Erratum

Antoine Chambert-Loir et Antoine Ducros, *Formes différentielles réelles et courants sur les espaces de Berkovich*. Les numéros de page renvoient à arXiv:1204.6277v2.

Erreurs majeures (73) · Erreurs modérées (435) · Erreurs mineures (398)

Erreurs majeures

1. Cible séparée pour la constance des fibres calibrées

Texte visé. Théorème 14.7.2(a), p. 418.

`calibrage.tex`, lignes 4349–4365.

Correction. Dans (a), supposer Y topologiquement séparé. Grâce à n° 406 et n° 405, toute image voisine est contenue dans l'image spéciale, et les traces du bord sont contenues dans un même polyèdre de dimension inférieure. Pour chaque cellule supérieure compatible de l'image spéciale, utiliser le morphisme combiné corrigé du lemme 14.7.3 vers le produit du tore projeté et de Y. La restriction cellulaire est compacte au-dessus de cette cible, et ses fibres gaussiennes évitent le bord de la source et le bord cellulaire. Leur dimension relative est nulle. La régularité de la cible et la condition (S_d) sur la source donnent la platitude dans le voisinage fini.

Choisir un rayon intérieur à chacune des cellules supérieures. La continuité de la section de Gauss relative permet de rétrécir le voisinage du paramètre en gardant fixes et positifs les degrés à ces rayons. À paramètre fixé la section de Gauss de l'intérieur de chaque cellule est connexe, donc son degré est constant. La formule de calibrage donne les mêmes poids, et l'inclusion uniforme donne l'égalité des parties pures avec leurs poids. Dans (b), la cible affine est déjà séparée.

Contre-exemple. Dans l'exemple de n° 405, les disques sources et les cartes cibles sont réguliers de dimension $n = d = 1$, et toutes les fibres sont de dimension zéro. La fibre calibrée en la première origine est le point 0 de poids un, tandis qu'en $T = p^j$ elle a les deux points 0 et $\log|p|$, chacun de poids un.

2. Courant de base du produit de Bedford–Taylor

Texte visé. §0.2.5, p. 12.

`intro.tex`, lignes 273–277.

Correction. Prendre un courant ordinaire positif fermé T de bidimension suffisante et des potentiels $u_1, \dots, u_r$ dans le faisceau CPsh de la définition 8.1.7. Itérer $D_u S = d'd''(uS)$. La fermeture de S donne, pour u lisse, $D_u S = (d'd''u) \wedge S$. À chaque étape le produit reste ordinaire, positif et fermé. Le produit est symétrique et continu pour la convergence localement uniforme des potentiels. Pour qu'il dépende seulement des courants $d'd''u_i$, demander de plus à T la propriété de Bedford–Taylor pour les potentiels continus.

3. Classe tropicale et intégrales sur les cycles

Texte visé. § 0.3.1, théorème de Liu sur les cycles, p. 17.

`intro.tex`, lignes 614–622.

Correction. Pour un schéma lisse séparé de type fini sur un corps non archimédien, Liu construit la classe tropicale d'un cycle et, après extension des scalaires à $\mathbb{R}$, sa réalisation de Dolbeault. Théorème 1.1

Soit $X/\mathbb{Q}$ propre et lisse de dimension n et soit Z un cycle sur X de codimension p. Si la classe de de Rham complexe de Z est nulle, la comparaison de de Rham et l'extension fidèle des scalaires donnent la nullité de sa classe de de Rham algébrique. À chaque place finie, après extension à $\mathbb{C}_p$, le théorème 1.8 donne

$$\int_{Z^{\mathrm{an}}_{\mathbb{C}_p}} \omega = 0$$

pour toute forme d''-fermée à support compact de bidegré $(n-p, n-p)$. La remarque qui suit laisse ouverte la nullité générale de la classe tropicale. Le théorème 1.9(2) donne séparément cette nullité pour un fibré en droites sur un schéma propre et lisse sur $\mathbb{C}_p$ si la classe de de Rham du fibré est nulle. Théorèmes 1.8 et 1.9

4. Prolongement lisse sur une cellule polyédrique fermée

Texte visé. Lemme 1.10.8(a), p. 57, `lagerberg.tex`, ligne 3722 et preuve.

Correction. Sur toute cellule polyédrique réelle fermée C, bornée ou non, des données $G_{\mathbf{R}}$-lisses sur le bord relatif admettent un prolongement $G_{\mathbf{R}}$-lisse sur C.

Si C est compacte, choisissons o dans son intérieur relatif. Une subdivision finie du bord donne des morceaux D de faces sur lesquels la donnée u se prolonge de façon lisse. Sur chacun des cônes joignant o à D, écrivons $x = o + \lambda(y - o)$ avec $y \in D$ et $0 < \lambda \leq 1$. La coordonnée λ est affine, égale à zéro en o et à un sur la face. Posons $v(x) = \chi(\lambda)u(y)$, où χ est lisse, nulle près de zéro et égale à un près de un. Hors du sommet, $y = o + (x - o)/\lambda$ est lisse. Près du sommet, $v = 0$. Sur les intersections, le point radial y est le même et les formules coïncident. Le recouvrement fini des cônes donne le prolongement, tandis qu'en dimension zéro la donnée de bord est vide.

Pour une cellule non bornée, son bord relatif est un sous-espace paralinéaire fermé de $\mathrm{aff}(C)$. Appliquer le prolongement par grille de n° 5 à ce bord et restreindre à C. La preuve par grille utilise seulement la construction conique compacte qui précède.

5. Prolongement lisse depuis un sous-espace paralinéaire fermé

Texte visé. Proposition 1.10.10(a), p. 58.

`lagerberg.tex`, ligne 3757.

Correction. Supposer P fermé dans l'espace affine réel de dimension finie V. Toute fonction $G_{\mathbf{R}}$-lisse sur P se prolonge alors à V. Sur $P = (0, \infty)$, la fonction $1/x$ illustre l'obstruction en l'absence de fermeture.

Preuve. Dans une cellule compacte B, les données sur un sous-espace paralinéaire fermé A admettent un recouvrement fini par des cellules où elles se prolongent de façon lisse. Une disposition finie des hyperplans des cellules subdivise B avec A comme réunion de cellules. Gardons les valeurs sur A et complétons aux autres sommets. Par induction sur la dimension, prolongeons ensuite sur chaque cellule à l'aide du prolongement conique compact de n° 4, qui

conserve toutes les valeurs de bord. Les cellules de même dimension se recollent sur leurs faces déjà fixées.

Dans V, prenons une grille de cubes compacts localement finie, avec toutes leurs faces. Fixons les valeurs prescrites aux sommets de P et des valeurs arbitraires aux autres sommets. Sur chaque cellule B de la grille, après traitement des faces, les données sur $(P \cap B) \cup \partial B$ sont compatibles. La fermeture de P donne la compacité de $P \cap B$, et la construction compacte étend ces données sans modifier les valeurs déjà fixées. Les cellules se recollent. La grille localement finie et les recouvrements finis dans ses cellules donnent la régularité $G_{\mathbf{R}}$-lisse locale.

6. Prolongement paralinéaire à pentes dans le corps de coefficients

Texte visé. Proposition 1.10.10(b), p. 58.

`lagerberg.tex`, ligne 3761.

Correction. Pour tout sous-corps $K \subset \mathbf{R}$, supposons P fermé et K-paralinéaire. Toute fonction K-paralinéaire sur P se prolonge à l'espace affine ambiant de dimension finie, avec la convention originale des constantes réelles.

Preuve. Sur un compact, prenons un recouvrement fini par des cellules Q_i sur lesquelles la donnée est a_i, affine à pentes dans K. Si $\ell_{jr} \leq 0$ définissent Q_j, posons $r_j = \max(0, \ell_{j1}, \dots, \ell_{jt_j})$. Sur Q_i, la quantité $(a_j - a_i)_+$ s'annule où $r_j = 0$. Subdivisons Q_i en cellules compactes sur lesquelles les deux quantités sont affines. Le maximum des rapports aux sommets où $r_j > 0$ est fini. Un entier $N > 0$ qui majore tous ces rapports donne $(a_j - a_i)_+ \leq N r_j$ par interpolation sur les cellules. Ainsi $\max_j(a_j - N r_j)$ vaut exactement la donnée sur chaque Q_i. Ses pentes sont dans K, car la pénalisation est entière.

Pour le cas fermé général, reprenons la grille localement finie de n° 5 dans des coordonnées compatibles avec K. Sur chaque cellule compacte B, prolongeons les données sur $(P \cap B) \cup \partial B$ par la formule précédente après avoir traité les faces. Les prolongements conservent la donnée et les bords, et se recollent localement sur les morceaux de la grille.

7. Compatibilité des cartes par leurs transitions paralinéaires

Texte visé. §2.1.1, p. 61, `pl.tex`, lignes 31–45.

Contre-exemple. Sur $X = \mathbf{R}^2$, posons $P = \mathbf{R} \times \{0\}$, $a(x, 0) = x$ et $F(x, y) = (x, y + x^2)$. Prenons les atlas formés respectivement de la carte identité, de la carte F, et de l'identité accompagnée de a. Les trois familles contiennent une carte globale, donc G-recouvrent X. Le critère imprimé rend le deuxième atlas compatible avec le premier, puis le premier avec le troisième. Le deuxième et le troisième sont incompatibles, car $F(P)$ est la parabole, qui ne contient aucun segment non trivial et ne peut localement être G-recouverte par des cellules affines.

Correction. Sur les intersections de domaines, demander que les changements de cartes soient des homéomorphismes paralinéaires dans les deux sens. Les compositions sur les intersections assurent la relation d'équivalence utilisée pour construire l'atlas maximal.

8. Calibrage constant le long d'une cellule harmonieuse

Texte visé. Remarque 4.6.10, p. 114.

`calibrages-pl.tex`, lignes 1811–1830.

Contre-exemple. Prenons $X = C = \mathbb{R}$, $n = 1$, $f = \mathrm{id}$ et $\mu = e^x \mu_0$ pour le calibrage unitaire μ_0. La cellule tout entière a un intérieur relatif ouvert. Aux sommets d'une subdivision en

intervalles compacts, les poids e^x coïncident de part et d'autre et les directions sortantes sont opposées, donc la discordance est nulle. Le calibrage est harmonieux et son poids e^x varie sur C.

Correction. Supposer le calibrage G-localement constant. Sur une subdivision où il est constant dans chaque cellule maximale, l'harmonie impose l'égalité de ces constantes le long d'une facette intérieure. Dans l'image convexe de C, un chemin entre deux intérieurs cellulaires peut éviter le squelette de codimension deux et ne traverser qu'un nombre fini de facettes, par locale finitude. Les constantes se propagent ainsi dans tout l'intérieur relatif de C, et les cellules de dimension inférieure ne portent pas de calibrage de dimension maximale.

9. Calibrage dans la formule de Stokes

Texte visé. Proposition 4.6.15(a), p. 116.

`calibrages-pl.tex`, lignes 1942–1953.

Contre-exemple. Sur $X = \mathbb{R}$ de niveau 1, prenons le calibrage lisse $\mu = e^x \mu_0$ pour le calibrage unitaire μ_0, et $\omega = \phi(x) d''x$ avec $\phi \geq 0$, lisse, à support compact et non nulle. L'intégrale de bord est nulle, mais

$$\int_X \langle d'\omega, \mu \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^x \phi'(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} e^x \phi(x)\, dx < 0.$$

Correction. Supposer le calibrage G-localement constant au voisinage de $\operatorname{supp}\omega$. Sur une subdivision adaptée, les poids constants permettent d'appliquer Stokes affine sur chaque cellule de dimension maximale. La somme des termes de facettes fournit la forme de bord définie dans le texte. Pour un poids lisse w sur une cellule affine, la règle de Leibniz montre que le terme intérieur omis est $-\int \langle d'w \wedge \omega, \mu_0 \rangle$.

10. Calibrage dans la formule de Green

Texte visé. Proposition 4.6.15(b), p. 116.

`calibrages-pl.tex`, lignes 1955–1964.

Contre-exemple. Sur $\mathbb{R}$ de niveau 1, prenons le calibrage $e^x \mu_0$, où μ_0 est unitaire, et les formes symétriques de bidegré $(0,0)$ données par $\alpha = 1$, $\beta = \phi$. Ici $\phi \geq 0$ est lisse, non nulle et à support compact. Le membre de bord est nul et le membre intérieur vaut

$$\int_{\mathbb{R}} e^x \phi''(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^x \phi(x)\, dx > 0.$$

Correction. Supposer le calibrage G-localement constant près de l'intersection compacte des supports. La forme $\alpha \wedge d''\beta - d''\alpha \wedge \beta$ a son support dans cette intersection. On lui applique la formule de Stokes corrigée, puis le calcul de symétrie de la formule affine de Green identifie sa différentielle d' à l'intégrande intérieur.

11. Constante locale dans la formule de Stokes tropicale

Texte visé. Proposition 5.11.1(a), p. 140.

`espcalibres.tex`, lignes 2394–2402.

Correction. Supposer le calibrage G-localement constant près du support de ω. La proposition 4.6.15(a), corrigée en n° 9, applique Stokes affine sur les cellules à poids constant. La somme des termes de facettes donne la forme de bord.

Sur $\mathbb{R}$ de niveau 1 et de calibrage $e^x\mu_0$, la forme $\omega = \phi(x)d''x$, avec $0 \le \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ non nulle, donne

$$\int_X^\partial \omega = 0, \qquad \int_X d'\omega = -\int_{\mathbb{R}} e^x\phi(x)\,dx < 0.$$

Les directions sortantes opposées annulent les termes de bord. Pour un poids lisse sur une cellule affine, le terme de Leibniz $d'w \wedge \omega$ doit être pris en compte.

12. Constante locale dans la formule de Green tropicale

Texte visé. Proposition 5.11.1(b), p. 140.

`espcalibres.tex`, lignes 2403–2410.

Correction. Supposer le calibrage G-localement constant près de l'intersection compacte des supports de α, β. La proposition 4.6.15(b) corrigée en n° 10 résulte de Stokes appliqué à la forme $\alpha \wedge d''\beta - d''\alpha \wedge \beta$, dont le support est contenu dans cette intersection, puis du calcul de symétrie affine.

Sur la droite de niveau 1 de n° 11, prenons $\alpha = 1$, $\beta = \phi$, deux formes symétriques de bidegré $(0,0)$. Le terme de bord est nul. Le terme intérieur vaut $\int_{\mathbb{R}} e^x\phi''(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^x\phi(x)\,dx > 0$.

13. Ordre zéro des courants et cône des tests

Texte visé. Proposition 7.2.9, p. 162.

`courants-trop.tex`, lignes 803–856.

Correction. Exiger la non-négativité sur les tests positifs ordinaires. On symétrise le test par J. Dans l'espace des formes symétriques, l'intérieur du cône positif permet de dominer les coefficients du test par une forme strictement positive multipliée par sa norme uniforme. L'estimation C^0 locale et le recollement donnent un courant positif d'ordre zéro. Les cônes coïncident pour $p = 0, 1, n-1, n$, degrés où le test imprimé suffit.

Contre-exemple. Sur $\mathbb{R}^4$, écrivons une $(2,2)$-forme $-\sum_{I,J} A_{IJ}d'x_I \wedge d''x_J$, les paires I, J étant croissantes. Posons

$$L(A) = \tfrac{1}{2}(A_{12,34} + A_{34,12} - A_{13,24} - A_{24,13} + A_{14,23} + A_{23,14}), \quad T(\alpha) = \partial_{x_1} L(A)(0).$$

Le courant est symétrique. Pour $A = zz^{\mathsf{T}}$ avec $z = a \wedge b$, la relation de Plücker donne $L(A) = 0$. Toute forme fortement positive a ponctuellement une somme de telles matrices à coefficients positifs, donc T l'annule. Soit B de seuls termes non nuls $B_{12,34} = B_{34,12} = 1$ et ρ une coupure valant un près de zéro. Les matrices $\rho(x)\sin(jx_1)B/j$ tendent uniformément vers zéro à support compact fixé, et T vaut un sur les tests correspondants. Le courant est continu pour les tests lisses et son ordre est un.

14. Multiplication borélienne des courants positifs

Texte visé. Exemple 7.2.12, p. 163.

`courants-trop.tex`, lignes 891–913.

