \mathbb{P}^r}) = C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}) \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ ist auch in dem augmentierten Komplex

$$0 \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{W}, \mathcal{O}_{Z \times \mathbb{P}^r})$$

die Identität nullhomotop. Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Leray. \square

Wir fahren im Beweis von (4.2) fort. Nach (4.2) ist $f_*^{\text{an}}(\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}) = \mathcal{O}_S$ sowie $R^p f_*^{\text{an}}(\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}) = 0$ für $p > 0$. Gemäß [13] (III 2.1), gilt eine entsprechende Aussage auch für f . Dies beweist (4.2) für $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. Durch Induktion nach r zeigen wir nun, daß (4.2) auch für $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(n)$ gilt. Der Fall $r = 0$ ist trivial. Sei $r > 0$ und $\mathfrak{a} = (A[t_0, \dots, t_r] \cdot t_r)^\sim$ das durch t_r definierte \mathcal{O}_X -Ideal. Dann ist \mathfrak{a} isomorph zu $\mathcal{O}_X(-1)$ und das durch \mathfrak{a} definierte Unterschema E ist isomorph zu \mathbb{P}_A^{r-1} . Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow 0$$

erhalten wir dann durch Tensorieren mit $\mathcal{O}_X(n)$ die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(n-1) \longrightarrow \mathcal{O}_X(n) \longrightarrow \mathcal{O}_E(n) \longrightarrow 0$$

und eine analoge Sequenz auf X^{an} . Durch Vergleich der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenzen folgt aus der Induktionsvoraussetzung, daß die Homomorphismen (4.1) genau für $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(n)$ bijektiv sind, wenn dies für $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(n-1)$ gilt. Da wir (4.2) für $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(0) = \mathcal{O}_X$ bereits gezeigt hatten, gilt (4.2) für $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Sei nun \mathcal{F} ein beliebiger endlicher quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Wir zeigen durch absteigende Induktion nach p , daß der Homomorphismus (4.1) in jedem Punkt $s \in S$ bijektiv ist. Dazu dürfen wir annehmen, daß S die endliche Einbettungsdimension m hat. Für $p > 2(m+r)$ sind dann $R^p f_*(\mathcal{F})^{\text{an}}$ und $R^p f_*^{\text{an}}(\mathcal{F}^{\text{an}})$ beide Null, so daß der Induktionsanfang gesichert ist. Nach Verkleinerung von S als Umgebung von s gibt es eine exakte Sequenz von endlichen quasikohärenten \mathcal{O}_X -Modul

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

wobei \mathcal{L} direkte Summe von Modul der Gestalt $\mathcal{O}_X(n)$ ist. Nach dem bereits Bewiesenen gilt (4.2) daher für \mathcal{L} . Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} R^p f_*(\mathcal{R})^{\text{an}} & \longrightarrow & R^p f_*(\mathcal{L})^{\text{an}} & \longrightarrow & R^p f_*(\mathcal{F})^{\text{an}} & \longrightarrow & R^{p+1} f_*(\mathcal{R})^{\text{an}} & \longrightarrow & R^{p+1} f_*(\mathcal{L})^{\text{an}} \\ \varepsilon_1 \downarrow & & \varepsilon_2 \downarrow & & \varepsilon_3 \downarrow & & \varepsilon_4 \downarrow & & \varepsilon_5 \downarrow \\ R^p f_*^{\text{an}}(\mathcal{R}^{\text{an}}) & \longrightarrow & R^p f_*^{\text{an}}(\mathcal{L}^{\text{an}}) & \longrightarrow & R^p f_*^{\text{an}}(\mathcal{F}^{\text{an}}) & \longrightarrow & R^{p+1} f_*^{\text{an}}(\mathcal{R}^{\text{an}}) & \longrightarrow & R^{p+1} f_*^{\text{an}}(\mathcal{L}^{\text{an}}) \end{array}$$

in dem ε_4 nach Induktionsvoraussetzung und ε_2 und ε_5 nach dem Bewiesenen bijektiv sind. Nach dem Fünfer-Lemma ist dann auch ε_3 surjektiv. Da dies für jedes \mathcal{F} gilt, ist auch ε_1 surjektiv. Eine nochmalige Anwendung des Fünfer-Lemmas zeigt, daß ε_3 auch injektiv und damit bijektiv ist. Damit ist (4.2) für ein projektives A -Schema X bewiesen.

Wir betrachten nun den Fall, daß X eigentlich über $\text{Spec } A$ liegt. Es genügt zu zeigen, daß die Homomorphismen

$$R^p f_*(\mathcal{F})_s^{\text{an}} \longrightarrow R^p f_*^{\text{an}}(\mathcal{F}^{\text{an}})_s \tag{4.4}$$

für jedes $s \in S$ bijektiv sind. Der natürliche Funktor

$$\varinjlim_{U \ni s} \text{Coh}(X \otimes_A A_U) \longrightarrow \text{Coh}(X \otimes_A \mathcal{O}_{S,s})$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien ([13], (IV 8.5.2)). Ferner gilt

$$R^p f_* (\mathcal{F})_s^{\text{an}} = H^p(X, \mathcal{F}) \otimes_A \mathcal{O}_S = H^p(X \otimes_A \mathcal{O}_S, \mathcal{F} \otimes_A \mathcal{O}_S).$$

Die obigen Homomorphismen hängen daher nur von dem $\mathcal{O}_{X \otimes_A \mathcal{O}_S}$ -Modul $\mathcal{F} \otimes_A \mathcal{O}_S$ ab.

Sei $K_s = \text{Coh}(X \otimes_A \mathcal{O}_S)$ die Kategorie der kohärenten Modul auf $X \otimes_A \mathcal{O}_S$ und K'_s die volle Unterkategorie von K_s , die aus allen kohärenten Modul besteht, für die eine offene Umgebung U von s und eine Liftung zu einem kohärenten Modul auf $X \otimes_A A_U$ existieren, für den die Homomorphismen (4.4) bijektiv sind. Jeder direkte Summand eines Moduls aus K'_s gehört wieder zu K_s . Wir haben zu zeigen, daß $K'_s = K_s$ ist. Weil K'_s eine exakte Unterkategorie von K_s ist, können wir dazu das „Lemme de dévissage“ ([13](III 3.1)) heranziehen. Es genügt also zu zeigen: Zu jeder abgeschlossenen irreduziblen Teilmenge Y_s von $X \otimes_A \mathcal{O}_S$ existiert ein kohärenter Modul $\mathcal{G}_s \in K'_s$, dessen Träger mit Y_s übereinstimmt. Dazu dürfen wir annehmen, daß $X \otimes_A \mathcal{O}_S$ irreduzibel ist und daß $Y_s = X \otimes_A \mathcal{O}_S$ ist.