Correction. Pour les courants positifs ordinaires et fortement positifs, l'ordre zéro donne les mesures des coefficients. On les multiplie par la fonction borélienne localement bornée, et une fonction non négative préserve la positivité dans le cône correspondant, par les mesures des tests. Pour un courant faiblement positif, une construction de ce type demande l'ordre zéro et une justification par les mesures des coefficients.

Le courant symétrique de n° 13 est faiblement positif et d'ordre un. Même $u = 1$, multiplicateur lisse et borélien, doit donner $uT = T$. Les évaluations sur les tests fortement positifs sont toutes nulles dans cet exemple et ne déterminent pas les coefficients symétriques restants.

15. Positivité de la mesure associée sur un ouvert

Texte visé. Proposition 7.4.2, p. 169.

`courants-trop.tex`, lignes 1743–1800.

Correction. Supposer V ouvert. Par localité ordinaire, la restriction $\mu_\omega^T|_V$ est la mesure qui associe la restriction du courant au test $\omega|_V$. Elle est positive sous les hypothèses de positivité. Pour des domaines généraux, il faut établir la tangentialité du courant.

Sur $\mathbb{R}^2$, le courant $T(\sum a_{ij} d'x_i \wedge d''x_j) = a_{11}(0)$ est symétrique, positif et d'ordre zéro. Pour une coupure $\rho \geq 0$ valant un près de l'origine, posons $\omega = -\rho\, d'x_1 \wedge d''x_1$. Sa restriction au domaine $V = \{0\}$ est nulle, tandis que $T(u\omega) = -u(0)$. La trace de la mesure sur V est donc $-\delta_0$.

16. Égalité de mesures associées sur un ouvert

Texte visé. Corollaire 7.4.3, p. 170.

`courants-trop.tex`, lignes 1802–1818.

Correction. Supposer V ouvert. L'égalité des restrictions des deux formes sur V implique l'annulation de leur différence sur les tests à support dans V. Par localité, les deux mesures ont la même restriction à V. Un domaine plus général demande une hypothèse de tangentialité vérifiée séparément.

Sur $\mathbb{R}^2$, reprenons $T(\sum a_{ij} d'x_i \wedge d''x_j) = a_{11}(0)$ et $\omega = -\rho\, d'x_1 \wedge d''x_1$, où $\rho = 1$ près de zéro. Les formes ω et 0 ont la même restriction au domaine $\{0\}$, tandis que les traces de leurs mesures sont respectivement $-\delta_0$ et 0.

17. Faisceau ordinaire des mesures associées aux formes

Texte visé. Théorème 7.4.4, pp. 170–171.

`courants-trop.tex`, lignes 1820–1908.

Correction. L'envoi d'une forme lisse vers sa mesure par T est un morphisme de faisceaux pour les ouverts ordinaires, par localité. Une extension aux G-domaines exige une tangentialité et une preuve propres. L'action ultérieure sur les G-tests compacts pour les courants positifs ordinaires fermés relève de ses hypothèses analytiques de cartes et de tangentialité.

Sur $\mathbb{R}^2$, prenons $T(\sum a_{ij} d'x_i \wedge d''x_j) = a_{11}(0)$ et $\omega = -\rho\, d'x_1 \wedge d''x_1$, avec $\rho = 1$ près de zéro. Le G-domaine $V = \{0\}$ reçoit la forme nulle par restriction. La mesure ordinaire est $-\delta_0$, dont la trace sur V vaut $-\delta_0$. La compatibilité avec la restriction contredit la linéarité de l'application sur V.

18. Courant d'intégration et calibrage squelettique

Texte visé. Exemple 7.5.3, p. 173.

`courants-trop.tex`, lignes 2211–2218.

Correction. Supposer le calibrage ambiant G-localement constant. Le courant d'intégration est alors décrit sur le squelette de variation maximale de la carte par son calibrage canonique, qui satisfait la constance G-locale demandée dans la définition d'un courant squelettique.

Sur la droite sans bord de n° 20, le calibrage de la carte identité vaut e^x. Une description squelettique de $[1]$ devrait avoir un intervalle non dégénéré de densité constante c. Les tests lisses à support dans cet intervalle imposeraient $\int (e^x - c)\varphi(x)\,dx = 0$ pour tout φ, d'où $e^x = c$ sur l'intervalle, ce qui est impossible.

19. Fermeture du courant d'intégration sans bord

Texte visé. Proposition 7.7.9, p. 189.

`courants-trop.tex`, lignes 3941–3942.

Correction. Pour déduire $d'\delta_X = 0$ de l'absence de bord, exiger un calibrage G-localement constant. Stokes corrigé donne l'annulation sur les formes tests à support compact et, par symétrie, $d''\delta_X = 0$.

Sur la droite harmonieuse sans bord de n° 20, à poids e^x, on a $\delta_X = [1]$. Pour une fonction $\varphi \geq 0$ lisse, non nulle et à support compact,

$$\langle d'\delta_X, \varphi\, d''x\rangle = -\int_{\mathbb{R}} e^x \varphi'(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^x \varphi(x)\,dx > 0.$$

20. Harmonicité des fonctions affines et calibrage

Texte visé. Après la définition 7.8.2, p. 190.

`courants-trop.tex`, lignes 4040–4051.

Correction. Avec un calibrage ambiant G-localement constant, Stokes corrigé sur l'espace harmonieux sans bord fournit $d'd''[u] = [d'd''u]$, nul pour u affine. C'est sous cette hypothèse que l'on peut adjoindre des coordonnées affines harmoniques.

La droite affine de niveau un, munie du poids e^x, est sans bord et harmonieuse. Sur chaque intervalle d'une carte affine de pente $a \neq 0$, les vecteurs sortants en tout point de subdivision sont $e^x a$ et $-e^x a$. Une carte constante ne contribue pas en dimension un. Les conditions de richesse et de séparation se vérifient par les intervalles et la coordonnée de la droite. Pourtant $u = 1$ donne, pour tout test φ lisse à support compact,

$$\langle d'd''[1], \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^x \varphi''(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^x \varphi(x)\,dx,$$

non nul pour un test non négatif non nul.

21. Intégrale de bord d'un tiré en arrière harmonique

Texte visé. Proposition 7.8.4, p. 190.

`courants-trop.tex`, lignes 4083–4093.

Correction. Supposer le calibrage ambiant G-localement constant et exiger que $\rho u^*\alpha$ soit à support compact dans l'intérieur de W. Sous ces hypothèses, l'intégrale de bord de $\rho u^*\alpha$ est nulle. Sur un support fort commun, raffiner de façon à traiter ensemble toutes les cellules incidentes à une facette intérieure. Choisir les vecteurs transverses calibrés dans le noyau de la différentielle d'une carte tangentielle. Les tests de Green à support compact donnent la somme nulle des pentes pour chaque composante de u. La contraction avec une même forme cible annule alors la contribution de chaque facette.

22. Courant de bord du tiré en arrière harmonique

Texte visé. Théorème 7.8.5, p. 192.

`courants-trop.tex`, lignes 4266–4270.

Correction. Supposer le calibrage ambiant G-localement constant. Pour un test ordinaire lisse à support compact dans l'intérieur, une partition finie ramène à une coupure multipliée par le tiré en arrière d'une forme dans une carte tropicale ordinaire f. Les coordonnées affines de f sont harmoniques. Appliquer n° 21 à la carte concaténée (u, f) et à la forme produit sur la cible. Le courant $[u^*\alpha]^\partial$ est ainsi nul sur l'intérieur, et sur tout X si X est sans bord.

23. Harmonie des facettes de l'image calibrée

Texte visé. Corollaire 7.8.6, p. 193.

`courants-trop.tex`, lignes 4298–4304.

Correction. Supposer le calibrage ambiant G-localement constant et l'application G-tropicale harmonique u agréable, comme en n° 209. La restriction de u à $\Sigma_u^{(n)}$ est propre à valeurs dans Π_u. Le sous-ensemble

$$B = u(\partial X \cap \Sigma_u^{(n)})$$

est fermé dans Π_u. Un test cible à support compact hors de B a une image réciproque compacte dans $\Sigma_u^{(n)} \cap \operatorname{Int} X$. Prendre une coupure ordinaire à support compact dans l'intérieur, égale à 1 près de cette image réciproque. Le changement de variables calibré et Stokes ramènent l'intégrale de bord à n° 21. La discordance est donc nulle sur les facettes hors de B, avec la conclusion sur toute facette dont l'intérieur relatif rencontre ce complément dans un découpage adapté.

24. Différentielles des courants associés aux formes harmoniques

Texte visé. Corollaire 7.8.8, p. 193.

`courants-trop.tex`, lignes 4352–4365.

Correction. Supposer le calibrage ambiant G-localement constant. Sur l'intérieur, pour les tests ordinaires à support compact, utiliser l'identité de n° 556

$$d'[\omega] = [d'\omega] - [\omega]^\partial.$$

Pour une G-forme localement harmoniquement tropicalisable, le terme de bord est nul d'après n° 22 corrigé. On obtient $d'[\omega] = [d'\omega]$, puis l'identité pour d'' en échangeant les deux blocs différentiels. Sur un espace sans bord, ces identités valent sur tout l'espace.

25. Portée démontrée de la hiérarchie des fonctions psh continues

Texte visé. Proposition 8.1.11, pp. 197–198, `bt-trop.tex`, lignes 215–267.

Correction. Notons C_α et P_α les hiérarchies faisceautisées continues et psh. À chaque rang, $C_\alpha \subseteq \mathscr{C}^0_X \cap P_\alpha$. L'égalité vaut aux rangs zéro et un, et à un rang limite si elle vaut à tous les rangs antérieurs. L'inclusion réciproque générale au successeur et après stabilisation reste ouverte. Les prédécesseurs d'une limite décroissante dans $P_{\alpha+1}$ sont dans P_α, et peuvent manquer de continuité même si la limite est continue.

Preuve de l'inclusion. Au successeur, une suite de C_α qui converge uniformément sur un ouvert commun donne, par l'inclusion au rang précédent, des fonctions de P_α. Après retrait des erreurs uniformes infinies, choisissons une sous-suite d'erreurs positives e_j telles que $3e_{j+1} \leq$

e_j, ou une sous-suite exacte. L'ajout de $2e_j$ préserve le rang et donne une suite décroissante vers la limite continue. Au rang un, la réciproque suit de Dini sur un voisinage compact pour les prédécesseurs lisses. Les rangs limites se traitent par localité, et la stabilisation donne l'inclusion des faisceaux finaux.

Ouvert fixé. Sans faisceautisation intermédiaire, formons plutôt les rangs par limites décroissantes sur un même ouvert U et par unions aux rangs limites. Pour une fonction f de cette hiérarchie, un compact $K \subset U$ et une barrière continue $h > f$ sur K, on obtient un majorant psh lisse sur U sous h sur K. Au successeur, la semi-continuité supérieure et la compacité choisissent un seul prédécesseur déjà sous h sur K, puis on applique l'induction. Au rang limite on descend à un rang inférieur. Pour f finie continue, les barrières $f + 1/j$ donnent l'approximation uniforme locale de rang un. Le raisonnement exige l'ouvert commun et ne fournit pas la réciproque faisceautisée.

26. Hessien courant d'une fonction psh intégrable

Texte visé. Proposition 8.3.1(a), p. 201.

`bt-trop.tex`, lignes 514–529.

Correction. Ajouter l'hypothèse de calibration ambiante G-localement constante. L'espace tropical reste sans bord, très riche et de niveau n, et u est localement intégrable. Pour une fonction lisse, la formule de Stokes à support compact donne $d'd''[u] = [d'd''u]$, ce qui donne la positivité lorsque u est lisse psh.

Sur un support test compact, pour une suite décroissante $u_j \downarrow u$ du passage au cran suivant, u_1^+ borne les parties positives et la partie négative de u borne les parties négatives. La semi-continuité supérieure de u_1 et l'intégrabilité locale de u donnent un majorant intégrable. Les courants $[u_j]$ convergent donc vers $[u]$ sur ces tests. La différentiation des courants et la positivité passent à la limite. La construction locale aux crans limites et l'argument de la proposition 8.1.12 donnent la conclusion pour les fonctions psh localement intégrables.

27. Détection du Hessien positif dans le cas lisse

Texte visé. Proposition 8.3.1(b), p. 201.

`bt-trop.tex`, lignes 530–533.

Correction. Conserver les hypothèses que l'espace est sans bord et très riche, et supposer la calibration ambiante G-localement constante. Pour u lisse, Stokes donne $d'd''[u] = [d'd''u]$. Si ce courant est positif, le corollaire 7.3.10 détecte la positivité de la forme lisse symétrique $d'd''u$ par les tests sur les parties squelettiques. Donc u est psh. La positivité dans le sens direct résulte de la même identité et de la positivité du Hessien de la fonction lisse psh.

28. Courant d'intégration et propriété de Bedford–Taylor

Texte visé. Exemple 8.6.4, p. 208.

`bt-trop.tex`, lignes 1340–1344.

Correction. Sur l'espace tropical sans bord, supposer la calibration ambiante G-localement constante. Le courant positif d'intégration δ_X est fermé par Stokes sur les supports tests compacts. Pour u continue psh au sens de la définition 8.1.7, on a $u\delta_X = [u]$, puis $d'd''(u\delta_X) = d'd''[u]$. Le hessien du produit dépend donc seulement du hessien courant du potentiel. Pour ce courant initial, la même identité à un seul facteur vaut avec le produit par intégration si u est localement intégrable. L'itération demande les conditions d'admissibilité de chaque facteur.

29. Potentiels admissibles pour le produit itéré

Texte visé. §8.7.1, p. 209.

`bt-trop.tex`, lignes 1415–1429.

Correction. Pour la construction par récurrence à partir d'un courant ordinaire positif fermé T, prendre $u_1, \dots, u_q$ dans CPsh_X au sens de la définition 8.1.7, en degré disponible. Chaque courant intermédiaire positif est d'ordre zéro et admet la multiplication par le potentiel continu suivant. Le lemme 8.5.5 donne la positivité et la fermeture à chaque application de $S \mapsto d'd''(u_i S)$. Toute classe de potentiels singuliers utilisée dans une telle itération doit assurer l'admissibilité par rapport à chacun des courants intermédiaires.

30. Unicité du multiplicateur continu

Texte visé. §8.8.5, pp. 211–212.

`bt-trop.tex`, lignes 1674–1697.

Correction. Pour les arguments $u^1, \dots, u^p$ fixés, demander la continuité en u^0 pour la convergence localement uniforme sur les supports tests compacts. Par multilinéarité, les arguments psh continus positifs déterminent localement le produit sur les premiers arguments dpsh. Les fonctions lisses sont dpsh et localement uniformément denses dans les fonctions continues, ce qui donne l'unicité avec la continuité demandée. L'existence vient de la multiplication canonique du courant produit d'ordre zéro par u^0. Une formulation équivalente impose directement cette multiplication.

31. Positivité de la mesure de Monge–Ampère

Texte visé. Définition 8.8.8, dernière assertion, p. 212.

`bt-trop.tex`, lignes 1760–1767.

Correction. Soit X un espace tropical sans bord de niveau n à calibration ambiante G-localement constante, et soit $u \in \mathrm{CPsh}_X$ au sens de la définition 8.1.7. Le courant d'intégration δ_X est positif fermé. En itérant $S \mapsto d'd''(uS)$ à partir de δ_X, on obtient un courant positif de degré maximal. Son action sur les tests scalaires définit la mesure de Radon positive $\mathrm{MA}(u)$.

32. Annulation au-delà de la dimension de la cible

Texte visé. Remarque 8.8.9, pp. 212–213.

`bt-trop.tex`, lignes 1771–1797.

Correction. Pour $f : Y \to X$, supposer Y sans bord et à calibration ambiante G-localement constante. Écrire le produit en degré disponible sur Y à partir de δ_Y. Avec $p > \dim X$, le produit des p hessiens lisses sur Y est le courant de la forme tirée en arrière depuis X, où elle s'annule par la dimension tropicale.

Pour des facteurs psh localement bornés, faire le passage ordinal de l'intérieur vers l'extérieur dans l'ordre d'itération choisi. À chaque étape le courant intérieur positif fermé est fixé. Les approximants décroissants ont un encadrement commun sur les supports tests compacts et la convergence dominée vaut à courant fixé. Les facteurs extérieurs encore lisses agissent par produits extérieurs, continus sur les courants. L'annulation se conserve aux limites et la construction est locale aux crans limites. Pour les facteurs dpsh, le tiré en arrière préserve la classe continue psh et la multilinéarité donne l'annulation.