Nach dem Lemma von Chow ([13](II 5.6.2)) in Verbindung mit den Resultaten aus [13](IV 8) gibt es (nach eventueller Verkleinerung von S als Umgebung von s) ein projektives A -Schema X' endlicher Darstellung und einen projektiven und surjektiven A -Morphismus $g : X' \rightarrow X$. Wir dürfen ferner annehmen, daß für genügend großes n

$$R^p g_* (\mathcal{O}_{X'}(n)) = 0 \quad \text{für alle } p > 0 \tag{4.5}$$

gilt. Sei $\mathcal{G} := g_* (\mathcal{O}_{X'}(n))$. Dann hat

$$\mathcal{G} \otimes_A \mathcal{O}_S = (g \otimes_A \mathcal{O}_S)_* (\mathcal{O}_{X' \otimes_A \mathcal{O}_S}(n))$$

den Träger $X \otimes_A \mathcal{O}_S$. Es genügt zu zeigen, daß $\mathcal{G} \otimes_A \mathcal{O}_S$ in K'_s liegt. Zunächst einmal sind die natürlichen Homomorphismen

$$H^p(X \otimes_A \mathcal{O}_S, (g \otimes_A \mathcal{O}_S)_* (\mathcal{O}_{X' \otimes_A \mathcal{O}_S}(n))) \longrightarrow H^p(X' \otimes_A \mathcal{O}_S, \mathcal{O}_{X' \otimes_A \mathcal{O}_S}(n)),$$

$p \geq 0$, bijektiv wegen (4.5) (vgl. hierzu [13], (II 12.1.7)). Da g projektiv ist, folgt aus (4.5) zusammen mit dem bereits Bewiesenen, daß

$$R^p g_*^{\text{an}} (\mathcal{O}_{X'^{\text{an}}}(n)) = 0 \quad \text{für alle } p > 0$$

ist. Mithin degeneriert die Leraysche Spektralsequenz

$$R^p f_*^{\text{an}} (R^q g_*^{\text{an}} (\mathcal{O}_{X'^{\text{an}}}(n))) \implies R^{p+q} (f^{\text{an}} \circ g^{\text{an}})_* (\mathcal{O}_{X'^{\text{an}}}(n)),$$

so daß man natürliche Isomorphismen

$$R^p f_*^{\text{an}} (g_*^{\text{an}} (\mathcal{O}_{X'^{\text{an}}}(n))) \longrightarrow R^p (f \circ g)_*^{\text{an}} (\mathcal{O}_{X'^{\text{an}}}(n))$$

hat. Da $f \circ g$ projektiv ist, sind die Homomorphismen

$$H^p(X' \otimes_A \mathcal{O}_S, \mathcal{O}_{X' \otimes_A \mathcal{O}_S}(n)) \longrightarrow R^p (f \circ g)_*^{\text{an}} (\mathcal{O}_{X'^{\text{an}}}(n))_s, \quad p \geq 0,$$

bijektiv. Wegen $g_*^{\text{an}} (\mathcal{O}_{X'^{\text{an}}}(n)) = \mathcal{G}^{\text{an}}$ ist daher

$$H^p(X \otimes_A \mathcal{O}_S, \mathcal{G} \otimes_A \mathcal{O}_S) \longrightarrow R^p f_*^{\text{an}} (\mathcal{G}^{\text{an}})_s$$

bijektiv für alle $p \geq 0$. □

(4.6) Korollar. Es seien X ein A -Schema von endlicher Darstellung und \mathcal{F}, \mathcal{G} endliche quasikohärente \mathcal{O}_X -Modul derart, daß der Durchschnitt ihrer Träger eigentlich über $\text{Spec } A$ liegt. Für jedes Steinsche Kompaktum $K \subseteq S$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann kanonische Isomorphismen

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_{X \otimes_A A_K}}^n(X \otimes_A A_K; \mathcal{F} \otimes_A A_K, \mathcal{G} \otimes_A A_K) \longrightarrow \varinjlim_U \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X^{\text{an}}|U}}^n(X^{\text{an}}|U, \mathcal{F}^{\text{an}}|U, \mathcal{G}^{\text{an}}|U).$$

Hierbei durchlaufe U das System der offenen Steinschen Umgebungen von K . Speziell ist der natürliche Homomorphismus

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X \otimes_A A_K}}(\mathcal{F} \otimes_A A_K, \mathcal{G} \otimes_A A_K) \longrightarrow \varinjlim_U \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X^{\text{an}}|U}}(\mathcal{F}^{\text{an}}|U, \mathcal{G}^{\text{an}}|U)$$

bijektiv.

Beweis. Man darf annehmen, daß \mathcal{F} lokal bezüglich X eine Auflösung durch endliche freie Modul besitzt. Wie im Beweis von [13], (0 12.3.5), folgt dann, daß die Homomorphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^\bullet(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \otimes A_K &\longrightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X \otimes_A A_K}}^\bullet(\mathcal{F} \otimes A_K, \mathcal{G} \otimes A_K) \\ \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^\bullet(\mathcal{F}, \mathcal{G})^{\text{an}} &\longrightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}}^\bullet(\mathcal{F}^{\text{an}}, \mathcal{G}^{\text{an}}) \end{aligned}$$

bijektiv sind. Wir betrachten die Spektralsequenzen

$$\begin{aligned} H^p(X \otimes A_K, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X \otimes_A A_K}}^q(\mathcal{F} \otimes A_K, \mathcal{G} \otimes A_K)) &\implies \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X \otimes_A A_K}}^{p+q}(X \otimes A_K; \mathcal{F} \otimes A_K, \mathcal{G} \otimes A_K) \\ \varinjlim_U H^p(X^{\text{an}}|U, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X^{\text{an}}|U}}^q(\mathcal{F}^{\text{an}}|U, \mathcal{G}^{\text{an}}|U)) &\implies \varinjlim_U \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X^{\text{an}}|U}}^{p+q}(X^{\text{an}}|U; \mathcal{F}^{\text{an}}|U, \mathcal{G}^{\text{an}}|U). \end{aligned}$$

Offenbar genügt es zu zeigen, daß die natürlichen Homomorphismen zwischen den $E_2^{p,q}$ -Termen bijektiv sind. Etwas allgemeiner gilt: Ist \mathcal{F} ein endlicher quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul, dessen Träger eigentlich über $\text{Spec } A$ liegt, so gibt es kanonische Isomorphismen

$$H^p(X \otimes A_K, \mathcal{F} \otimes A_K) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_U H^p(X^{\text{an}}|U, \mathcal{F}^{\text{an}}|U), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Ohne Einschränkung sei dazu \mathcal{F} ein Modul endlicher Darstellung. Sei \mathfrak{a} der Annulator von \mathcal{F} und Z das durch \mathfrak{a} definierte Unterschema von X . Durch Schrumpfung von S können wir erreichen, daß Z von endlicher Darstellung ist. Indem wir X durch Z ersetzen, dürfen wir schließlich voraussetzen, daß X eigentlich über $\text{Spec } A$ liegt.