33. Somme des masses atomiques du maximum affine

Texte visé. Proposition 8.9.4, formule atomique, p. 214.

`bt-trop.tex`, lignes 1891–1912.

Correction. Supposer X sans bord, de niveau n, et de calibration ambiante G-localement constante. Pour la famille affine finie non vide $f = (f_i)_i$, soit $g = \max_i f_i$. Les mesures des approximants lisses sont portées par $\Sigma_f^{(n)}$, comme leur limite. En x sur ce squelette, ne garder dans le lissage que les indices actifs, ceux pour lesquels $f_i(x) = g(x)$. Le maximum est inchangé sur un voisinage ordinaire de x.

Sur chaque n-cellule incidente C, transporter le calibrage constant au polytope $D = f(C)$ et dilater autour de $\xi = f(x)$. Le facteur ε^{-n} du hessien maximal compense le jacobien. Le domaine dilaté épuise le cône de D en ξ, et la limite contre un test ambiant φ de support compact est la masse calibrée du cône multipliée par $\varphi(x)$. On additionne ces masses sur les cônes images en additionnant les calibrages sur leurs recouvrements. On obtient λ_x, la masse du cône tropical calibré de f en x pour les indices actifs.

Sur un voisinage ambiant de x, les tests compacts donnent $\mathrm{MA}(g) = \lambda_x \delta_x$. Hors du squelette la mesure est nulle localement. Ainsi $\mathrm{MA}(g) = \sum_x \lambda_x \delta_x$, avec des poids non nuls formant un ensemble fermé et discret et une somme localement finie. En niveau zéro, la formule redonne la mesure de comptage calibrée.

34. Annulation lorsque la dimension tropicale locale est trop petite

Texte visé. Proposition 8.9.4, dernière assertion, p. 214.

`bt-trop.tex`, lignes 1913–1914.

Correction. Sous les hypothèses sans bord et de calibration ambiante G-localement constante, fixer j et poser $h = (f_i - f_j)_i$. Si $\dim_{\mathrm{trop},x} h < n$, choisir un voisinage domanial compact de x où l'image tropicale est de dimension $< n$. Le lissage

$$f_j + \varepsilon \log \sum_i \exp((f_i - f_j)/\varepsilon)$$

a son hessien tiré en arrière par h, puisque f_j est affine. Sa puissance n-ième est donc nulle sur cette image de dimension inférieure à n. La convergence localement uniforme vers $\max_i f_i$ et la continuité du produit donnent l'annulation de la mesure près de x.

35. Composition convexe le long d'un courant squelettique

Texte visé. Corollaire 8.11.3, p. 223, `bt-trop.tex`, lignes 2603–2620.

Contre-exemple. Prenons la réunion des deux axes dans le plan avec les affines induites et le poids unitaire sur les quatre demi-droites. Ce graphe tropical de niveau un est sans bord. Les coordonnées le séparent, les domaines paralinéaires s'y décrivent localement par des inégalités affines et les germes affines s'étendent. Ses petites cellules unidimensionnelles donnent la richesse et la très grande richesse. Les traces de bord de domaines sont de dimension zéro. Les quatre vecteurs sortants ont somme nulle et gardent cette propriété dans toute carte affine. Le courant T d'intégration sur l'axe vertical complet est positif et fermé. La fonction $h = |x| - |y|$ est une différence de deux fonctions psh, et la somme de ses quatre pentes vaut zéro. Par intégration par parties, elle est harmonique sur la croix. La carte (x, y, h) est harmonique, et la troisième coordonnée est convexe. Pourtant $d'd''(hT) = -2\delta_0$.

Correction. Sur le lieu sans bord à calibrage ambiant G-localement constant, supposer T squelettique de Bedford–Taylor et v convexe finie sur un voisinage ouvert convexe de l'image

de la carte harmonique f. Localement, l'écriture des coordonnées harmoniques comme différences de psh continues et un majorant commun des pentes donnent une décomposition contrôlée de $v \circ f$. Pour v lisse, l'identité différentielle appliquée au courant squelettique initial donne $d'd''((v \circ f)T) = T \wedge f^*(d'd''v)$, qui est positif. La régularisation convexe sur des compacts intérieurs converge localement uniformément. L'ordre zéro de T et la continuité des dérivées de courants donnent le résultat en passant à la limite.

36. Positivité de l'intersection avec un graphe

Texte visé. Proposition 9.5.2, p. 247, `intertrop.tex`, lignes 2023–2035.

Contre-exemple. Sur la croix tropicale de poids unitaire décrite en n° 35, posons $h = |x| - |y|$, et prenons comme base l'intégration sur l'axe vertical. Sur le produit de cet axe avec $\mathbf{R}_t$, le potentiel $\max(h, t)$ vaut $\max(-|y|, t)$. Près de $y = 0$ avec $t < -1$, sa hessienne appliquée au courant d'intégration donne -2 fois le courant de la droite $\{0\} \times \mathbf{R}_t$. Un test positif compact dans cette région donne une valeur négative.

Correction. Avec un calibrage ambiant G-localement constant, une application affine donne des maxima continus psh. La construction ordinaire de Bedford–Taylor donne alors un courant positif fermé pour une base positive fermée. Pour une application harmonique, supposons en outre l'espace sans bord et la base squelettique de Bedford–Taylor. Si $f_i = a - b$ est une décomposition locale en psh continues, le maximum régularisé équivariant par translation vérifie $M_\varepsilon(f_i, t_i) = M_\varepsilon(a, b + t_i) - b$. L'action squelettique directe et l'identité différentielle donnent la positivité pour la composition convexe lisse. L'ordre zéro permet le passage au maximum exact. Ce pas préserve l'identité de Bedford–Taylor, et le maximum exact paralinéaire redonne un courant squelettique par le théorème 8.10.3. On peut donc itérer sur les maxima exacts. La positivité générale pour une base non squelettique de Bedford–Taylor reste ouverte.

37. Support de l'intersection avec un graphe

Texte visé. Lemme 9.5.4, p. 248, `intertrop.tex`, lignes 2064–2096.

Contre-exemple. Dans la croix unitaire avec $h = |x| - |y|$ et la base verticale de n° 36, le courant est -2 fois l'intégration sur $\{0\} \times \mathbf{R}_t$ près de l'origine de la croix et pour $t < -1$. Le graphe de h passe en $t = 0$ au-dessus de l'origine. Le courant a donc du support hors du graphe.

Correction. Sous calibrage ambiant G-localement constant, le support est contenu dans le graphe pour une carte affine et une base positive fermée ordinaire, ou pour une carte harmonique et une base de Bedford–Taylor. Hors du graphe, un maximum $\max(f_i, t_i)$ est localement égal à une seule des branches. Dans le cas affine, le produit différentiel de cette branche avec le courant fermé s'annule. Dans le cas harmonique, sa hessienne comme courant ambiant est nulle. Le produit avec la base de Bedford–Taylor dépend de ces hessiennes ambiantes et s'annule donc dans ce voisinage. Cet argument de support utilise aussi les bases non squelettiques de Bedford–Taylor. La positivité relève de n° 36.

38. Propreté du support au-dessus de la base

Texte visé. §9.5.5, p. 248, `intertrop.tex`, lignes 2098–2112.

Contre-exemple. Pour la croix et la base verticale de n° 36, les points $(0, t)$ avec $t < -1$ appartiennent au support. La fibre du support au-dessus de l'origine est donc non compacte. La condition de propreté invoquée pour cette image directe échoue.

Correction. Avec un calibrage ambiant G-localement constant, prendre f affine avec base positive fermée, ou f harmonique avec base de Bedford–Taylor. Le support est alors contenu dans le graphe selon n° 37. La projection du graphe sur la base est un homéomorphisme, et la

restriction au support fermé est propre. L'image directe est donc définie par le procédé indiqué. Si seule la condition de support a été vérifiée dans le cas harmonique, l'image directe est un courant signé fermé.

39. Factorisation ordinaire par le graphe affine

Texte visé. Proposition 9.5.7, pp. 249–250.

`intertrop.tex`, lignes 2153–2237.

Correction. Pour une application affine f, une base positive fermée ordinaire et un calibrage ambiant G-localement constant, la formule

$$\langle S \cap \Gamma_f, \omega \rangle = \langle j^! S, j^* \omega \rangle$$

vaut pour les tests lisses ordinaires compacts. Le changement affine $(x,t) \mapsto (x, t - f(x))$ ramène au graphe nul. Les maxima régularisés dépendent alors seulement des coordonnées verticales. Le produit de leurs hessiennes tue les termes tests de degré vertical positif. Pour les coefficients restants, le support sur le graphe et l'ordre zéro ramènent à leur valeur en $t = 0$. On obtient exactement le tiré en arrière par j. La construction pour des formes G-lisses exige une action tangentielle, par exemple sur la base squelettique vérifiée en n° 41.

Contre-exemple. Pour l'application harmonique de la croix de n° 40, prenons $S = T \otimes [b(t) d't \wedge d''t]$, avec $b \geq 0$ à support compact dans $(-3,-1)$ et d'intégrale un. Le courant $S \cap \Gamma_f$ est à support compact, donc son image directe $j^! S$ est définie. Un test lisse ordinaire non négatif près de la croisée et des $t < 0$ où $b > 0$ peut être choisi disjoint du graphe et strictement positif sur une partie de l'atome central pondéré. Pour ce test ω, on a $j^*\omega = 0$ et $\langle S \cap \Gamma_f, \omega \rangle = -2 \int b(t) \omega(0,0,t)\, dt < 0$.

40. Intersection avec le graphe et produit par un tiré en arrière lisse

Texte visé. Proposition 9.6.4, pp. 251–253.

`intertrop.tex`, lignes 2294–2451.

Contre-exemple. Sur la croix unitaire de n° 36, gardons $h = |x| - |y|$ et l'intégration verticale T. Prenons $\beta = b(t) d't \wedge d''t$, avec $b \geq 0$ lisse, d'intégrale un et à support compact dans $(-3,-1)$. Pour $t < 0$ sur la droite verticale, la dérivée seconde en y de $\max(-|y|, t)$ vaut $\delta_t - 2\delta_0 + \delta_{-t}$. Le produit avec β est à support compact, et son image directe donne $T \cap_h [\beta] = T \wedge h^*\beta - 2\delta_0$. Le tiré en arrière est défini sur la droite, avec coefficient nul près de l'origine et composition affine ailleurs.

Correction. Supposer f affine, β lisse ordinaire positive fermée et le calibrage ambiant G-localement constant. Pour une base positive fermée ordinaire, les maxima régularisés sont des potentiels lisses ordinaires. Par continuité du produit, leurs hessiennes calculent la limite du courant de graphe. Après le changement affine de la coordonnée verticale, les hessiennes donnent la densité du noyau dans le volume complet des fibres. Avec le degré, les signes et les facteurs des corrections n° 578, n° 270, n° 272, n° 271, l'intégration dans les fibres est une approximation de l'identité sur les coefficients de β. La limite est l'évaluation de $S \wedge f^*\beta$.

41. Formes G-lisses cibles et action tangentielle du graphe

Texte visé. Corollaire 9.6.5, p. 253, `intertrop.tex`, lignes 2591–2602.

Correction. Supposons X sans bord à calibrage ambiant G-localement constant, f affine et S un courant ordinaire positif fermé squelettique de bidimension (r,r). Pour toute G-forme G-lisse positive β de type (q,q) avec $[\beta]$ fermé, on a $S \cap_f [\beta] = S \wedge f^*\beta$, avec l'action squelettique directe. Les deux termes sont nuls par degré si $q > r$.

Régularisons les maxima avec des noyaux de masse un. Pour un test ordinaire compact Ω, la localisation sur une carte conjointe avec f donne un porteur fini en cellules compactes. Dans la variable de fibre $z = y - f(x)$, les hessiennes régularisées donnent le volume complet de fibre multiplié par le noyau $K_\varepsilon(z)$. En posant $a_z(x) = f(x) + z$ et $j_z(x) = (x, f(x) + z)$, la contribution d'une cellule C devient

$$\int K_\varepsilon(z) \left(\int_C a_z^* \beta \wedge j_z^* \Omega \right) dz.$$

Pour chaque ε, l'intégration d'abord en fibre est licite, car les coefficients de β sont bornés sur les morceaux compacts et le noyau rend le résultat lisse dans les paramètres de carte. Subdivisons la cible en cellules portant des représentants lisses jusqu'aux faces, et la source selon leurs images réciproques. Dans l'intérieur d'une cellule source, df prend ses valeurs dans le tangent de la face cible correspondante. Les représentants incidents ont la même restriction sur ce tangent, y compris si la cellule entière est envoyée dans une face propre. Après remise à l'échelle du noyau, convergence dominée et variation calibrée finie donnent la limite $\int_C f^* \beta \wedge j^* \Omega$. La somme donne le courant image par j du produit squelettique. Comme la projection du graphe est propre et inverse de j, elle donne la formule annoncée.

42. Nombre d'équations homogènes en codimension donnée

Texte visé. Lemme 10.4.4, p. 274.

`redgrad.tex`, lignes 957–965.

Contre-exemple. Sur k trivialement gradué, prendre $A = k[a, b, c, d]/(ad - bc)$ avec degrés $2, 3, 5, 15/2$. Le corps gradué engendré par a, b, c a groupe de degrés de rang rationnel 3 et corps de degré 1 égal à k. La dimension graduée de $X = \operatorname{Spec}_{\mathrm{gr}} A$ est donc 3 et celle de l'origine est 0. Une équation homogène s'annulant à l'origine a une restriction non nulle sur au plus un des quatre axes. Une restriction non nulle sur deux axes imposerait une égalité de puissances positives de deux degrés, impossible pour ces quatre nombres. Trois équations laissent un axe entier. Tous les degrés des générateurs sont supérieurs à 1, donc tout homogène hors de l'idéal de l'origine est une constante non nulle. Les ouverts de base contenant l'origine sont alors égaux à X.

Correction. Dans le cas gradué, prendre une famille finie de générateurs homogènes de l'idéal sur un voisinage affine, sans borne par la codimension. Dans le cas ordinaire intègre de type fini, le système de paramètres à l'anneau local du point générique de Y donne $n - m$ équations après élimination des dénominateurs, puis retrait des autres composantes de leur lieu des zéros. L'application à la proposition 18.9.2 utilise la preuve distincte par pinceaux de coordonnées.

43. Dimension sur un groupe de paramètres ordonné

Texte visé. § 10.5.6, p. 280.

`redgrad.tex`, lignes 1338–1369.

Contre-exemple. Pour $G = \{1\}$, $n = 1$ et $D = \Gamma_G$, tout pavé utilisant seulement les paramètres de G est de dimension 0. Une valeur $h \neq 1$ dans un groupe divisible ordonné d'évaluation donne pourtant un rang rationnel 1.

Correction. Définir $\dim D$, pour $D \neq \emptyset$, comme le maximum de

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\langle G, h_1, \ldots, h_n \rangle_{\mathbb{Q}} / G_{\mathbb{Q}})$$

sur les groupes divisibles ordonnés non triviaux H contenant G et sur $h \in D(H)$, où les crochets désignent l'enveloppe divisible dans H. On pose $\dim \emptyset = -\infty$. Dans une

décomposition en cellules de signes rationnels, ce maximum est le maximum de n moins le rang des équations sur une cellule non vide. La faisabilité des systèmes rationnels d'égalités et d'inégalités strictes est invariante par extension ordonnée des paramètres, par élimination linéaire. Des perturbations lexicographiques des coordonnées libres préservent les inégalités strictes et permettent d'atteindre le rang de la cellule. On retrouve ainsi le maximum des dimensions de pavés en permettant leurs paramètres dans un groupe d'évaluation. La dimension globale est invariante par extension du groupe des paramètres.

44. Voisinages pour la dimension locale

Texte visé. § 10.5.6, p. 280.

`redgrad.tex`, lignes 1373–1379.

Contre-exemple. En notation additive, prendre $G = \mathbb{Q} \subset H = \mathbb{Q} \oplus_{\text{lex}} \mathbb{Q}$ comme seconde composante et $h = (1, 0)$. Aucun intervalle à bornes dans G ne contient h. Le minimum imprimé peut donc porter sur une famille vide.

Correction. Pour $h \in D(H)$, prendre H comme groupe de paramètres et intersecter D avec les boîtes centrées en h, de rayons strictement positifs dans H. La dimension locale est le minimum des dimensions intrinsèques de ces intersections. Sur des boîtes assez petites, les formes affines non nulles en h gardent leur signe. Après translation, les signes restants définissent un cône rationnel homogène. La dimension de ce cône donne le minimum et est inchangée par extension ordonnée. Le maximum des dimensions locales redonne la dimension globale. La pureté équivaut à la constance de la dimension locale et se teste sur un groupe d'évaluation. Ces règles concernent la dimension des ensembles définissables.

45. Degré fini dans le nombre d'intersection

Texte visé. § 10.7.11, p. 292.

`redgrad.tex`, lignes 2373–2393.

Contre-exemple. Pour $K = \mathbb{Q}$, $L = \overline{\mathbb{Q}}(t)$, $n = 1$ et $V = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$, le pré-modèle $(V, \mathscr{O}(1))$ a intégrale 1, mais $[L : \mathbb{Q}(t)]$ est infini. Le produit affiché ne définit donc pas un entier.

Correction. Pour le nombre d'intersection, supposer L/K de type fini. Quand $n = \operatorname{trdeg}(L/K) = \dim V$, le degré $[L : K(V)]$ est fini. Sur un modèle propre commun de corps des fonctions L, la formule de projection donne

$$[L : K(V)] \int_V c_1(F_1) \cdots c_1(F_n).$$

Les F_i sont les fibrés du pré-modèle. La comparaison sur un modèle commun donne l'indépendance du choix, avec contribution nulle lorsque $\dim V < n$. Si $n > \operatorname{trdeg}(L/K)$, toutes les contributions sont nulles.

46. Existence d'un modèle de corps des fonctions donné

Texte visé. § 10.7.11, p. 292.

`redgrad.tex`, lignes 2381–2385.

Correction. La possibilité de choisir un modèle propre dont le corps des fonctions soit L requiert que L/K soit de type fini. Un modèle s'obtient alors en compactifiant un modèle affine de type fini. La construction du pré-modèle propre d'une famille de fibrés reste distincte.

Contre-exemple. L'extension $\overline{\mathbb{Q}}(t)/\mathbb{Q}$ a degré de transcendance 1, mais n'est pas de type fini. Un nombre fini de fonctions rationnelles n'utilise que des coefficients dans un corps de nombres. Ces fonctions ne peuvent donc engendrer $\overline{\mathbb{Q}}(t)$.

47. Borne de dimension de l'image tropicale compacte

Texte visé. Théorème 12.2.4, p. 335.

`squelettes.tex`, lignes 552–557.

Correction. Le polyèdre compact $f_{\mathrm{trop}}(X)$ vérifie $\dim f_{\mathrm{trop}}(X) \leq \dim X$. Pour obtenir la borne, prendre autour de chaque x un voisinage analytique compact et le rétrécir pour que son image reste dans la région autour de $f_{\mathrm{trop}}(x)$ où s'applique l'estimation locale de la proposition 12.2.8. Un recouvrement fini de X donne la borne globale.

Exemple. Un moment constant sur un anneau compact a pour image un point alors que l'anneau a dimension 1.

48. Voisinages dans la définition de la dimension tropicale

Texte visé. Définition 12.2.10, p. 336.

`squelettes.tex`, lignes 697–715.

Correction. Prendre

$$\dim_{\mathrm{trop},x}(f) = \inf_{V} \dim f_{\mathrm{trop}}(V),$$

où V parcourt les voisinages analytiques compacts de x dans X. Un domaine compact contenant x peut fixer tous les modules $|f_i|$ à leurs valeurs en x et avoir une image ponctuelle. Cet infimum est la dimension du germe d'image stabilisé en $\xi = f_{\mathrm{trop}}(x)$. Pour la borne supérieure, prendre V assez petit dans le voisinage de stabilisation et le restreindre par l'image réciproque d'une boîte tropicale compacte contenant ξ en son intérieur et assez petite pour écarter les cellules non incidentes à ξ. Pour l'autre borne, tout voisinage analytique compact de x contient un plus petit voisinage où le germe de l'image est stabilisé.

49. Corps résiduel de base du degré relatif

Texte visé. Proposition 12.2.14, p. 337.

`squelettes.tex`, lignes 797–816.

Correction. Pour $p : Y \to X$, $x = p(y)$, poser $B = \widetilde{\mathscr{H}(x)}$ et $a_i = \widetilde{g_i(y)}$. Le degré à utiliser est

$$d = \mathrm{trdeg}_B\, B(a_1, \dots, a_n)$$

dans le corps gradué $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$. C'est ce degré qui intervient dans le choix des d caractères. La normalisation de leurs formules relève du calcul traité séparément dans n° 337.

50. Dimension de l'image tropicale pour une source compacte

Texte visé. Proposition 12.3.4, pp. 341–342.

`squelettes.tex`, lignes 1128–1148.

Correction. Supposer X compact et de dimension pure n, avec le lieu de dimension relative r dense. Écrire $\tau = f_{\mathrm{trop}}$, $P = \tau(X)$ et prendre pour $q_f(x)$ la dimension tropicale de f calculée

sur les voisinages analytiques compacts de x, comme dans n° 48. Alors

$$q_f(x) \leq n - \dim f^{-1}(f(x)), \quad \dim P \leq n - r, \qquad \dim_\xi P = n - r \quad (\xi \in P \setminus \tau(\partial X)).$$

Si X est affinoïde, tout $\xi \in P \setminus \tau(\partial X)$ a $\dim_\xi P = n$. En particulier $P = \tau(\partial X)$ si $r > 0$.

Pour la borne supérieure, un point de rang maximal dans la fibre sur $t = f(x)$ donne $d_k(t) + \dim f^{-1}(t) \leq n$. Le rang des coordonnées résiduelles du moment est au plus $d_k(t)$. La borne locale donne un petit voisinage compact avec cette borne de dimension d'image. La semi-continuité de la dimension des fibres et le recouvrement fini donnent $\dim P \leq n - r$.

Pour la borne inférieure, rendre stricts les domaines pertinents par une extension complète, en conservant l'exclusion de l'image du bord. On se ramène aux composantes réduites de dimension n. Si $\dim_\xi P = 0$, la connexité de la composante force une image ponctuelle. L'exclusion du bord donne alors un espace propre, avec fonctions globales constantes après extension à un corps algébriquement clos. Dans le cas affinoïde cela impose $n = 0$.

Sinon, choisir un hyperplan rationnel passant par ξ dont l'intersection avec P perd au moins une dimension locale. Cet hyperplan fixe la valeur du module d'un caractère h du moment. Un niveau $h = \lambda$ passant au-dessus de ξ, choisi hors des niveaux exceptionnels, donne une composante de dimension $n - 1$ où le lieu de dimension relative r reste dense. L'exclusion du bord persiste. L'induction sur cette composante, affinoïde si la source l'est, fournit les deux bornes inférieures.

Exemple sans compacité. Sur le disque ouvert $|T| < 1$ sur $\mathbb{Q}_3$, le moment $1 + T$ a des fibres de dimension 0 et son module vaut partout 1. L'image tropicale est un point et le bord est vide.

51. Comparaison des représentants compacts sur une cible séparée

Texte visé. Lemme 13.4.4, p. 384.

`complements-ga.tex`, lignes 1072–1091.

Correction. Fixer un ouvert séparé U de la cible contenant x, et supposer que les deux domaines compacts V, V' considérés sont contenus dans $f^{-1}(U)$. Ce sont des voisinages de la même partie compacte W de la fibre, et leur intersection avec $f^{-1}(x)$ est W dans les deux cas. Dans V, l'ouvert relatif $O = \mathrm{Int}_V(V \cap V')$ contient cette partie de la fibre. L'image de $V \setminus O$ est compacte, fermée dans U, et évite x. En la retirant de U, toute la partie de chaque fibre qui se trouve dans V est contenue dans V'. L'argument réciproque donne l'égalité des parties de fibres et des degrés près de x.

Pour voir la nécessité de la condition, sur $\mathbf{Q}_3$ recoller deux disques unités fermés le long du disque privé de l'origine. Soit f la projection de leur union disjointe sur cet espace à deux origines. Au-dessus de la première origine, le premier disque seul et l'union disjointe ont la même fibre réduite, de degré 1. Leurs degrés aux points communs $T = 3^n$ valent respectivement 1 et 2, alors que ces points tendent vers la première origine.

52. Définition du germe de degré avec cible localisée

Texte visé. §13.4.5, définition, p. 384.

`complements-ga.tex`, lignes 1094–1105.

Correction. Soit y isolé dans la fibre au-dessus de $x = f(y)$. Choisir un ouvert séparé U de la cible contenant x. Prendre un voisinage analytique compact V de y dans $f^{-1}(U)$, dont l'intersection avec $f^{-1}(x)$ est $\{y\}$. Le germe en x de $\xi \mapsto \deg_\xi(f|_V)$ définit le degré local. Les voisinages de ce type existent par la base des voisinages analytiques compacts et l'isolement de y dans sa fibre.

Pour un même U, le lemme 13.4.4 corrigé en n° 51 donne l'indépendance de V. Pour deux choix U_1, U_2, prendre un troisième voisinage compact de y dans l'intersection des deux représentants et au-dessus de $U_1 \cap U_2$. La comparaison dans chacun des ouverts séparés initiaux donne le même germe.

53. Partie de dimension maximale dans la formule de produit

Texte visé. Théorème 14.7.2(b), pp. 418–420.

`calibrage.tex`, lignes 4366–4374.

Correction. Pour $\Gamma =]-\infty, \log r[^d$, la formule de l'image calibrée est

$$\big(h_{\mathrm{trop}}(X') \cap (\mathbb{R}^N \times \Gamma)\big)^{(n)} = P \times \Gamma.$$

La partie de dimension n du membre de gauche porte le calibrage comparé dans la preuve. L'inclusion issue de (a) fournit $P \times \Gamma$, et l'autre inclusion prend la partie de dimension n de l'image contenue dans $g_{\mathrm{trop}}(X_y) \times \Gamma$.

Exemple. Sur $\mathbb{Q}_3$, prendre le bidisque fermé de coordonnées S, T, le morphisme $f = S$ et le moment auxiliaire $g = 1$. Les fibres non vides de f sont des disques de dimension 1. La partie purement unidimensionnelle P de l'image de g sur la fibre en zéro est vide. Pour $S \neq 0$, l'image de $h = (g, f)$ contient des points $(0, \log|S|)$ avec $|S| < r$ pour tout $r > 0$. Son intersection avec la bande peut donc être non vide.

54. Dimension ambiante dans la preuve d'harmonie

Texte visé. Preuve du théorème 15.6.1, p. 429.

`fd-berk.tex`, lignes 2232–2244.

Correction. Pour la carte $f : U \to \mathbb{R}^m$, garder m comme dimension ambiante, et n comme niveau analytique, dimension des cellules maximales et degré extérieur. Près d'un point de l'intérieur relatif de la facette, la structure affine exprime les coordonnées comme combinaisons rationnelles de logarithmes de normes d'unités et d'une constante. Sur un même ouvert ordinaire, chasser les dénominateurs par un entier $N > 0$ et prendre les produits de puissances entières des unités. Le moment obtenu va vers $\mathbb{G}_m^m$, et sa tropicalisation vaut $N(f - c)$, une transformation affine de f dans $\mathbb{R}^m$. Ce changement transporte la discordance de la facette.

Pour le calcul suivant, utiliser les projections intégrales $\mathbb{G}_m^m \to \mathbb{G}_m^n$ de rang n sur les espaces directeurs des cellules maximales incidentes. Ces conditions définissent un ouvert de Zariski non vide de matrices. Les sommes signées de degrés s'annulent pour ses matrices entières, qui sont Zariski denses. Les coefficients de la discordance extérieure sont donc nuls, car les projections sur les coordonnées les lisent dans le polynôme des déterminants.

Exemple. Sur $\mathbb{Q}_3$, le moment $(T, 1+T)$ sur $\mathbb{G}_m^{\mathrm{an}} \setminus \{-1\}$ donne près du point de Gauss unité les directions logarithmiques $(t, 0)$ et $(0, t)$ pour $t < 0$, et (t, t) pour $t > 0$. Les points de Gauss de rayons correspondants centrés en 0 ou -1 tendent vers le même point. L'image engendre donc un espace affine de dimension 2 dans tout voisinage de ce point, alors que le niveau analytique vaut 1.

55. Signe du poids dans l'intégrale sur les fibres

Texte visé. Proposition 16.2.2(b), p. 438.

`courants-berk.tex`, lignes 238–270.

Correction. Pour la semi-continuité supérieure, supposer que $\lambda\omega$ est faiblement positive. Il suffit en particulier d'imposer $\lambda \geq 0$ en plus de la faible positivité de ω. Un poids négatif sur une composante annulaire peut donner un saut vers le bas. L'argument pour les poids admissibles utilise la limite corrigée le long des cocellules (n° 418) et les résultats cités sur le degré et la platitude.

56. Semi-continuité supérieure pour une source séparée

Texte visé. Preuve du théorème 16.3.3(c), p. 448. `courants-berk.tex`, lignes 1072–1076.

Étape à remplacer. L'adhérence ambiante d'un atome Ω_J peut ajouter une fibre entière. Pour $p = \mathrm{id}$ sur la couronne $\{|3| \leq |T| \leq |3|^{-1}\}$ sur $\mathbb{Q}_3$, prendre $\omega = 1$, $W_1 = Y$ et $W_2 = \{|3| \leq |T| \leq 1\}$. L'atome $W_1 \setminus W_2$ exclut le point de Gauss unité, que son adhérence contient. Sur cette fibre, les intégrales des deux indicatrices valent 0 et 1.

Preuve de remplacement. Les bords absolus des fibres des cartes affinoïdes sont de mesure nulle. Hors de ces bords, les images dans $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ des générateurs homogènes des réductions des cartes sont algébriques sur $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$. Pour chaque point ainsi choisi, un changement de base fini et libre scinde ces polynômes. Les réductions des cartes ainsi obtenues proviennent d'inégalités sur la base. L'équivalence de Temkin transforme ces égalités de réductions en égalités de germes de domaines. Près de chaque point relevé et sur chaque fibre voisine qui rencontre le voisinage, le support du terme à poids continu y est contenu dans une même carte.

Le transport de la mesure par extension des scalaires et la propreté du changement de base donnent la même borne sur la base initiale. Une partition continue finie assemble ces termes. Le voisinage des bords a une contribution arbitrairement petite par positivité et par comparaison sur les cartes fixes. On obtient ainsi (c) sous les hypothèses de l'énoncé.

57. Intégrales de fibre sur le support squelettique commun

Texte visé. Preuve du théorème 16.5.7, p. 458.

`courants-berk.tex`, lignes 1852–1866.

Contre-exemple. Soit p l'éclatement de l'origine du plan affine analytique et $\omega = p^*\rho$, où ρ est lisse à support compact et vaut un près de l'origine. La dimension relative attendue est zéro. En dehors de l'origine, la fibre ponctuelle donne $u_\omega = \rho$. À l'origine, la fibre est une droite projective et la convention de 16.5.7 donne $u_\omega(0) = 0$. La fonction saute à l'origine.

Correction. Sur le support squelettique compact maximal commun des mesures de coefficients, prendre un moment de base f et des cartes de fibre g_i. Les parties caractéristiques entières des cartes $(f \circ p, g_i)$ qui contribuent au-dessus de ce support sont compactes. Leurs coordonnées résiduelles conjointes ont le degré maximal, par additivité entre le corps de base, le corps résiduel complété du point de base et la fibre. Elles sont donc dans le lieu plat. Une seule coupure lisse compacte dans ce lieu, égale à un près de leur réunion, conserve l'intégrale fibre par fibre sur le support commun. L'inclusion–exclusion vérifie la même identité sur les intersections de cartes. Le cas plat et sans bord corrigé de 16.3.3(d) donne un prolongement continu et G-lisse de cette restriction. Multiplié par une coupure au but qui vaut un près du support commun, ce prolongement permet de tester la limite faible des mesures de Radon signées.

58. Exposant de Hausdorff et bidimension du courant

Texte visé. Corollaire 16.8.6, p. 465.

`courants-berk.tex`, lignes 2742–2750.