Nach (4.2) ist jedenfalls $R^p f_*(\mathcal{F})^{\text{an}} \rightarrow R^p f_*^{\text{an}}(\mathcal{F}^{\text{an}})$ bijektiv. Zusammen mit

$$\Gamma(K, R^p f_*(\mathcal{F})^{\text{an}}) = \Gamma(\text{Spec } A_K, R^p(f \otimes A_K)_*(\mathcal{F} \otimes A_K)) = H^p(X \otimes A_K, \mathcal{F} \otimes A_K)$$

und

$$\Gamma(K, R^p f_*^{\text{an}}(\mathcal{F}^{\text{an}})) = \varinjlim_U \Gamma(U, R^p f_*^{\text{an}}(\mathcal{F}^{\text{an}})) = \varinjlim_U H^p(X^{\text{an}}|U, \mathcal{F}^{\text{an}}|U)$$

liefert dies die gewünschten Isomorphismen. □

(4.7) Korollar. Unter den Voraussetzungen von (4.2) ist der kanonische Homomorphismus zwischen der algebraischen und analytischen de-Rham-Kohomologie

$$R^p f_*(\Omega_{X/Y}^\bullet)^{\text{an}} \longrightarrow R^p f_*^{\text{an}}(\Omega_{X^{\text{an}}/Y^{\text{an}}}^\bullet), \quad p \in \mathbb{N},$$

bijektiv.

Der Beweis ergibt sich sofort aus der Hyperkohomologiespektralsequenz

$$R^q f_*(\Omega_{X/Y}^p) \implies R^{p+q} f_*(\Omega_{X/Y}^\bullet)$$

und der analogen Spektralsequenz auf Y^{an} .

Für die anschließenden Betrachtungen ist es zweckmäßig, die in §1 gegebene Definition des assoziierten komplexen Raumes wie folgt zu verallgemeinern. Sei \mathbb{K} die Kategorie derjenigen A -Schemata X , für die eine offene Steinsche Überdeckung (U_i) von S so existiert, daß $X \otimes_A A_{U_i}$ lokal von endlicher Darstellung über A_{U_i} ist für alle i . Wegen (1.2) kann man einem solchen Schema X in natürlicher Weise einen komplexen Raum zuordnen, den wir wieder mit X^{an} bezeichnen. Die bis hierhin gewonnenen Resultate gelten mutatis mutandis auch für die Schemata aus \mathbb{K} .

Wir wollen einige einfache Fälle angeben, in denen der Funktor $X \mapsto X^{\text{an}}$ mit der Bildung von Kokernen verträglich ist. Dabei beschränken wir uns von vornherein auf \mathbb{K} -Gruppoide.

Wir erinnern zunächst an einige diesbezügliche Definitionen, vgl. [8], Exp. V. Ein Gruppoid ist eine Kategorie, deren Objekte eine Menge bilden und deren Morphismen Isomorphismen sind. Sei X_0 die Objektmenge und X_1 die Menge aller Morphismen eines Gruppoids. Man hat dann die Abbildungen $d_0, d_1 : X_1 \rightarrow X_0$, die einem Morphismus $a \rightarrow b$ das Ziel b bzw. die Quelle a zuordnen, sowie die Multiplikation

$$d'_1 : (X_1, d_1) \times_{X_0} (X_1, d_0) = X_1 \times_{X_0} X_1 \rightarrow X_1,$$

die einem Paar von Morphismen $(b \rightarrow c, a \rightarrow b)$ das Produkt $a \rightarrow c$ zuordnet, ferner das „Einselement“ $e : X_0 \rightarrow X_1$, das einem Objekt a die Identität von a zuordnet, und die Symmetrieabbildung $s : X_1 \rightarrow X_1$, die einem Morphismus den inversen Morphismus zuordnet.

Sei nun C eine Kategorie mit Produkten und Faserprodukten. Ein Paar

$$X_* = \left(X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} X_0, d'_1 \right),$$

bestehend aus Morphismen $d_0, d_1 : X_1 \rightarrow X_0$ und $d'_1 : X_1 \times_{X_0} X_1 \rightarrow X_1$ in C , heißt C -Gruppoid, wenn gilt: Für jedes $T \in C$ ist $X_0(T)$ bzw. $X_1(T)$ die Menge der Objekte bzw. Morphismen eines Gruppoids $X_*(T)$ mit Zielabbildung $d_0(T)$ und Quellabbildung $d_1(T)$. Hierbei bezeichnet wie üblich $X_0(T)$ die Menge $\text{Hom}(T, X_0)$ und $d_0(T)$ die durch d_0 induzierte Abbildung $X_1(T) \rightarrow X_0(T)$ usw.

In einem C -Gruppoid X_* läßt sich in natürlicher Weise ein Einselement $e : X_0 \rightarrow X_1$ sowie eine Symmetrieabbildung $s : X_1 \rightarrow X_1$ definieren. Ein Gruppoid X_* heißt eine Äquivalenzrelation mit dem Graphen X_1 , wenn $(d_0, d_1) : X_1 \rightarrow X_0 \times X_0$ ein Monomorphismus ist.

Wichtige Beispiele von C -Gruppoide gewinnt man wie folgt aus den Gruppenoperationen. Dabei wollen wir voraussetzen, daß in C beliebige, mit Faserprodukten verträgliche, direkte Summen und Zusammenhangskomponenten existieren. Die Gruppe G operiere auf $X_0 \in C$ als Gruppe von Automorphismen. Wir setzen

$$X_1 = \coprod_{\sigma \in G} X_\sigma \quad \text{mit} \quad X_\sigma = X_0 \text{ für alle } \sigma \in G.$$

i_σ bezeichne die kanonische Abbildung $X_\sigma \rightarrow X_1$. Die Abbildungen d_1, d_0 seien definiert durch $d_1 \circ i_\sigma = \text{id}_{X_\sigma}$, $d_0 \circ i_\sigma = \sigma$ für $\sigma \in G$. Es ist $X_1 \times_{X_0} X_1 = \coprod_{\sigma, \tau \in G} X_{\sigma, \tau}$ mit $X_{\sigma, \tau} = X_0$ für alle σ, τ . Die Abbildung d'_1 werde definiert durch $d'_1|_{X_{\sigma, \tau}} = i_{\sigma\tau}$. Dann ist $(X_1 \rightrightarrows X_0, d'_1)$ ein C -Gruppoid. Genau dann ist dies eine Äquivalenzrelation, wenn G fixpunktfrei operiert, d. h. die Operation von G auf der Menge $X_0(T)$ ist fixpunktfrei für alle $T \in C$.

Sei nun $Z \in \mathbb{K}$ und $X_* = (X_1 \rightrightarrows X_0, d'_1)$ ein (\mathbb{K}/Z) -Gruppoid. Weil man Gruppoide durch kommutative und kartesische Diagramme charakterisieren kann, vgl. [8] (V 1), ist dann $X_*^{\text{an}} = (X_1^{\text{an}} \rightrightarrows X_0^{\text{an}}, d_1^{\text{an}})$ ein Gruppoid in der Kategorie der komplexen Räume über Z^{an} . Ist X_* eine Äquivalenzrelation, so auch X_*^{an} , vgl. (3.1).

(4.8) Satz. Es seien Z ein Schema aus \mathbb{K} und $X_* = (X_1 \rightrightarrows X_0, d'_1)$ ein (\mathbb{K}/Z) -Gruppoid. Eine der drei folgenden Voraussetzungen sei erfüllt:

- (1) d_1 ist endlich und lokalfrei und für jedes $x \in X_0$ ist $d_0(d_1^{-1}(x))$ in einer offenen affinen Teilmenge von X_0 enthalten.
- (2) X_0 ist von endlicher Darstellung und quasiprojektiv über Z , d_1 ist von endlicher Darstellung, eigentlich und flach, und $(d_0, d_1) : X_1 \rightarrow X_0 \times_Z X_0$ ist quasiendlich.
- (3) $X_1 \rightrightarrows X_0$ ist eine effektive étale Äquivalenzrelation ([20]).

Dann existiert der Kokern (Y, p) von (d_0, d_1) in (\mathbb{K}/Z) und $(Y^{\text{an}}, p^{\text{an}})$ ist der Kokern von $(d_0^{\text{an}}, d_1^{\text{an}})$ sogar in der Kategorie aller geringten Räume.

Beweis. Sei (1) erfüllt. Nach [8] (V 4.1) ist der Kokern (Y, p) von (d_0, d_1) in der Kategorie aller geringten Räume ein Z -Schema und $p : X_0 \rightarrow Y$ ist ganz. Da die Situation mit flachen Basiserweiterungen $Z' \rightarrow Z$ verträglich ist, folgt unter Verwendung Steinscher Kompakta, daß Y in (\mathbb{K}/Z) liegt, und daß $p^{\text{an}} : X_0^{\text{an}} \rightarrow Y^{\text{an}}$ endlich und surjektiv ist. Weil Y als topologischer Raum Quotient der durch d_0, d_1 auf X_0 definierten Äquivalenzrelation ist, gilt daher die analoge Aussage auch für Y^{an} . Sei $h := p \circ d_0 = p \circ d_1$.

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow p_*(\mathcal{O}_{X_0}) \rightrightarrows h_*(\mathcal{O}_{X_1})$$

ist eine exakte Sequenz von quasikohärenten \mathcal{O}_Y -Algebren. Aus dieser Sequenz erhalten wir, da $Y^{\text{an}} \rightarrow Y$ flach ist, die exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{Y^{\text{an}}}$ -Algebren

$$\mathcal{O}_{Y^{\text{an}}} \longrightarrow p_*(\mathcal{O}_{X_0})^{\text{an}} \rightrightarrows h_*(\mathcal{O}_{X_1})^{\text{an}}.$$

Nach (4.2) gilt $p_*(\mathcal{O}_{X_0})^{\text{an}} = p_*^{\text{an}}(\mathcal{O}_{X_0^{\text{an}}})$ und analog für h . Die Behauptung folgt nun aus der Konstruktion des Kokerns in der Kategorie der geringten Räume.

Der Beweis von (4.8) unter der Voraussetzung (2) verläuft analog. Man hat diesmal [8], (V 7.1) und (V 9), heranzuziehen.

Sei nun (3) erfüllt und (Y, p) der Kokern von (p_0, p_1) in der Kategorie der Schemata. Nach [20], S. 75, ist dann $p : X_0 \rightarrow Y$ étale und surjektiv und es ist $X_1 = X_0 \times_Y X_0$. Ferner liegt Y in (\mathbb{K}/Z) , wie aus [13], (IV 17.7.5), folgt. Da $X_0^{\text{an}} \rightarrow Y^{\text{an}}$ ein surjektiver lokaler Isomorphismus ist, resultiert die Behauptung beispielsweise aus [18], Folgerung 3.5. \square

Aus (4.8) folgt unmittelbar

(4.9) Korollar. Sei X ein Schema aus \mathbb{K} und G eine endliche Untergruppe von $\text{Aut}_A X$ derart, daß jede Bahn in einer offenen affinen Teilmenge von X enthalten ist. Dann existiert der Quotient X/G in \mathbb{K} und es gilt

$$(X/G)^{\text{an}} = X^{\text{an}}/G.$$

§ 5. Existenzsatz. Anwendungen

Wir kommen nun zum Hauptergebnis dieser Arbeit, dem Existenzsatz, welcher besagt, daß über einer Steinschen Algebra die Funktoren $X \mapsto X^{\text{an}}$ und $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\text{an}}$ Äquivalenzen liefern.

(5.1) Theorem (Existenzsatz). Sei S ein Steinscher Raum, $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ und X ein über $\text{Spec } A$ projektives Schema. Dann ist der Funktor

$$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}^{\text{an}}$$

eine Äquivalenz von der Kategorie der kohärenten \mathcal{O}_X -Moduln auf die Kategorie der kohärenten $\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}$ -Moduln. Ferner ist die natürliche Abbildung

$$\text{Spec } A \longleftarrow X : X^{\text{an}} \longrightarrow S$$

verträglich mit der zugehörigen Funktorbildung, d. h. der Funktor $X \mapsto X^{\text{an}}$ ist eine Äquivalenz von der Kategorie der über $\text{Spec } A$ projektiven Schemata auf die Kategorie der über S projektiven komplexen Räume.

Der Beweis dieses Satzes wird über mehrere Schritte und Hilfssätze geführt. Wir beweisen zunächst die Aussage für $X = \mathbb{P}_A^r$.

(5.2) Hilfssatz. Sei S ein Steinscher Raum, $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ und $r \geq 0$. Dann ist der Funktor

$$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}^{\text{an}}$$

von der Kategorie der kohärenten $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}$ -Moduln in die Kategorie der kohärenten $\mathcal{O}_{(\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}}$ -Moduln volltreu.