Correction. Dans l'énoncé et la preuve, demander que A soit tropicalement $\mathscr{H}^{n-p}$-négligeable. Les p facteurs $d'd''u_i$ donnent un courant de bidimension $(n-p, n-p)$, qui fixe l'indice du théorème de négligeabilité.

Sur $\mathbf{G}_m^{\mathrm{an}}$ au-dessus d'un corps non trivialement valué, prenons $n = p = 1$, $u = |\log|T||$, $\alpha = 1$ et $A = \{\eta_1\}$. Toute image tropicale de ce singleton est $\mathscr{H}^1$-négligeable. Sur le squelette calibré, la dérivée seconde de $|t|$, pour $t = \log|T|$, est $2\delta_0$. La mesure $d'd''[u] = 2\delta_{\eta_1}$ charge donc A. La correction d'indice laisse subsister les conditions propres à l'argument de descente en valuation triviale.

59. Sous-niveau compact d'une fonction psh lisse

Texte visé. Proposition 16.9.1, p. 466.

`courants-berk.tex`, lignes 2934–2941.

Correction. Pour chaque point x, construire sur un voisinage ouvert U une fonction psh lisse ρ telle que $\rho(x) < 0$ et $\{\rho \leq 0\}$ soit compact dans U. L'ouvert $\{\rho < 0\}$ est alors un voisinage relativement compact de x dans U. Imposer $\rho < 0$ sur tout U rendrait le sous-niveau égal à U, alors que la construction ne donne sa compacité que pour le sous-niveau.

60. Prolongement du degré calibré sur l'ouvert fini

Texte visé. Corollaire 16.9.5, énoncé, p. 467.

`courants-berk.tex`, lignes 3059–3067.

Correction. Choisir un fermé de Zariski Z de dimension $< n$ contenant le complémentaire de l'ouvert de finitude et les intersections des composantes irréductibles de X. Sur chaque trace de composante dans $U = X \setminus Z$, donner au degré β, en tout point, la longueur générique de $f_*\mathscr{O}_Y$ divisée par la multiplicité générique de la composante cible. Sur Z, prendre des valeurs boréliennes localement bornées, par exemple 0.

Le degré ainsi prolongé est localement constant sur U et borné près du support compact du test. La mesure limite de Bedford–Taylor ne charge pas Z. Pour passer à la limite, choisir un compact de U portant la masse limite à une quantité arbitrairement petite près, puis une coupure continue à support dans U valant 1 sur ce compact. Le degré multiplié par cette coupure est un test continu. La convergence faible appliquée à la coupure complémentaire contrôle l'erreur, bornée par la masse écartée multipliée par une borne de β. Cela donne le passage à la limite avec le degré prolongé.

61. Courant source fermé et construction sur la cible

Texte visé. Preuve du corollaire 16.9.5, p. 468.

`courants-berk.tex`, lignes 3143–3154.

Correction. Pour le produit de Bedford–Taylor ordinaire sur Y, supposer le courant fondamental $[Y]$ fermé, par exemple lorsque Y est sans bord. La proposition 8.7.2, avec sa correction, donne alors la convergence des produits des approximants tirés en arrière, testés contre $f^*\alpha$. La limite pondérée de n° 60 permet de conclure avec le degré prolongé β.

Sous les hypothèses initiales sur f, définir un courant sur X par la limite des images directes des produits lisses approchants. La formule en degré maximal sur l'ouvert fini et la limite pondérée donnent sur la cible

$$\beta\, d'd''u_1 \wedge \cdots \wedge d'd''u_m.$$

De façon équivalente, itérer les potentiels u_i à partir du courant positif fermé $f_*[Y]$ sur X. Pour sa fermeture, les tests de bidegrés $(n-1, n)$ et $(n, n-1)$ s'annulent près de Z; leurs tirés en

arrière sont portés sur la source finie au-dessus de l'ouvert sans bord. Cette construction se teste sur X. Le produit mixte ordinaire sur les tests arbitraires de Y relève de la première formulation.

62. Normalisation dans le critère d'existence

Texte visé. Corollaire 17.4.12, p. 485.

`metriques.tex`, lignes 1195–1223.

Correction. Dans le critère (ii), utiliser une famille finie non vide et poser

$$r_i = (|a_i(x)|\,\|s(x)\|)^{-1}.$$

Chaque terme a alors la valeur requise en x. Le lemme 17.4.10 corrigé donne l'équivalence après relèvement des générateurs résiduels homogènes en unités au point presque bon. Le raffinement portant sur un corps gradué de définition utilise séparément les résultats de descente graduée cités dans la preuve.

63. Générateurs relatifs au corps gradué de définition

Texte visé. Corollaire 17.4.12, p. 485.

`metriques.tex`, lignes 1210–1212.

Correction. Pour obtenir $a_i(\widetilde{x)/a_j}(x) \in \Lambda$ pour tout couple (i,j), supposer que le fibré résiduel admet sur le corps gradué Λ un modèle engendré par ses sections globales. Écrire ses générateurs homogènes $b_i t$ dans un repère générique t. Après tiré en arrière, leur expression dans le repère résiduel $\widetilde{s(x)}$ multiplie tous les coefficients par le même facteur $t/\widetilde{s(x)}$. Les rapports restent les b_i/b_j dans Λ. Les relèvements analytiques inversibles préservant les formes initiales donnent les rapports prescrits. Dans l'équivalence d'existence précédente, utiliser les poids réciproques $r_i = (|a_i(x)|\,\|s(x)\|)^{-1}$ de n° 62.

64. Lissité et décalage gradué constant

Texte visé. Proposition 17.4.13, p. 485.

`metriques.tex`, lignes 1228–1258.

Correction. Sous les hypothèses du germe séparé et presque bon, la métrique est lisse au voisinage de x si et seulement s'il existe $n \geq 1$ et $r_0 > 0$ avec

$$\widetilde{L}_x^{\otimes n} \simeq \mathscr{O}[r_0].$$

La première partie de la proposition 12.5.4 donne $n \log \|s\| = \log|f| + c$. La base $f^{-1}s^{\otimes n}$ a donc la norme constante $r_0 = e^c$. Dans l'autre sens, l'équivalence des catégories de germes relève l'isométrie résiduelle et permet de prendre la racine tensorielle de la métrique constante. Pour supprimer le décalage, il faut une hypothèse de stricteté sur la métrique ou une condition de torsion sur la classe du décalage.

65. Génération du modèle strict sur le corps de définition

Texte visé. Corollaire 17.5.10, p. 488.

`metriques.tex`, lignes 1492–1494.

Correction. Pour imposer $a_i(\widetilde{x)/a_j}(x) \in \Lambda$ pour tous les indices, supposer que le modèle de $\widetilde{L_x}^1$ sur Λ est lui-même engendré par ses sections globales. Choisir une famille finie de générateurs et exprimer leurs coefficients dans un même repère. Une fois le modèle tiré en arrière, le passage au repère résiduel de s multiplie tous les coefficients par un facteur commun. Leurs rapports appartiennent encore à Λ. Le relèvement en germes analytiques d'unités conserve ces résidus de degré 1, et la formule du maximum vaut dans le germe strict. L'équivalence de génération globale sans contrainte sur les rapports garde ses hypothèses.

66. Dimension minimale d'un prémodèle simultané

Texte visé. Définition 17.6.1, p. 489.

`metriques.tex`, lignes 1534–1536.

Correction. Conserver la définition par le degré minimal d'un corps gradué de définition pour toute famille. Écrire « Cette dimension de définition résiduelle est aussi la dimension minimale d'un prémodèle de type fini » lorsque la famille est finie. Sur une famille finie de cartes affines communes de la réduction graduée, les coefficients de transition, leurs inverses et les dénominateurs nécessaires forment des données finies. Faire descendre ces données à un modèle de type fini du corps de définition choisi qui réalise le degré minimal. Son corps des fonctions donne la borne inverse.

67. Classe des métriques approchantes

Texte visé. Corollaire 17.7.6, p. 494.

`metriques.tex`, lignes 2093–2102.

Correction. Remplacer «paralinéaire strictement entière» par «paralinéaire stricte». Sur $\mathscr{M}(\mathbb{Q}_p)$, la norme $|p|^{1/2}$ est à distance logarithmique au moins $(\log p)/2$ de toute norme strictement entière de la section unité.

Sous les hypothèses de séparation et de paracompacité nécessaires aux résultats utilisés, écrire $m_0 = me^f$ pour une métrique initiale strictement entière m_0. Approcher f sur le compact voulu par une fonction paralinéaire stricte u et prendre $m_0 e^{-u}$. L'erreur logarithmique est $|f - u|$. L'approximation compacte s'obtient sans imposer de dénominateur uniforme sur tout X.

68. Voisinage commun pour les perturbations d'une métrique nef

Texte visé. Preuve de la proposition 17.8.4, pp. 497–498.

`metriques.tex`, lignes 2398–2428.

Correction. Fixer un même prémodèle projectif de degré 1, V, portant la droite nef M et une droite ample M'. Dans un plongement projectif de V, relever en unités analytiques les rapports de coordonnées homogènes non nuls au point générique. Relever aussi les coefficients rationnels de repères des deux droites sur un recouvrement standard fini. Les inégalités strictes des équations homogènes relevées et les comparaisons des rapports de repères avec les fractions de transition persistent sur un même voisinage ordinaire de x.

Les tubes projectifs tirés en arrière forment un recouvrement strict. Les rapports de repères de norme 1 s'y réduisent aux transitions prescrites. Pour chaque point du voisinage, les mêmes transitions donnent les restrictions de M et M' à la clôture réduite de sa spécialisation, puis, par image réciproque, les fibrés résiduels. L'isométrie résiduelle stricte identifie la première métrique à la métrique donnée après un rétrécissement commun.

Pour tous $m, n \geq 1$, $M^{\otimes n} \otimes (M')^{\otimes m}$ est ample. Une de ses puissances positives est engendrée par ses sections globales, ce qui vaut encore sur les clôtures de spécialisation ainsi qu'après image réciproque sur les modèles résiduels. La proposition 17.8.2 donne donc les poids psh $\phi + (m/n)h$ sur le même voisinage, où ϕ est le poids initial et h celui de la métrique auxiliaire. À la ligne 2420, la puissance est n. Sur un voisinage relativement compact plus petit, rendre h non négatif par ajout d'une constante. Les poids $\phi + \varepsilon h$, pour des rationnels $\varepsilon \downarrow 0$, décroissent vers ϕ, qui est donc psh.

69. Poids d'une semi-métrique psh singulière

Texte visé. § 18.1.4, p. 502.

`calculs.tex`, lignes 75–78.

Correction. Pour un repère local s du fibré en droites, prendre comme poids $\varphi_s = -\log \|s\|$. Si $s' = as$ pour une unité analytique a, alors $\varphi_{s'} = \varphi_s - \log|a|$. Dans la classe étendue, les φ_s sont de véritables fonctions psh à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et vérifient la condition complète de 5.7.2. Sur chaque cellule squelettique de dimension n, le poids transporté par tout isomorphisme paralinéaire vers une cellule de $\mathbb{R}^n$ est localement intégrable pour la mesure de Lebesgue. Des poids finis et continus redonnent les métriques psh de la définition 17.8.1. Là où $\varphi_s = -\infty$, la semi-métrique vaut $+\infty$ sur les vecteurs non nuls de la fibre. Le vecteur nul a norme 0.

70. Courant positif de courbure des poids psh

Texte visé. § 18.1.4, p. 502.

`calculs.tex`, lignes 88–91.

Correction. Dans les hypothèses de richesse de § 8.3, sur l'espace sans bord avec calibrage ambiant G-localement constant, la hessienne $d'd''[\varphi_s]$ d'un poids psh localement intégrable est un courant positif. Sur les intersections, les poids diffèrent par des logarithmes de normes d'unités, dont la hessienne est nulle. Les hessiennes se recollent donc en un unique courant $c_1(\overline{L})$, positif et fermé.

71. Degrés des fibres au voisinage de la fibre en zéro

Texte visé. Preuve de la proposition 18.7.3, avec la dimension relative de n° 864, p. 535.

`calculs.tex`, lignes 3423–3426.

Correction. Poser $r = n - d$. Pour une G-forme à coefficients tropicalement boréliens localement bornés, un recouvrement fini du support par des domaines analytiques compacts et l'inclusion-exclusion ramènent l'intégrale à un seul moment g sur un domaine compact. Le lemme 14.7.1 assure que, près de zéro, l'image tropicale de chaque fibre est contenue dans celle de la fibre centrale et que l'image du bord est contenue dans un sous-polyèdre de dimension au plus $r - 1$.

Sur chaque r-cellule C, choisir une projection monomiale p injective sur les directions de C. Restreindre $(p \circ g, f)$ à $g_{\mathrm{trop}}^{-1}(C)$. Aux points de Gauss de rang r du tore sur le corps résiduel complété du paramètre, dans l'intérieur relatif de la cellule projetée, les antécédents sont intérieurs et la fibre est de dimension zéro. Le critère de finitude sur un domaine compact donne la finitude locale.

Choisir un de ces points de Gauss dans la fibre centrale pour chaque cellule. L'anneau local de la cible produit y a pour idéal maximal les coordonnées $T_1, \ldots, T_d$ de la base. Elles forment une suite régulière sur l'anneau local et sur le module fini des antécédents, où elles agissent par les f_i. Le complexe de Koszul annule le premier Tor avec le corps résiduel. Le lemme de

Nakayama appliqué au noyau d'une présentation minimale montre que le module est libre. Par continuité de la section de Gauss et changement de base, le degré en ce point choisi reste constant lorsque le paramètre s'approche de zéro.

Sur chaque fibre fixée, les anneaux locaux des points de Gauss de rang plein du tore sont des corps. Le degré est donc constant sur l'intérieur relatif de C par connexité. Il est positif sur la fibre centrale puisque le théorème de l'image d'un moment fournit des antécédents. Sa conservation donne la même partie pure de dimension r sur les fibres voisines, avec le même calibrage. Les intégrales de la forme borélienne tropicale sont donc égales.

72. Immersion analytique après une extension complète

Texte visé. Théorème 18.9.3, p. 545.

`calculs.tex`, lignes 4405–4416.

Correction. Dans le cadre séparé, sans bord et de dimension pure du produit usuel de courbures, considérer d fibrés en droites à métriques paralinéaires dont le produit des courbures est positif et non nul comme germe en x. Conserver l'existence d'un sous-germe fermé de dimension $d_k(x)$. Il existe une extension complète K/k, un point x_K au-dessus de x avec $\mathscr{H}(x_K) = \mathscr{H}(x)$ par l'application naturelle, et une immersion fermée de germes K-analytiques sans bord

$$(Y, x_K) \hookrightarrow (X_K, x_K), \qquad \dim_K(Y, x_K) = d,$$

sur laquelle le produit des courbures tirées en arrière est non nul.

Le passage au sous-germe fermé conserve le corps résiduel complété et les fibrés résiduels. La positivité et la non-nullité du courant donnent un témoin numérique positif. Un pinceau gradué construit sur un modèle propre donne une fibre générique graduée de dimension d où le degré de tête est positif. Les coordonnées homogènes du pinceau se relèvent en unités analytiques évaluées en x. Leur norme est la norme de Gauss, ce qui plonge isométriquement le corps de Gauss complété K dans $\mathscr{H}(x)$. Les équations fixant ces coordonnées définissent une fibre analytique fermée sur K. Au point d'évaluation marqué, l'application $\mathscr{H}(x)\widehat{\otimes}_k K \to \mathscr{H}(x)$ conserve le corps résiduel complété. Le rang résiduel et la borne de dimension relative donnent la dimension d. Le degré positif de la fibre graduée donne un atome de courbure strictement positif au point marqué.

73. Germe de courbe après extension du corps de base

Texte visé. Corollaire 18.9.4, p. 545.

`calculs.tex`, lignes 4419–4426.

Correction. Dans le cadre séparé, sans bord et de dimension pure du produit usuel de courbures, supposer la métrique paralinéaire psh et la courbure non nulle en x. Prendre une extension complète K/k et un relèvement x_K de x. Le germe de courbe cherché est un sous-germe fermé K-analytique sans bord de (X_K, x_K). La courbure de la métrique tirée en arrière y est non nulle.

Pour une métrique psh le poids est le logarithme négatif de la norme d'un repère, ce qui donne une courbure positive. Appliquer la fibre de Gauss pondérée du théorème 18.9.3 corrigé avec $d = 1$, sous la même hypothèse du sous-germe fermé de dimension $d_k(x)$. Elle donne sur la courbe un atome de courbure strictement positif en x_K.