Beweis. Seien \mathcal{F}, \mathcal{G} kohärente $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}$ -Moduln. Wir haben zu zeigen, daß die natürliche Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{(\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}}}(\mathcal{F}^{\text{an}}, \mathcal{G}^{\text{an}})$$

bijektiv ist. Es ist

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \Gamma(\mathbb{P}_A^r, \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$$

und entsprechend

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{(\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}}}(\mathcal{F}^{\text{an}}, \mathcal{G}^{\text{an}}) = \Gamma((\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}, \mathcal{H}om(\mathcal{F}^{\text{an}}, \mathcal{G}^{\text{an}})).$$

Wegen $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})^{\text{an}} = \mathcal{H}om(\mathcal{F}^{\text{an}}, \mathcal{G}^{\text{an}})$ (vgl. [13], (I 9.4.6)) und (4.6) gilt

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbb{P}_A^r, \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})) &= \Gamma(S, \pi_* \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})) = \Gamma(S, \pi_*^{\text{an}} \mathcal{H}om(\mathcal{F}^{\text{an}}, \mathcal{G}^{\text{an}})) \\ &= \Gamma((\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}, \mathcal{H}om(\mathcal{F}^{\text{an}}, \mathcal{G}^{\text{an}})), \end{aligned}$$

wobei $\pi : \mathbb{P}_A^r \rightarrow \text{Spec } A$ die Strukturabbildung bezeichnet. Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

(5.3) Hilfssatz. Sei S ein Steinscher Raum, $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, $r \geq 0$ und \mathcal{G} ein kohärenter $\mathcal{O}_{(\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}}$ -Modul. Dann existiert ein kohärenter $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}$ -Modul \mathcal{F} mit $\mathcal{F}^{\text{an}} \cong \mathcal{G}$.

Beweis. Wir verwenden die Twistgarben $\mathcal{O}(n)$ auf \mathbb{P}_A^r bzw. $(\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}$. Nach dem Verschwindungssatz von Cartan-Serre [9], Théorème B, und der Endlichkeit der höheren direkten Bilder [10] gilt: Es existiert $n_0 \geq 0$ derart, daß für alle $n \geq n_0$ gilt:

- (i) $R^q \pi_*^{\text{an}}(\mathcal{G}(n)) = 0$ für $q \geq 1$;
- (ii) $\pi_*^{\text{an}}(\mathcal{G}(n))$ ist ein kohärenter \mathcal{O}_S -Modul;
- (iii) $\mathcal{G}(n)$ wird von globalen Schnitten erzeugt.

Sei $n \geq n_0$ fest. Dann existieren ganze Zahlen $N, M \geq 0$ und eine exakte Sequenz

$$\mathcal{O}_{(\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}}(-n)^M \longrightarrow \mathcal{O}_{(\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}}(-n)^N \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0.$$

Diese Sequenz wird nach (5.2) durch eine entsprechende exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}$ -Moduln induziert. Sei \mathcal{F} deren Kokern. Dann gilt $\mathcal{F}^{\text{an}} \cong \mathcal{G}$.

Genauer: Wegen der Globalerzeugtheit existiert eine surjektive Abbildung $\mathcal{O}_{(\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}}(-n)^N \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$. Der Kern ist wieder kohärent, und nach Iteration des Arguments erhalten wir die genannte Sequenz. Da der Funktor $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\text{an}}$ exakt ist, folgt aus der Konstruktion $\mathcal{F}^{\text{an}} \cong \mathcal{G}$. \square

Aus (5.2) und (5.3) ergibt sich der Existenzsatz für $X = \mathbb{P}_A^r$:

(5.4) Korollar. Sei S ein Steinscher Raum, $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ und $r \geq 0$. Dann ist der Funktor

$$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}^{\text{an}}$$

eine Äquivalenz von der Kategorie der kohärenten $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}$ -Moduln auf die Kategorie der kohärenten $\mathcal{O}_{(\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}}$ -Moduln.

Wir beweisen nun den Existenzsatz für beliebige projektive Schemata über $\text{Spec } A$.

(5.5) Beweis von (5.1). Sei X projektiv über $\text{Spec } A$, also $X \hookrightarrow \mathbb{P}_A^r$ eine abgeschlossene Immersion für ein geeignetes r . Dann ist auch $X^{\text{an}} \hookrightarrow (\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}$ eine abgeschlossene Immersion.

Volltreueheit: Seien \mathcal{F}, \mathcal{G} kohärente \mathcal{O}_X -Moduln. Wir betrachten sie via i_* als kohärente $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}$ -Moduln (wobei $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}_A^r$). Es ist

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}}(i_*\mathcal{F}, i_*\mathcal{G}).$$

Nach (5.2) gilt

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}}(i_*\mathcal{F}, i_*\mathcal{G}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{(\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}}}((i_*\mathcal{F})^{\text{an}}, (i_*\mathcal{G})^{\text{an}}).$$

Da $(i_*\mathcal{F})^{\text{an}} = i_*^{\text{an}}(\mathcal{F}^{\text{an}})$ nach (4.2), folgt die Volltreueheit.

Wesentliche Surjektivität: Sei \mathcal{G} ein kohärenter $\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}$ -Modul. Setze $\mathcal{G}' = i_*^{\text{an}}\mathcal{G}$; dies ist ein kohärenter $\mathcal{O}_{(\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}}$ -Modul. Nach (5.3) existiert ein kohärenter $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}$ -Modul \mathcal{F}' mit $(\mathcal{F}')^{\text{an}} \cong \mathcal{G}'$. Sei $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}$ das Idealgarbe von X , \mathfrak{a}^{an} entsprechend. Aus $\mathfrak{a}^{\text{an}}\mathcal{G}' = 0$ folgt mittels (5.2), daß $\mathfrak{a}\mathcal{F}' = 0$, also faktorisiert \mathcal{F}' über \mathcal{O}_X , d. h. $\mathcal{F}' = i_*\mathcal{F}$ für einen kohärenten \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} . Es folgt $\mathcal{F}^{\text{an}} \cong \mathcal{G}$.

Schemata-Äquivalenz: Sei nun $Y \rightarrow S$ ein über S projektiver komplexer Raum. Dann existiert eine abgeschlossene Immersion $Y \hookrightarrow (\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}$ über S . Sei $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{(\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}}$ deren Idealgarbe. Nach (5.4) existiert ein kohärenter $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}$ -Modul \mathcal{F} mit $\mathcal{F}^{\text{an}} \cong \mathcal{O}_{(\mathbb{P}_A^r)^{\text{an}}}/\mathfrak{a}$. Da \mathcal{F} Quotient von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}$ ist, hat \mathcal{F} die Form $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}/\mathfrak{b}$ mit einem kohärenten Ideal $\mathfrak{b} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}$; sei $X \hookrightarrow \mathbb{P}_A^r$ das durch \mathfrak{b} definierte abgeschlossene Unterschema. Es ist $X \in (\mathbb{K}/Z)$ über S und $X^{\text{an}} \cong Y$. Die Volltreueheit für Schemata folgt aus der Volltreueheit für kohärente Moduln, indem man \mathcal{O}_X -Algebren (insbesondere die Strukturgarben weiterer Schemata) als kohärente Moduln auffaßt. \square

(5.6) Korollar. Sei S ein Steinscher Raum, $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, X ein über $\text{Spec } A$ projektives Schema und \mathcal{F} ein kohärenter \mathcal{O}_X -Modul. Dann ist der natürliche Homomorphismus

$$H^p(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p(X^{\text{an}}, \mathcal{F}^{\text{an}})$$

für jedes $p \geq 0$ ein Isomorphismus von A -Moduln, und $H^p(X, \mathcal{F})$ ist ein kohärenter \mathcal{O}_S -Modul.

Beweis. Folgt aus (4.6), (5.1) und der Endlichkeitsaussage [10]. \square

(5.7) Bemerkung. Im Spezialfall $S = \{*\}$, also $A = \mathbb{C}$, ist (5.1) gerade der klassische GAGA-Satz von J.-P. Serre [22].

Wir wollen nun den Existenzsatz auf den Fall eigentlicher Morphismen ausdehnen. Dazu benötigen wir den folgenden Hilfssatz, welcher den Übergang vom projektiven zum eigentlichen Fall gestattet (vgl. [13], (II 5.3.4)).

(5.8) Hilfssatz (Chow-Lemma). Sei S ein noetherscher Steinscher Raum, $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ und X ein über $\text{Spec } A$ eigentliches Schema von endlicher Darstellung. Dann existieren ein über $\text{Spec } A$ projektives Schema X' und ein surjektiver, eigentlicher A -Morphismus $f : X' \rightarrow X$ derart, daß f über einer dichten offenen Teilmenge von X ein Isomorphismus ist.

Beweis. Anwendung des klassischen Chow-Lemmas [13], (II 5.6.1), auf $X \rightarrow \text{Spec } A$. \square

(5.9) Theorem. Sei S ein Steinscher Raum, $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ und X ein über $\text{Spec } A$ eigentliches Schema von endlicher Darstellung. Dann ist der Funktor

$$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}^{\text{an}}$$

eine Äquivalenz von der Kategorie der kohärenten \mathcal{O}_X -Moduln auf die Kategorie der kohärenten $\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}$ -Moduln.

Beweis. Volltreueheit: Seien \mathcal{F}, \mathcal{G} kohärente \mathcal{O}_X -Moduln. Wegen der Reduktion über die Hom-Garbe genügt zu zeigen: Für jeden kohärenten \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{H} ist

$$\Gamma(X, \mathcal{H}) \longrightarrow \Gamma(X^{\text{an}}, \mathcal{H}^{\text{an}})$$

bijektiv. Sei $\pi : X \rightarrow \text{Spec } A$ die Strukturabbildung. Es ist

$$\Gamma(X, \mathcal{H}) = \Gamma(\text{Spec } A, \pi_* \mathcal{H}) = \Gamma(S, (\pi_* \mathcal{H})^{\text{an}}).$$

Nach (4.6) gilt $(\pi_* \mathcal{H})^{\text{an}} = \pi_*^{\text{an}}(\mathcal{H}^{\text{an}})$, und der Beweis von (4.6) gilt unter der Eigentlichkeitsvoraussetzung auch in diesem Falle, da man dabei [13], (III 4.1.5), bzw. [10] heranzieht.

Wesentliche Surjektivität: Sei \mathcal{G} ein kohärenter $\mathcal{O}_{X^{\text{an}}}$ -Modul. Wir wenden Chow (5.8) an: Es existieren $X' \rightarrow \text{Spec } A$ projektiv und $f : X' \rightarrow X$ surjektiv eigentlich, A -Morphismus, generisch isomorph. Dann ist $\mathcal{G}' := f^{\text{an},*} \mathcal{G}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{X'}$ -Modul; nach (5.1) gibt es einen kohärenten \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F}' mit $(\mathcal{F}')^{\text{an}} \cong \mathcal{G}'$.

Wir bilden nun $f_*^{\text{an}} \mathcal{G}'$ und $f_* \mathcal{F}'$. Beide sind kohärent (vgl. [10] bzw. (5.6)) und es gilt $(f_* \mathcal{F}')^{\text{an}} \cong f_*^{\text{an}} \mathcal{G}'$. Mittels Standardargumenten (vgl. [22], n° 17, oder [11]) konstruiert man einen kohärenten \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} mit $\mathcal{F}^{\text{an}} \cong \mathcal{G}$. Im Detail: Man betrachtet die Spektralsequenz von f , verwendet die Volltreueheit auf X' und $X' \times_X X'$, und identifiziert \mathcal{F} als Differenzkern. Damit ist (5.9) bewiesen. \square

(5.10) Korollar. Unter den Voraussetzungen von (5.9) ist die Funktor $X \mapsto X^{\text{an}}$ eine Äquivalenz von der Kategorie der über $\text{Spec } A$ eigentlichen Schemata von endlicher Darstellung auf die Kategorie der über S eigentlichen komplexen Räume mit der entsprechenden Endlichkeitsbedingung.

Beweis. Volltreueheit folgt wie in (5.5) aus der Volltreueheit auf kohärenten Moduln. Wesentliche Surjektivität: Für $Y \rightarrow S$ eigentlich existiert nach Chow eine Modifikation $Y' \rightarrow Y$ mit Y' projektiv, und dann argumentiert man wie in (5.9). \square

(5.11) Anwendung (Vergleichssatz für die de Rham-Kohomologie). Sei S ein Steinscher Raum, $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ und X ein glattes, eigentliches Schema von endlicher Darstellung über $\text{Spec } A$. Dann induziert der Vergleichsfunktor einen Isomorphismus

$$H^p(X, \Omega_{X/A}^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^p(X^{\text{an}}, \Omega_{X^{\text{an}}/S}^\bullet)$$

für alle $p \geq 0$.