Erreurs modérées

74. Normalisation de l'unicité dans le théorème de Calabi

Texte visé. § 0.1.2, attribution à Yuan et Zhang, p. 10.

`intro.tex`, lignes 125–128.

Correction. Lire « l'unicité, à multiplication par une constante positive près, d'une métrique conduisant à une mesure prescrite ». Dans le cadre non archimédien du théorème 1.1.1 de Yuan et Zhang, on compare des métriques continues semi-positives au sens des modèles sur un même fibré en droites ample d'une variété projective sur un corps complet discrètement valué. Leur mesure de Chern de degré maximal est la même exactement lorsque leur rapport est constant. L'argument est une adaptation de la preuve de Błocki.

75. Identification homogène des formes aux courants

Texte visé. §0.2.3, p. 11.

`intro.tex`, lignes 206–208.

Correction. L'identification des formes aux courants par produit extérieur et intégration en degré (n, n) s'entend avec les hypothèses de dimension pure et de richesse de cette construction. Dans le cadre analytique, on peut supposer X séparé, sans bord et purement de dimension n. Pour voir le rôle de la pureté, sur $(\mathbf{P}^1_k)^{\mathrm{an}} \sqcup \mathscr{M}(k)$ la fonction lisse égale à 0 sur la courbe et à 1 sur le point est non nulle. Son courant de dimension ambiante 1 est nul, car toute forme test de degré $(1, 1)$ s'annule sur la composante ponctuelle.

76. Fonction méromorphe régulière

Texte visé. §0.2.3, p. 11.

`intro.tex`, lignes 213–215.

Correction. Dans la phrase qui introduit le courant de $\log|f|$, remplacer la parenthèse explicative par « c'est-à-dire inversible comme section du faisceau des fonctions méromorphes ». L'hypothèse est $f \in \mathscr{M}_X^\times$.

77. Norme dans une trivialisation formelle

Texte visé. §0.2.4, p. 12.

`intro.tex`, lignes 237–245.

Correction. Une trivialisation du modèle formel donne un repère de norme 1. Sur le domaine analytique associé, la norme d'une section inversible est la valeur absolue de son coefficient inversible dans ce repère. Les potentiels logarithmiques ainsi obtenus sont linéaires par morceaux au voisinage des points, et les métriques formelles peuvent être non lisses. Par exemple, pour la métrique formelle standard de $\mathscr{O}(1)$ sur la droite projective, dans le repère X_0 et la coordonnée $T = X_1/X_0$, on a $\|X_0\| = 1/\max(1, |T|)$.

78. Polyédralité des images tropicales compactes

Texte visé. §0.2.9, p. 14.

`intro.tex`, lignes 390–400.

Correction. L'image tropicale d'un moment sur un espace analytique compact est polyédrale. Pour les assertions locales, on applique ce résultat sur des domaines analytiques compacts. Sur

un espace analytique quelconque, la polyédralité de l'image globale demande une hypothèse supplémentaire. Pour la borne de dimension de l'image compacte, voir n° 47.

79. Faisceau résolu par le complexe de Dolbeault

Texte visé. §0.3.1, p. 16.

`intro.tex`, lignes 582–589.

Correction. Le faisceau des coefficients est $\mathscr{F}^p = \ker(d'' \colon \mathscr{A}^{p,0} \to \mathscr{A}^{p,1})$. Dans le cadre du lemme de Dolbeault cité, la résolution commence par

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}^p \longrightarrow \mathscr{A}^{p,0} \xrightarrow{d''} \mathscr{A}^{p,1} \longrightarrow \cdots .$$

Pour $p = 0$, ce noyau est le faisceau des fonctions localement constantes à valeurs dans $\mathbb{R}$.

80. Support squelettique des formes de degré maximal

Texte visé. §0.4.1, p. 17.

`intro.tex`, lignes 683–685.

Correction. Le support d'une (n,n)-forme est contenu localement dans une partie squelettique appropriée. Pour une forme à support compact, on peut utiliser un support fort squelettique compact sous les hypothèses du résultat de support correspondant. L'énoncé porte sur un contenant squelettique du support.

81. Tiré en arrière par la somme et volume complémentaire

Texte visé. Proposition 1.2.5, pp. 23–24.

`lagerberg.tex`, ligne 248 et passage à la réciproque.

Correction. Écrivons $F(x,y) = f(x) + g(y)$ et $\nu_y = \bigwedge_j (d'y_j \wedge d''y_j)$. Dans la preuve, établir directement

$$F^*\omega \wedge \nu_y = f^*\omega \wedge \nu_y .$$

Le développement de $F^*\omega$ contient en général des termes mixtes, comme le montre $d'(x+y) \wedge d''(x+y)$. Tout monôme contenant une différentielle en y s'annule après multiplication par ν_y. La composante en x seule est le tiré en arrière par f. Pour la réciproque, lorsque $f(W)$ est engendré par les p premiers vecteurs de la base, prendre pour g les $n-p$ derniers.

82. Somme des bidegrés dans les formes invariantes

Texte visé. Remarque 1.3.9, p. 31, `lagerberg.tex`, ligne 1065.

Correction. En degré total k, écrire l'isomorphisme

$$\bigoplus_{a+b=k} \mathscr{A}^{a,b}_{\mathrm{Lag}} \simeq \pi_*\big((\mathscr{A}^k_T)^{\mathbf{U}}\big).$$

Les coefficients dans les coordonnées radiales et angulaires sont indépendants des angles par invariance. À bidegré fixé, l'application donne le facteur où les nombres de différentielles radiales et angulaires sont fixés. Ainsi, en dimension un, dx et $d\theta$ sont deux formes invariantes indépendantes, en provenance de $(1,0)$ et $(0,1)$.

83. Symétrie des superformes et type complexe

Texte visé. Remarque 1.3.9, p. 31, et §0.2.10, p. 14.

`lagerberg.tex`, ligne 1074, et `intro.tex`, lignes 424–425.

Contre-exemple. En dimension quatre, prenons

$$\omega = d'x_1 \wedge d'x_2 \wedge d''x_3 \wedge d''x_4 + d'x_3 \wedge d'x_4 \wedge d''x_1 \wedge d''x_2.$$

L'opérateur J échange les deux termes. Dans la réalisation radiale et angulaire, posons $\zeta_j = dz_j/z_j = dx_j + i\,d\theta_j$. Les composantes holomorphes de dx_j et $d\theta_j$ sont $\zeta_j/2$ et $\zeta_j/(2i)$. Les permutations des deux paires ont le même signe, et la composante de type $(4,0)$ vaut $-\zeta_1 \wedge \zeta_2 \wedge \zeta_3 \wedge \zeta_4/8$.

Correction. Dans les deux passages, la symétrie suffit en bidegré $(1,1)$, car une matrice symétrique annule les composantes antisymétrisées de types $(2,0)$ et $(0,2)$. Une superforme fortement positive de bidegré (p,p) donne une forme réelle de type complexe (p,p), étant une somme de produits de formes $\alpha \wedge J\alpha$ de type complexe $(1,1)$.

84. Intégrales pondérées lorsque le calibrage est nul

Texte visé. §§ 1.5.6 et 1.5.8, pp. 35–36.

`lagerberg.tex`, lignes 1549–1656.

Correction. Dans la carte affine, intégrer le coefficient pondéré $a\omega^\sharp(x)$. Dans la carte du bord, où $x' = (x_2, \dots, x_n)$, intégrer $a\omega_1(0,x')$. Les formules signées sont donc

$$\int_V \langle \omega, \mu \rangle = \int_V a\omega^\sharp(x)\,dx, \qquad \int_{\partial V_+} \langle \omega, \partial\mu_+ \rangle = \int_{\partial V_+} a\omega_1(0,x')\,dx'.$$

Chacune suppose l'intégrabilité du coefficient pondéré correspondant. Les masses absolues sont les intégrales des valeurs absolues des mêmes coefficients pondérés. Pour $a = 0$, les deux coefficients pondérés sont identiquement nuls, donc les intégrales signées et les masses absolues valent zéro, même si les coefficients non pondérés ne sont pas intégrables.

85. Domaine de définition de la convolution

Texte visé. §1.6.6, p. 38, `lagerberg.tex`, ligne 1871.

Correction. Pour f lisse sur Ω, définir l'intégrale sur l'ouvert $\Omega_\rho = \{x : x - \operatorname{supp}\rho \subset \Omega\}$. Le domaine des points échantillonnés est compact et intérieur à Ω, y compris pour x dans un voisinage assez petit. On peut donc dériver sous l'intégrale. Une convolution globale par prolongement nul demande que ce prolongement soit localement intégrable. Par exemple, $f(y) = 1/y$ sur $(0,1)$ et un noyau non négatif strictement positif en un donnent une intégrale infinie en $x = 1$. Pour tout compact de Ω, les rayons de régularisation assez petits satisfont la condition d'échantillonnage.

86. Convexité dans la région échantillonnée par le noyau

Texte visé. §1.6.6, p. 38, `lagerberg.tex`, lignes 1895–1897.

Correction. Pour Ω' convexe et un noyau non négatif, supposer f convexe dans un voisinage convexe de $\Omega' - \operatorname{supp}\rho$ contenu dans Ω. Les translatées $x \mapsto f(x-y)$ y donnent l'inégalité de convexité sur Ω' après intégration. Pour la croissance suivant une direction, supposer la dérivée correspondante non négative dans la région échantillonnée. Le signe plus dans la condition de

support convient si le noyau est pair. Pour voir la nécessité de la région correcte, choisissons un noyau de masse un concentré près de un et Ω' près de zéro sur la droite. Une fonction lisse nulle près de zéro et égale à $-t^2$ près de moins un donne une convolée de dérivée seconde -2 sur Ω'.

87. Noyau réfléchi dans la convolution des courants

Texte visé. §1.6.6, p. 39, `lagerberg.tex`, ligne 1927.

Correction. Poser $\check{\rho}(x) = \rho(-x)$ et définir

$$\langle \rho * T, \omega \rangle = \langle T, \check{\rho} * \omega \rangle.$$

Avec la convention $\rho * f(x) = \int \rho(x-y) f(y)\, dy$, l'intégration contre le test échange les rôles de x et y et produit le noyau réfléchi. Pour $T = \delta_0$, la formule donne la densité ρ, tandis que la formule imprimée donne $\rho(-\cdot)$. On peut aussi choisir des noyaux pairs dans tout ce passage.

88. Polarisation torique rationnelle et masse de Monge–Ampère

Texte visé. Remarque 1.7.9, p. 45, `lagerberg.tex`, ligne 2456.

Correction. Soient a_i des pentes rationnelles qui engendrent affinement l'espace dual de dimension n, $g(x) = \max_i \langle a_i, x\rangle$ et $P = \mathrm{conv}(a_i)$. Pour le volume normalisé par le réseau,

$$(d'd''g)^n = n!\,\mathrm{Vol}(P)\,\delta_0.$$

Si l'entier positif m rend mP entier et si L est le fibré ample de polytope des sections mP sur la variété torique normale correspondante X, cette masse vaut $m^{-n}\deg_L(X)$. La fonction d'appui définit ainsi une polarisation rationnelle, intégrale lorsque les pentes sont entières.

Preuve. Posons $h = \log \sum_i e^{\langle a_i, x\rangle}$. La hessienne est la covariance des pentes pour les poids exponentiels strictement positifs, donc définie positive. Le gradient est une combinaison convexe à poids strictement positifs, dans $\mathrm{Int}\, P$. Pour $y \in \mathrm{Int}\, P$, la fonction d'appui de $P - y$ est minorée par $c\|x\|$ pour un $c > 0$. Ainsi $h(x) - \langle y, x\rangle$ est coercive et son minimum unique donne $\nabla h = y$. Le gradient est un difféomorphisme sur $\mathrm{Int}\, P$, d'adhérence P. L'identité déterminantielle et le changement de variables donnent à la mesure $\nu = (d'd''h)^n$ la masse finie $n!\,\mathrm{Vol}(P)$. La régularisation $\varepsilon h(x/\varepsilon)$ converge uniformément vers g. Sa mesure est l'image de ν par $x \mapsto \varepsilon x$, qui tend vers l'atome annoncé par convergence dominée et continuité du produit convexe euclidien.

Pour $Q = mP$, l'anneau du semi-groupe du cône du polytope est gradué par les entiers q et ses monômes de degré q sont indexés par $qQ \cap M$, où M est le réseau dual. Les ouverts des monômes des sommets en degré un recouvrent le Proj, par coordonnées barycentriques rationnelles. Ils trivialisent $\mathscr{O}(1)$ et une puissance est très ample par passage à un anneau de Veronese. Les inégalités des facettes donnent les sections de L^q indexées par $qQ \cap M$. Le terme dominant du comptage est $\mathrm{Vol}(Q)q^n$, par comparaison avec les cubes du réseau. Le polynôme de Hilbert donne $\deg_L(X) = n!\,\mathrm{Vol}(Q)$, et le changement d'échelle donne le facteur m^{-n}.

89. Sous-espaces paralinéaires fermés et polyèdres finis

Texte visé. §1.8.10, p. 49, `lagerberg.tex`, ligne 2785.

Correction. Tout polyèdre fini est fermé et paralinéaire. Tout sous-espace paralinéaire compact est un polyèdre compact. En effet, la propriété de G-recouvrement donne autour de chaque point un voisinage relatif recouvert par un nombre fini de cellules. Sur un compact, un nombre fini de tels voisinages suffit, et l'on peut employer des cellules compactes après rétrécissement.

Un sous-espace paralinéaire fermé général n'a que des descriptions polyédriques locales. Par exemple, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ est fermé et G-recouvert par ses singletons. Toute cellule qu'il contient est un singleton, donc aucune réunion finie de cellules ne le recouvre.

90. Cellules incidentes et espace tangent

Texte visé. §1.8.11, p. 49, `lagerberg.tex`, ligne 2802.

Correction. L'espace tangent en x est engendré par les directions des enveloppes affines des cellules incidentes à x. Si x est dans l'intérieur relatif d'une cellule maximale C de la décomposition, ou si C est un voisinage relatif de x, on a $T_x P = \langle C \rangle$ pour les directions de cette cellule. En effet, une autre cellule incidente coupe C suivant une face contenant x, qui est alors C elle-même dans le cas maximal. Sur la droite décomposée en deux demi-droites et leur sommet, la cellule $\{0\}$ contient zéro en son intérieur relatif, alors que l'espace tangent est toute la droite.

91. Intégrabilité dans les fibres

Texte visé. Proposition 1.8.13, pp. 49–50.

`lagerberg.tex`, ligne 2836 et formules de la preuve.

Correction. Pour une fonction borélienne, demander l'intégrabilité absolue sur chaque fibre afin de définir une intégrale réelle. Une fonction localement bornée dont le support est propre au-dessus de la base satisfait cette condition, par compacité sur chaque fibre. Une fonction borélienne non négative donne une intégrale mesurable à valeurs étendues. La mesurabilité de l'intégrale signée suit en traitant ses deux parties séparément. Employer D_x dans la définition de u et D dans les formules d'extrémité.

Sur le rectangle compact $[0,1]\times[-1,1]$ projeté sur $[0,1]$, la fonction $1/t$ hors de $t=0$, prolongée par zéro en $t=0$, est borélienne à support compact. Les deux parties ont une intégrale infinie sur chaque fibre.

92. Différentiabilité requise pour les différentielles polyédrales

Texte visé. § 1.9.8, p. 52 imprimée et du PDF, `lagerberg.tex`, lignes 3165–3171. Les clauses suivantes se trouvent aux lignes 3173–3178. La même hypothèse faible réapparaît au § 3.3.11, `espgtrop.tex`, lignes 708–716, p. 80, avec la suite du calcul p. 81.

Classes admissibles et défaut de descente

Dans un ouvert affine U de dimension finie, prendre pour coefficients sources les fonctions continues a telles que, pour tout $x \in U$ et toute direction w, la dérivée directionnelle bilatérale finie

$$D_w a(x) = \lim_{t \to 0} \frac{a(x+tw) - a(x)}{t}$$

existe. Ces conditions sont locales. Les règles de dérivation sur chaque droite donnent un faisceau d'algèbres réelles qui contient les fonctions lisses et est stable par multiplication par celles-ci. Pour une application affine ϕ de partie linéaire A, la substitution dans le quotient donne $D_w(a \circ \phi)(x) = D_{Aw} a(\phi(x))$. Cela donne la stabilité affine, sans imposer la linéarité de $w \mapsto D_w a(x)$.