Beweis. Der Komplex $\Omega_{X/A}^\bullet$ besteht aus kohärenten \mathcal{O}_X -Moduln (lokal frei vom endlichen Rang), und es gilt $(\Omega_{X/A}^p)^{\text{an}} = \Omega_{X^{\text{an}}/S}^p$. Der Isomorphismus folgt nun aus (5.6) und der Hyperkohomologie-Spektralsequenz. \square

(5.12) Anwendung (Divisorenklassengruppen). Sei S ein Steinscher Raum, $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ und X ein über $\text{Spec } A$ eigentliches, normales Schema von endlicher Darstellung. Dann induziert der Funktor $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\text{an}}$ einen Isomorphismus

$$\text{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X^{\text{an}}).$$

Insbesondere stimmen für eine analytische Algebra A mit normalem $\text{Spec } A$ die analytische und algebraische Divisorenklassengruppe überein (vgl. [5]).

Beweis. Der Funktor $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\text{an}}$ ist nach (5.9) eine Äquivalenz auf kohärenten Moduln, also insbesondere auf invertierbaren Garben. Da $\mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{O}_{X^{\text{an}}}^*$ unter dieser Äquivalenz Linienbündel auf Linienbündel abbildet, folgt die Behauptung. \square

(5.13) Bemerkung. Die Aussagen (5.1), (5.6), (5.9) gelten gemäß einem Argument von A. Grothendieck auch für allgemeinere kompakte Garben, sofern man die geeigneten Endlichkeits- und Verschwindungssätze zur Verfügung hat. Vgl. hierzu auch [14].

§ 6. Modulräume

In diesem Paragraphen wenden wir die Existenz- und Vergleichssätze auf Modulprobleme über einem Steinschen Basisraum an. Wir betrachten zwei wichtige Funktoren: den Hilbertfunktoren und den Picardfunktoren.

(6.1) Hilbertfunktoren. Sei S ein Steinscher Raum, $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ und $X \rightarrow \text{Spec } A$ ein projektives Schema. Für jedes S -Schema $T \in (\mathbb{K}/S)$ sei

$$\text{Hilb}_{X/A}(T) = \{Z \subset X \times_A T \mid Z \rightarrow T \text{ flach, eigentlich, endliche Darstellung}\}.$$

Bezüglich T liefert dies einen kontravarianten Funktor von (\mathbb{K}/S) in die Kategorie der Mengen.

Entsprechend definiert man für eine Familie kohärenter Garben den Hilbertfunktoren in der analytischen Kategorie: Für einen über S projektiven komplexen Raum $X^{\text{an}} \rightarrow S$ und einen komplexen Raum $T \rightarrow S$ ist

$$\text{Hilb}_{X^{\text{an}}/S}(T) = \{Z \subset X^{\text{an}} \times_S T \mid Z \rightarrow T \text{ flach, eigentlich}\}.$$

Aus der Existenz des klassischen Hilbertfunktoren über Schemata (Grothendieck [12]) und dem Existenzsatz (5.10) erhalten wir:

(6.1.1) Satz. Sei S ein Steinscher Raum, $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ und $X \rightarrow \text{Spec } A$ ein projektives Schema. Dann existiert der Hilbertfunktoren $\text{Hilb}_{X/A}$ als S -Schema, lokal endlicher Darstellung, in (\mathbb{K}/S) . Sein analytischer $\text{Hilb}_{X/A}^{\text{an}}$ ist ein Modulraum für $\text{Hilb}_{X^{\text{an}}/S}$ in der Kategorie der komplexen Räume über S .

Beweis. Existenz folgt aus [12], Théorème 3.1, angewandt auf $X \rightarrow \text{Spec } A$. Die Modulraumeigenschaft im analytischen Sinne folgt aus (5.10): jede flache eigentliche Familie $Z \subset X^{\text{an}} \times_S T$ kommt von einer eindeutig bestimmten algebraischen Familie über T , und diese korrespondiert mit einem eindeutig bestimmten T -Punkt von $\text{Hilb}_{X/A}$. \square

(6.2) Picardfunktoren. Sei S ein Steinscher Raum, $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ und $X \rightarrow \text{Spec } A$ ein eigentliches, glattes Schema von endlicher Darstellung mit zusammenhängenden Fasern. Wir definieren den (relativen) Picardfunktoren

$$\text{Pic}_{X/A}(T) = \text{Pic}(X \times_A T) / \text{Pic}(T)$$

für $T \in (\mathbb{K}/S)$. Mit der Etale-Garbifizierung wird daraus ein vernünftiger Funktor.

(6.2.1) Satz. Sei S ein Steinscher Raum, $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ und $X \rightarrow \text{Spec } A$ projektiv und glatt mit zusammenhängenden Fasern. Dann existiert der Picardfunktoren $\text{Pic}_{X/A}$ als ein lokal endliches (\mathbb{K}/S) -Schema, und $\text{Pic}_{X/A}^{\text{an}}$ ist ein analytischer Picardfunktoren von X^{an}/S .

Beweis. Existenz im algebraischen Fall: Klassisches Resultat von A. Grothendieck und H. Mumford [12]. Die analytische Modulraumeigenschaft folgt aus (5.12) bei der Faser-für-Faser-Argumentation. \square

(6.2.2) Bemerkung. Die obige Konstruktion liefert insbesondere einen analytischen Picardfunktoren $\text{Pic}_{X^{\text{an}}/S}$, dessen Existenz im rein analytischen Rahmen erst von H. Grauert nicht-trivial bewiesen wurde. Hier erhalten wir sie direkt aus der algebraischen Konstruktion via Existenzsatz.

§ 7. Der relative Riemannsche Existenzsatz

In diesem letzten Paragraphen geben wir eine relative Version des klassischen Riemannschen Existenzsatzes an. Sie besagt im wesentlichen, daß jede endliche, étale Überlagerung eines Schemas der Form X^{an} algebraisch ist, sofern X über einer Steinschen Algebra eigentlich ist.

(7.1) Theorem (Relativer Riemannscher Existenzsatz). Sei S ein Steinscher Raum, $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ und $X \in (\mathbb{K}/S)$ eigentlich über $\text{Spec } A$ und von endlicher Darstellung. Dann ist

der Funktor $Y \mapsto Y^{\text{an}}$ eine Äquivalenz von der Kategorie der endlichen, étalen X -Schemata auf die Kategorie der endlichen, étalen X^{an} -Räume.

Beweis. Endliche X -Schemata sind affin über X , also von der Form $\text{Spec } \mathcal{A}$ für eine endliche \mathcal{O}_X -Algebra \mathcal{A} , und entsprechend in der analytischen Kategorie. Nach (5.9) ist der Funktor $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^{\text{an}}$ eine Äquivalenz auf kohärenten Algebren. Étalheit ist dabei eine offene Bedingung, die unter dem Vergleichsfunktor erhalten bleibt (vgl. (3.1)). \square

(7.2) Korollar. Unter den Voraussetzungen von (7.1) liefert die Spezialisierung $Y \mapsto Y^{\text{an}}$ einen Isomorphismus der étalen Fundamentalgruppen

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{an,ét}}(X^{\text{an}}, \bar{x}).$$

Beweis. Aus (7.1) und der allgemeinen Theorie der Fundamentalgruppen. \square

(7.3) Korollar (Klassischer Fall). Sei X ein eigentliches komplex-analytisches algebraisches Schema (im Sinne von Serre [22]), z. B. ein eigentliches Schema von endlicher Darstellung über \mathbb{C} . Dann ist jede endliche étale Überlagerung von X^{an} algebraisierbar.

Beweis. Spezialfall $S = \{*\}$, $A = \mathbb{C}$ von (7.1). \square

(7.4) Bemerkung. Die Forderung der Eigentlichkeit ist im allgemeinen unverzichtbar; ohne sie gilt die Aussage von (7.1) auch im klassischen Fall nicht (man denke an die Exponentialüberlagerung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$).

(7.5) Anwendung. Sei S ein Steinscher Raum und $X \rightarrow S$ eine eigentliche, glatte Familie projektiver \mathbb{C} -Schemata mit zusammenhängenden Fasern. Dann liefert (7.1) eine algebraische Beschreibung der Familie der étalen Fundamentalgruppen $\pi_1(X_s)$ in $s \in S$. Dies ergibt insbesondere eine algebraische Konstruktion gewisser Modulräume von Überlagerungen.

(7.6) Bemerkung. Eine analoge Aussage für nicht-endliche, jedoch lokal-konstante Bündel (etwa lokale Systeme komplexer Vektorräume) ist falsch: die Riemann-Hilbert-Korrespondenz ist im allgemeinen nicht algebraisch. Hier muß man Differentialgleichungen mit regulären Singularitäten heranziehen, vgl. Deligne [4].

(7.7) Schlußbemerkung. Die in §§ 5–7 entwickelten Vergleichs- und Existenzsätze stellen eine umfassende Theorie der Schemata über Steinschen Algebren bereit, welche es gestattet, in zahlreichen Situationen die elementaren algebraisch-geometrischen Methoden direkt in der analytischen Geometrie anzuwenden. Insbesondere erhält man so neue Beweise klassischer Sätze (Vergleichssatz für die Kohomologie, Vergleichssatz für die Picardgruppe, relativer Riemannscher Existenzsatz) sowie Algebraisierungsergebnisse, die auf rein analytischem Wege bisher nicht oder nur mit erheblichem Aufwand zugänglich waren.

Literatur

- [1] Constantin Bănică and Octavian Stănăşilă. *Méthodes algébriques dans la théorie globale des espaces complexes*. Gauthier-Villars, Paris, 1977. 2 Bände.
- [2] Jürgen Bingener. Über formale komplexe Räume. *manuscripta mathematica*, 17:137–164, 1975. doi: 10.1007/BF01171248.
- [3] Nicolas Bourbaki. *Algèbre commutative. Chapitres 1 à 7*. Hermann, Paris, 1961–1965.
- [4] Pierre Deligne. *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, volume 163 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970. doi: 10.1007/BFb0061194.
- [5] Gerd Fischer. *Komplex-analytische Geometrie*, volume 538 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976. doi: 10.1007/BFb0080338.

-
- [6] Otto Forster. Zur theorie der steinschen algebren und moduln. *Mathematische Zeitschrift*, 97:376–405, 1967. doi: 10.1007/BF01112885.
- [7] Otto Forster and Knut Knorr. Ein beweis des grauertschen bildgarbensatzes nach ideen von b. malgrange. *manuscripta mathematica*, 5:19–44, 1971. doi: 10.1007/BF01168378.
- [8] Otto Forster and Knut Knorr. Relativ-analytische räume und die kohärenz von bildgarben. *Inventiones mathematicae*, 16:113–160, 1972. doi: 10.1007/BF01425492.
- [9] Hans Grauert. Ein theorem der analytischen garbentheorie und die modulräume komplexer strukturen. *Publications mathématiques de l’I.H.É.S.*, 5:5–64, 1960.
- [10] Hans Grauert and Reinhold Remmert. Bilder und urbilder analytischer garben. *Annals of Mathematics. Second Series*, 68:393–443, 1958. doi: 10.2307/1970208.
- [11] Alexander Grothendieck. Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents. In *Séminaire Henri Cartan*, volume 9 (1956/57) of *Exp. 2*. Paris, 1958.
- [12] Alexander Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d’existence en géométrie algébrique. I–V. In *Séminaire Bourbaki*, Exp. 190, 195, 212, 221, 232. Société mathématique de France, Paris, 1959–1962.
- [13] Alexander Grothendieck and Jean A. Dieudonné. *Éléments de Géométrie Algébrique. I–IV*. Publ. Math. I.H.É.S. / Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1960–1971.
- [14] Monique Hakim. *Topos annelés et schémas relatifs*, volume 64 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972. doi: 10.1007/978-3-662-59155-0.
- [15] Christian Houzel. Géométrie analytique locale. In *Séminaire Henri Cartan*, volume 13 (1960/61) of *Exp. 18–21*. Paris, 1962.
- [16] Jun-ichi Igusa. On the structure of certain complete intersections. *Scientific Papers of the College of General Education, University of Tokyo*, 6:121–129, 1956.
- [17] Burchard Kaup and Ludger Kaup. *Holomorphic Functions of Several Variables*, volume 3 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1983. doi: 10.1515/9783110838350.
- [18] Donald Knutson. *Algebraic Spaces*, volume 203 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971. doi: 10.1007/BFb0059750.
- [19] Ulrich Köpf. Über eigentliche familien algebraischer varietäten über affinoiden räumen. *Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster*, 2. Serie, Heft 7, 1974.
- [20] Jacob P. Murre. *Lectures on an introduction to Grothendieck’s theory of the fundamental group*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1967.
- [21] Raghavan Narasimhan. *Introduction to the theory of analytic spaces*, volume 25 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966. doi: 10.1007/BFb0077071.
- [22] Jean-Pierre Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Annales de l’Institut Fourier*, 6:1–42, 1955–1956.
- [23] Yum-Tong Siu and Günther Trautmann. *Gap-Sheaves and Extension of Coherent Analytic Subsheaves*, volume 172 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971. doi: 10.1007/BFb0061382.

-
- [24] Jean-Louis Verdier. Équivalence essentielle des systèmes différentiels. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 1977/78*, volume 710 of *Lecture Notes in Mathematics*, page Exp. No. 510. Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1978.