La classe cible est le faisceau d'algèbres réelles des fonctions boréliennes prises ponctuellement. Pour $m \geq 1$, la fonction $m(a(x+w/m) - a(x))$, définie sur l'ouvert $\{x \in U : x + w/m \in U\}$ et prolongée par zéro sur son complément dans U, est borélienne. Elle tend ponctuellement

vers $D_w a$. En particulier, les dérivées partielles dans chaque repère affine sont bien dans la classe cible.

Sur $\mathbf{R}^2$, prendre

$$a(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)(x-y)^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

L'estimation $|a(x,y)| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$ donne la continuité à l'origine. L'homogénéité $a(tw) = ta(w)$ pour $t \in \mathbf{R}$ donne $D_w a(0) = a(w)$. En dehors de l'origine, la fonction est lisse. Elle appartient donc à la classe source fixée.

Calcul ponctuel et changement de repère

Sur la diagonale $P = \{x = y\}$, le coefficient a est nul. Avec $j(t) = (t,t)$, la nullité se teste sur son enveloppe affine en chaque point de P. Les identités $a(t,0) = t$ et $a(0,t) = t$ donnent $\partial_x a(0) = \partial_y a(0) = 1$. Sur les points non nuls de P, les deux partielles sont nulles à cause du facteur quadratique $(x-y)^2$. Il en résulte

$$j^* d'a = 2\mathbf{1}_{\{0\}}\, d't, \qquad j^* d''a = 2\mathbf{1}_{\{0\}}\, d''t.$$

Ces deux formes ont une valeur tangentielle non nulle à l'origine, tandis que les différentielles du représentant nul valent zéro. Les formules imprimées dépendent donc du représentant du quotient.

Dans les coordonnées rationnelles $u = x+y$, $v = x-y$, on a $a = 2uv^2/(u^2+v^2)$ hors de l'origine. Ses deux partielles à l'origine sont nulles dans ce repère. En coordonnées x, y, la formule de d' à l'origine donne $d'x + d'y = d'u$. La formule n'est donc pas intrinsèque.

Pour la répétition du § 3.3.11, on peut prendre la cellule compacte $j([-1,1])$. Un témoin pointé fini à l'origine contient une pièce de dimension un après raffinement cellulaire pointé. Une réunion finie de points ne couvrirait pas un voisinage relatif de l'origine. La valeur tangentielle non nulle sur cette pièce montre que le défaut persiste au passage au G-faisceau.

Correction au premier ordre

Supposer que chaque coefficient source est différentiable au sens de Fréchet en tout point de son ouvert et que ses dérivées partielles appartiennent au faisceau vectoriel réel cible $\mathscr{H}$. Conserver les structures de modules sur les fonctions lisses requises par les quotients. Une classe source contenue dans C^1 convient, avec la même condition sur la cible. En écrivant

$$a(z+h) = a(z) + L_z(h) + o(\|h\|),$$

la substitution $h = Ak$ pour une application affine de partie linéaire A donne le différentiel $L_{\phi(x)}A$ de $a \circ \phi$ en x. La partie linéaire est bornée en dimension finie. Le reste est donc $o(\|k\|)$, y compris pour A non injective. La linéarité du différentiel donne l'indépendance des coordonnées. Les composantes dans un autre repère sont des combinaisons linéaires constantes des premières dérivées.

Nullité sur les cellules et identités typées

Pour une forme nulle sur une cellule fermée C, restreindre à l'enveloppe affine H_C et écrire la forme dans une base extérieure constante. Chaque coefficient b y est nul sur C. Si $x, y \in C$, alors $x + t(y-x) \in C$ pour $0 \leq t \leq 1$. En prenant le quotient pour $t \downarrow 0$, on obtient

$$db(x)(y-x) = 0.$$

Les vecteurs $y - x$ engendrent la direction de H_C. La linéarité de $db(x)$ donne sa nullité tangentielle en tout point, bords et sommets compris. Pour une cellule ponctuelle, l'espace tangent est nul. La règle de chaîne affine identifie ce calcul à la restriction de d' et de d'', qui préservent donc les formes nulles sur toutes les cellules.

Les opérateurs ainsi définis passent aux quotients ordinaires et commutent aux restrictions. Au § 3.3.11, la compatibilité avec les images réciproques affines permet leur passage à la limite des cartes puis au G-faisceau. Sur chaque représentant $f^*\alpha$, on a $d'\,f^*\alpha = f^*d'\alpha$ et $d''\,f^*\alpha = f^*d''\alpha$.

Pour la règle de Leibniz dans les classes d'algèbres, les produits mixtes sont dans la cible. En dimension positive,

$$a = \partial_i(z_i a) - z_i \partial_i a$$

donne l'inclusion des coefficients sources dans la cible par stabilité sous la multiplication lisse. Sur le point les constantes sont déjà présentes. Pour $D = d'$ ou d'' et α de type (p, q), la règle, en particulier dans l'algèbre lisse, est

$$D(\alpha \wedge \beta) = D\alpha \wedge \beta + (-1)^{p+q}\alpha \wedge D\beta.$$

Pour des coefficients C^2, les itérations sont $C^2 \to C^1 \to C^0$. L'égalité des partielles mixtes donne $d'^2 = d''^2 = 0$ et $d'd'' = -d''d'$, ainsi que $d'd''J = Jd'd''$ par les relations des générateurs. Une itération utilise la classe intermédiaire C^1.

Avec $Jd'x = d''x$ et $Jd''x = -d'x$, J^2 vaut $(-1)^{p+q}$ sur le type (p, q). Les identités de n° 517 restent

$$d'' = (-1)^{p+q}Jd'J, \qquad d' = (-1)^{p+q+1}Jd''J.$$

93. Majorant lisse sur les tranches de l'exhaustion

Texte visé. Proposition 1.10.2(a), p. 55, `lagerberg.tex`, ligne 3528 et construction du majorant.

Correction. Choisir la fonction lisse ϕ avec $\phi(t) \geq c_k$ pour $k - 1 \leq t \leq k$. Une partition lisse localement finie permet de majorer la fonction en escalier localement bornée sur ces tranches. La condition imprimée $t \leq k$ forcerait une valeur fixée de ϕ à dominer toute une queue éventuellement non bornée des c_k. Pour l'évaluation ambiante de α, prendre des prolongements locaux symétrisés. Avec l'exhaustion ψ, poser $\alpha_1 = \alpha + (\phi \circ \psi)\lambda^p$ et $\alpha_2 = (\phi \circ \psi)\lambda^p$. Les bornes des tranches rendent les deux formes positives et leur différence vaut α.

94. Preuve par minimalité du cône des fonctions convexes

Texte visé. Lemme 1.10.6, p. 56 (imprimée et PDF), lagerberg.tex, lignes 3624–3635.

Lacune de preuve. La famille auxiliaire imprimée des fonctions continues f telles que $f + v$ appartienne à $\mathcal{C}$ peut contenir des fonctions hors de $\mathcal{C}$. Le résultat de cône du lemme reste valable.

Sur $P = \mathbf{R}$, prendre $v(t) = t^2$ et $f(t) = -t^2$. Les fonctions v et $f + v = 0$ sont des générateurs lisses à hessienne positive. Le faisceau ordinaire des fonctions continues localement convexes contient tous ces générateurs. Sur un intervalle, la convexité locale implique les inégalités de corde sur chaque segment. En effet, après soustraction de la corde, un maximum strictement positif serait atteint à l'intérieur. Par convexité locale, l'ensemble des points de maximum serait ouvert et fermé dans l'intérieur du segment, ce que les valeurs aux extrémités empêchent. Les inégalités de corde se préservent par limite uniforme. Ce faisceau contient donc $\mathcal{C}$ par minimalité. Mais f viole l'inégalité au milieu de $[-1, 1]$, qui donnerait $0 \leq -1$. Cela réfute l'inclusion auxiliaire exacte.

Preuve correcte. Définir $\mathcal{C}_P$ comme le plus petit sous-faisceau ordinaire d'ensembles des fonctions continues contenant les générateurs lisses à hessienne positive et stable par limites

uniformes sur les ouverts. Il existe par intersection, puisque le faisceau des fonctions continues est un candidat. Les sections compatibles se recollent dans chaque candidat et donc dans leur intersection.

Sur un ouvert U, la restriction de $\mathcal{C}_P$ donne un candidat pour $\mathcal{C}_U$. Pour l'inclusion réciproque, sur chaque ouvert W de P, les fonctions dont la restriction à $W \cap U$ appartient à $\mathcal{C}_U$ forment un candidat sur P. La minimalité donne la compatibilité de la construction aux restrictions. La fermeture uniforme locale en découle en se ramenant, autour de chaque point, à un voisinage relativement compact et en recollant.

Pour $a \geq 0$, le sous-faisceau des $u \in \mathcal{C}_P$ pour lesquels $au \in \mathcal{C}_P$ est stable par limites uniformes et contient les générateurs. Il est donc égal à $\mathcal{C}_P$. La fonction nulle est un générateur.

Pour l'addition, fixer d'abord un générateur v sur U. Le sous-faisceau des $u \in \mathcal{C}_U$ tels que $u + v \in \mathcal{C}_U$ est stable par limites uniformes et contient les générateurs, puisque leurs hessiennes positives s'additionnent. La minimalité donne tous les u. Fixer ensuite un u arbitraire de $\mathcal{C}_U(U)$. Les $v \in \mathcal{C}_U$ tels que $u + v \in \mathcal{C}_U$ forment un sous-faisceau stable par limites uniformes, qui contient tous les générateurs d'après la première étape. La seconde minimalité donne l'addition de sections arbitraires. Avec la stabilité par $a \geq 0$, cela démontre le lemme sur tout ouvert.

95. Portée du théorème cité et prolongement paralinéaire

Texte visé. Preuve du lemme 1.10.8(b), p. 57.

`lagerberg.tex`, lignes 3729–3737.

Correction. Le théorème 3.13 de Ducros, Hrushovski, Loeser et Ye se place dans un groupe abélien ordonné divisible Γ contenant un modèle de paramètres M, avec le cas $M = \{0\}$ également admis. Sur un domaine M-définissable, il suppose u M-définissable, lipschitzienne et égale en chaque point à l'une des fonctions $\mathbb{Q}$-affines d'une famille finie sur M. Il autorise l'addition, la soustraction, le minimum et le maximum, avec les fonctions de cette famille, les coordonnées et les constantes du modèle de paramètres, ou la constante nulle dans le cas sans paramètres. La preuve ajoute des formes affines de séparation.

Sur le bord du carré $[0,1]^2$, prendre $u = 0$ en bas et à gauche, $u = x$ en haut et $u = y$ à droite. Les fonctions $0, x, y + 3x - 3$ fournissent une famille de représentants. Leur ordre strict est le même aux points $(1/2, 0)$ et $(1/2, 1)$. Toute expression en minima et maxima de cette famille sélectionne donc le même indice aux deux points. Or u y sélectionne respectivement 0 et x.

Pour tout sous-corps $K \subset \mathbb{R}$, prendre une K-cellule compacte C et noter $D = \partial C$, muni d'un découpage K-polyédral fini adapté à u. Sur chaque produit de deux cellules, subdiviser pour rendre affines la distance $\|x - y\|_\infty$ et la différence absolue $|u(x) - u(y)|$. La seconde quantité s'annule lorsque la première s'annule. Les rapports aux sommets de distance positive sont donc majorés par un entier L, qui est une constante de Lipschitz pour u. Si $D \neq \emptyset$, poser

$$U(x) = \min_{y \in D} \big(u(y) + L\|x - y\|_\infty\big).$$

On a $U = u$ sur D. Sur chaque cellule de D, l'épigraphe du minimum correspondant s'obtient par projection d'un K-polyèdre. Son bord inférieur est atteint par compacité et donné par un maximum fini de fonctions K-affines. Le minimum de ces maxima est donc K-paralinéaire sur l'espace affine ambiant. Si $D = \emptyset$, prendre $U = 0$.

Théorème publié

96. Raffinement par les hyperplans qui portent les facettes

Texte visé. Proposition 1.10.11, pp. 58–60 (imprimées et PDF). Les deux étapes en cause se trouvent p. 59, lagerberg.tex, lignes 3846 et 3859. La proposition sur la différence de deux fonctions convexes reste valable.

Contre-exemple aux deux étapes. Prendre le triangle P de sommets $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (0,2)$. Le point $p = (1/2, 1/2)$ le subdivise en trois cellules fortes rationnelles, avec toutes leurs faces. Prendre $K = \mathbf{Q}$ et $u = 0$. Cette fonction est lisse, K-PL et convexe sur chaque cellule. Les six hyperplans distincts qui portent les facettes ont pour équations

$$x, \quad y, \quad x + y - 2, \quad y - x, \quad x + 3y - 2, \quad 3x + y - 2.$$

Soit H la somme des valeurs absolues de ces six formes affines, toutes avec le poids positif autorisé 1. Sur le segment $z(t) = (1-t)(7/10, 4/5) + t(4/5, 7/10)$, $0 \le t \le 1$, on a $x + y = 3/2$, $x + 3y - 2 = 11/10 - t/5 > 0$ et $3x + y - 2 = 9/10 + t/5 > 0$. Le segment reste dans l'intérieur de $\mathrm{conv}(B, p, C)$ et évite les sommets de la subdivision. Pourtant

$$H(z(t)) = 4 + \tfrac{1}{10}|1 - 2t|.$$

Au milieu, ses dérivées à gauche et à droite valent $-1/5$ et $1/5$. L'hyperplan $y = x$ prolonge l'arête Ap à l'intérieur de cette cellule. Le pli persiste avec tout poids positif sur cet hyperplan. Il fournit un saut positif de la dérivée, compatible avec la convexité.

Preuve correcte. Travailler dans $\mathrm{aff}(P)$. Une subdivision finie forte s'obtient avec les hyperplans définissant les cellules d'un recouvrement fini du polyèdre compact P. Dans le cas K-PL, une cellule de pleine dimension a la même enveloppe affine que P, puisque les sous-espaces affines propres d'une famille finie ne recouvrent pas son intérieur relatif. On conserve ainsi la structure affine sur K. Dans le cas réel lisse, choisir des représentants lisses ambiants sur les cellules d'un recouvrement fini. Les bornes inférieures des hessiennes sur les cellules compactes de pleine dimension permettent de choisir $\gamma \ge 0$ de sorte que $u_0 = u + \gamma\|x\|^2$ soit convexe sur chaque cellule. Les faces en héritent par continuité. Dans le cas K-PL, prendre $\gamma = 0$, avec u affine par cellule.

Raffiner par les hyperplans entiers qui portent les facettes. Pour chaque hyperplan distinct E, fixer une équation affine f_E de partie linéaire $\ell_E \neq 0$, choisie K-affine dans le cas K-PL. Le terme $|f_E|$ est affine sur chaque cellule raffinée. Sur une facette intérieure D commune à deux cellules de pleine dimension C^- et C^+, les représentants de u_0 coïncident sur D. La différence de leurs gradients annihile les directions tangentes sur l'intérieur relatif de D, puis sur toute la facette par continuité. Elle s'écrit $\mu_D \ell_E$ pour $D \subset E$. Le coefficient μ_D est continu, comme on le voit en évaluant la différence sur un vecteur v tel que $\ell_E(v) = 1$. Il est borné sur la facette compacte. Choisir un entier positif λ_E avec $2\lambda_E \ge \sup_D |\mu_D|$ pour chaque facette de E. Le nombre de facettes est fini. Une facette artificielle à l'intérieur d'une ancienne cellule lisse a une différence de gradients nulle.

Poser $H = \sum_E \lambda_E |f_E|$. Sur un segment de direction w qui traverse les hyperplans transversalement et évite leurs intersections de codimension au moins deux, la restriction de $u_0 + H$ est convexe entre deux traversées. À une traversée, orienter C^- et C^+ selon le sens du parcours. Le saut de la dérivée est

$$\mu_D \ell_E(w) + 2\lambda_E |\ell_E(w)| \;\ge\; (2\lambda_E - |\mu_D|)|\ell_E(w)| \;\ge\; 0.$$

La continuité et ces inégalités donnent la convexité sur le segment. Pour approcher deux extrémités quelconques, choisir d'abord un point intérieur a' hors des hyperplans. Choisir ensuite b' à l'intérieur, hors des hyperplans, des directions parallèles à un E issues de a' et des enveloppes affines $\mathrm{aff}(a', L)$ pour les intersections L de codimension au moins deux. Tous ces ensembles sont des sous-espaces affines propres. Les paires ainsi choisies sont denses, et

l'inégalité de convexité passe à la limite par continuité. En dimension un, il y a seulement un nombre fini de points de coupure. En dimension zéro, les fonctions sont constantes. Le cas vide est immédiat.

Les deux fonctions convexes demandées sont

$$u_1 = u + \gamma\|x\|^2 + H, \qquad u_2 = \gamma\|x\|^2 + H.$$

Elles sont $\mathscr{G}_{\mathbf{R}}$-lisses sur la subdivision et $u = u_1 - u_2$. Dans le cas K-PL, $\gamma = 0$ et les coefficients entiers préservent la structure K-PL.

97. Homéomorphisme dans le critère d'isomorphisme paralinéaire

Texte visé. §2.1.10, p. 63, `pl.tex`, lignes 193–199.

Contre-exemple. L'application naturelle $[0,1) \amalg [1,2] \to [0,2]$, identité sur les deux composantes, est paralinéaire et bijective. La seconde composante est ouverte dans la réunion disjointe et son image n'est pas ouverte. L'inverse est donc discontinu.

Correction. Une application paralinéaire est un isomorphisme paralinéaire si et seulement si elle est un homéomorphisme. Pour le sens utile, raffinons le G-recouvrement source en cellules où l'application est affine et transportons-le par l'homéomorphisme. Sur chaque cellule, l'injectivité rend l'inverse affine sur l'image. Une bijection paralinéaire propre suffit dans ce cadre localement compact séparé.

98. Recouvrement par les cellules d'une décomposition

Texte visé. Définition 2.2.4 et remarque 2.2.6, pp. 64–65.

`pl.tex`, lignes 400–415 et 451–459.

Correction. Ajouter $X = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} C$. Sur la droite, la seule cellule $\{0\}$ vérifie les conditions imprimées d'intersection, de bord et de finitude locale, mais ne couvre pas la droite. Avec l'axiome ajouté, pour tout point x choisissons une cellule de dimension minimale le contenant. Le point appartient à son intérieur relatif, car une cellule de bord le contenant aurait dimension strictement inférieure. Les intérieurs relatifs couvrent ainsi X et sont disjoints par l'axiome d'intersection.

99. Finitude des cellules incidentes à une cellule sans bord

Texte visé. Remarque 2.2.7, p. 65, `pl.tex`, lignes 473–482.

Correction. Si une cellule fermée non vide C a bord relatif vide et si une cellule C' la rencontre, l'intersection contient une cellule non vide D. L'axiome d'inclusion impose $D = C$, car toute sous-cellule propre de la décomposition serait dans le bord. Ainsi toutes les cellules rencontrant C la contiennent. La finitude locale en un point de C suffit. Pour un bord non vide, on conserve l'induction sur les cellules du bord.

100. Définition d'un atlas paralinéaire de type fini

Texte visé. Proposition 2.2.13 et corollaire 2.2.14, pp. 66–67.

`pl.tex`, lignes 609–617 et 707 et suivantes.

Correction. Introduire avant son emploi la définition d'atlas de type fini. Il comporte un nombre fini de cartes, à domaines fermés et images polyédriques. Sur les intersections, les changements de cartes ont des décompositions affines finies en cellules. Les transitions sont paralinéaires suivant n° 7. En particulier, avec ces transitions, un atlas fini à domaines de cartes compacts est de type fini, comme utilisé dans le corollaire 2.2.14.

101. Restriction des décompositions cellulaires adaptées

Texte visé. Remarque 2.3.2, p. 69 (imprimée et PDF), pl.tex, lignes 838–852, en particulier 843–850.

Deux contre-exemples. Prenons $X = Y = \mathbf{R}$ avec la structure paralinéaire usuelle à pentes rationnelles, $f = \mathrm{id}$ et les mêmes cellules au départ et à l'arrivée

$$\mathcal{C} = \mathcal{D} = \{L_- = (-\infty, 0],\ P = \{0\},\ L_+ = [0, \infty)\}.$$

Ces cellules fortes fermées recouvrent la droite et forment une famille localement finie. Avec les structures affines usuelles, la seule inclusion propre dans chaque demi-droite est celle de son bord P, et elle est affine. Les deux demi-droites s'intersectent en P. Toute autre intersection est vide ou figure dans la liste. L'identité envoie chaque cellule affinement sur elle-même et toute image réciproque est réunion de cellules. Le couple satisfait ainsi la définition 2.3.1.

1. Prenons $Y' = P$ et la sous-famille cible $\{P\}$. La famille proposée à la source est aussi $\{P\}$. Elle ne recouvre pas l'espace imprimé $X' = f^{-1}(Y) = \mathbf{R}$. La famille cible est pourtant une décomposition de Y'.
2. Prenons $Y' = Y$ et la sous-famille cible $\{L_-, L_+\}$. Sa réunion est bien Y'. Le bord de chacune des demi-droites et leur intersection valent P, qui n'est pas réunion de cellules de cette sous-famille. Celle-ci n'est donc pas une décomposition. À la source, P est sélectionnée, mais son image ne figure pas dans la sous-famille cible. Ici $f^{-1}(Y') = f^{-1}(Y)$, de sorte que le défaut subsiste après correction de l'image réciproque.

Énoncé corrigé. Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ un couple de décompositions adapté à une application paralinéaire $f : X \to Y$. Soit Y' un sous-espace paralinéaire de Y qui est réunion d'une sous-famille de $\mathcal{D}$. Posons

$$X' = f^{-1}(Y'), \qquad \mathcal{D}_{Y'} = \{D \in \mathcal{D} : D \subseteq Y'\}, \qquad \mathcal{C}_{X'} = \{C \in \mathcal{C} : f(C) \subseteq Y'\}.$$

Les cellules conservent leur structure affine initiale. Alors $\mathcal{C}_{X'}$ et $\mathcal{D}_{Y'}$ décomposent respectivement X' et Y', et le couple est adapté à la restriction $f|_{X'} : X' \to Y'$.

Démonstration. La famille cible recouvre Y', puisqu'elle contient la sous-famille dont Y' est la réunion. Celle-ci est fermée par locale finitude. Les cellules héritent leur fermeture relative, leur locale finitude et leurs inclusions affines propres dans les bords. Les cellules qui composent un bord ou une intersection restent contenues dans Y' et sont donc sélectionnées. Les réunions finies de bord ainsi que les intersections sont préservées.

L'image réciproque X' est paralinéaire et fermée. L'adaptation écrit chaque $f^{-1}(D)$, pour $D \in \mathcal{D}_{Y'}$, comme une réunion de cellules de $\mathcal{C}$ dont l'image est dans Y'. Cela couvre X' par $\mathcal{C}_{X'}$. Fermeture relative, locale finitude et inclusions affines propres sont héritées. Les cellules des bords et intersections ont encore leur image dans Y' et restent sélectionnées.

Chaque $C \in \mathcal{C}_{X'}$ est envoyée affinement et surjectivement sur sa cellule image initiale, qui appartient à $\mathcal{D}_{Y'}$. La description de $f^{-1}(D)$ ci-dessus donne l'autre clause d'adaptation. Les unions et images réciproques vides donnent les décompositions vides correspondantes. Toute union de cellules autorisée par la remarque convient.

102. Décomposition cellulaire d'une fibre par sections affines

Texte visé. Corollaire 2.3.7(a), p. 71, `pl.tex`, lignes 1196–1203.

Obstruction. Envoyons l'espace discret de points $p_0, p_1, \ldots$ vers la droite par $p_0 \mapsto 0$, $p_n \mapsto 1/n$ pour $n \geq 1$. Les cellules source sont les singletons. Pour que chaque image soit réunion de cellules cibles, un raffinement devrait contenir tous les singletons $\{1/n\}$, ce qui viole la finitude locale en zéro.

Correction. Pour chaque cellule C dont l'intérieur relatif rencontre la fibre en y, prenons la section affine fermée $C \cap f^{-1}(y)$. Son intérieur relatif est $\mathring{C} \cap f^{-1}(y)$. Les intérieurs des cellules source partitionnent l'espace et la finitude locale passe aux sections. Une section de cellule dont l'intérieur ne rencontre pas la fibre est contenue dans la réunion finie des sections des cellules de bord. L'induction sur la dimension décompose ainsi les sections nécessaires aux intersections et aux bords. Dans une section qui rencontre l'intérieur, le bord relatif est la trace du bord de la cellule source. Ceci donne les axiomes de décomposition de la fibre. Les applications de sous-cellules restent affines par restriction.

103. Dimension tropicale globale et domaines compacts

Texte visé. §3.1.3, p. 74, `espgtrop.tex`, lignes 122–125. Notation locale à la ligne 118.

Contre-exemple. Prenons $(K, G) = (\mathbf{Q}, \mathbf{R})$ et munissons $S = \coprod_{m \geq 1} \mathbf{R}^m$ de la topologie discrète. Toute partie est un domaine et toute fonction réelle est paralinéaire. Cet espace est séparé, localement compact et possède une base d'ouverts compacts formée par les singletons. Toutes les parties sont localement fermées, les axiomes d'intersection et de reconnaissance des domaines sont immédiats et les domaines sont recouverts par leurs singletons compacts. Les G-recouvrements sont les recouvrements ensemblistes ordinaires. Les fonctions réelles forment donc un G-faisceau d'espaces vectoriels sur $\mathbf{Q}$. La composition admise et les images réciproques satisfont les axiomes. Un domaine compact est fini, donc l'image d'un tel domaine par un uplet est un polyèdre compact. En effet, chaque point $(a_j)_j$ est défini par les équations $z_j = a_j$, à coefficients rationnels et constantes réelles.

Tout point x a pour voisinage domanial compact $\{x\}$, donc $d_{\text{trop}}(x) = 0$. Pourtant, l'application $f_m : S \to \mathbf{R}^m$ qui vaut l'identité sur le m-ième terme et zéro ailleurs est une carte d'image $\mathbf{R}^m$. Ainsi la borne supérieure des dimensions des images de cartes sur des domaines quelconques est infinie.

Correction et preuve. Dans la définition de $d_{\text{trop}}(X)$, ne prendre que les cartes sur des domaines compacts. La notation de la dimension d'une carte en x est $\dim_{\text{trop},x}(f)$, y compris dans la définition de $d_{\text{trop}}(x)$. Cette dimension locale est le minimum des dimensions $\dim f(C)$ sur les voisinages domaniaux compacts C de x contenus dans le domaine de la carte. Il existe de tels voisinages par le G-recouvrement en domaines compacts et la stabilité par réunion finie. Les dimensions des images sont des entiers, d'où le minimum.

Pour tout x et toute carte définie près de x dans son domaine, la restriction à un tel C donne $\dim_{\text{trop},x}(f) \leq \dim f(C) \leq d_{\text{trop}}(X)$. Réciproquement, si f est une carte sur un domaine compact C, choisissons pour chaque $x \in C$ un voisinage domanial compact C_x dans C qui réalise le minimum local de la carte. Les intérieurs relatifs des C_x recouvrent C. Une sous-famille finie suffit, donc $f(C)$ est la réunion finie des polyèdres compacts $f(C_x)$ correspondants. Sa dimension est le maximum de leurs dimensions, chacune bornée par $d_{\text{trop}}(x)$. On obtient

$$d_{\text{trop}}(X) = \sup_{x \in X} d_{\text{trop}}(x),$$

avec la même convention pour les bornes supérieures dans le cas vide. La démonstration utilise la polyédralité des images des domaines compacts.

104. Structure G-tropicale associée à un espace analytique

Texte visé. §3.1.7, p. 74–75, `espgtrop.tex`, lignes 147–153.

Contre-exemple. Pour un corps complet k trivialement valué, $X = \mathcal{M}(k)$ est un bon espace analytique compact et topologiquement séparé. Ses unités sont les éléments de $k^\times$, tous de

valeur absolue 1. Le G-faisceau engendré par leurs logarithmes est nul. La carte nulle $X \to \mathbf{R}$ composée avec la fonction affine permise $t \mapsto 1$ donne 1, qui est exclu par la définition imprimée. L'axiome de composition échoue.

La séparation topologique est également requise. En recollant deux droites analytiques sur $\mathbf{Q}_3$ le long de leurs ouverts épointés, on obtient deux origines distinctes. La suite commune 3^n converge vers chacune d'elles, par continuité sur les points rationnels des disques unités. L'espace recollé est donc non séparé.

Énoncé corrigé. Soit X un espace k-analytique topologiquement séparé. Ses domaines analytiques et le plus petit G-faisceau $\mathcal{L}$ de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels engendré par toutes les constantes réelles et les fonctions $\log|u|$, pour les unités analytiques u sur les domaines analytiques, définissent une structure G-tropicale de paramètres $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$. C'est la structure décrite au §12.4.1.

Topologie et domaines. On utilise les propriétés usuelles des domaines analytiques, notamment leur description G-locale par des domaines affinoïdes, leur caractère localement fermé, la transitivité des restrictions et les propriétés des ouverts et des intersections. Les voisinages compacts formés de réunions finies de domaines affinoïdes donnent la compacité locale. Dans un voisinage ouvert prescrit, on construit une suite croissante de compacts dont chacun est contenu dans l'intérieur du suivant, en recouvrant chaque compact par un nombre fini de voisinages compacts. La réunion de la suite est un voisinage ouvert dénombrable à l'infini. Une partie localement fermée G-recouverte par des domaines analytiques est G-recouverte par leurs sous-domaines affinoïdes, par transitivité. C'est donc un domaine analytique. Tout domaine est G-recouvert par des domaines compacts. Les réunions finies de domaines compacts sont des domaines puisque les morceaux y forment un recouvrement fermé fini, donc un G-recouvrement.

Faisceau et forme locale des cartes. Les sections sont exactement les fonctions qui, G-localement, s'écrivent

$$c + \sum_{j=1}^{n} a_j \log|u_j|, \qquad c \in \mathbf{R}, \quad a_j \in \mathbf{Q}.$$

Les opérations linéaires se font sur un raffinement commun. Le recollement conserve cette expression G-locale par transitivité. Pour la continuité du recollement, on raffine par des domaines compacts et on utilise, autour de chaque point, un nombre fini de morceaux compacts dont la réunion est un voisinage. Le théorème de recollement sur un recouvrement fermé fini s'applique sur cette réunion. Tout G-faisceau qui contient les générateurs contient les expressions locales et leurs recollements, ce qui caractérise $\mathcal{L}$. Pour un uplet f, un raffinement commun et le regroupement des unités donnent G-localement $f = q \circ h_{\mathrm{trop}}$, où $h = (u_1, \dots, u_n)$ est un moment, $h_{\mathrm{trop}} = (\log|u_j|)_j$ et $q(s) = As + b$ avec A rationnelle et b réelle. Une liste vide d'unités donne la carte constante.

Images compactes. Si le domaine W de f est compact, on raffine les domaines d'expression par des domaines analytiques compacts. À chaque point, une réunion finie de morceaux du G-recouvrement est un voisinage relatif. La compacité permet de retenir un nombre fini de morceaux C_i recouvrant W. On utilise ici la polyédralité à pentes rationnelles des images de moments sur les domaines compacts. Chaque $q_i(h_{i,\mathrm{trop}}(C_i))$ est donc un polyèdre compact de paramètres $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$ par image affine rationnelle avec translation réelle. La réunion finie donne $f(W)$. Cet argument utilise seulement la polyédralité de ces images compactes, indépendamment de l'égalité de dimensions imprimée au §12.2.4.

Images réciproques et composition. Soit P un sous-espace paralinéaire de $\mathbf{R}^m$. La partie $f^{-1}(P)$ est localement fermée par continuité. Sur un domaine d'expression de f, $q^{-1}(P)$ est paralinéaire, par stabilité G-locale des cellules par image réciproque affine. G-recouvrons-le par des cellules compactes définies par des inégalités affines à coefficients rationnels et

constantes réelles. Sur chaque morceau affinoïde du domaine d'expression, l'image réciproque d'une cellule est définie, après chasse des dénominateurs, par des conditions

$$|u_1^{e_1}\cdots u_n^{e_n}| \le \lambda, \qquad e_j \in \mathbf{Z}, \quad \lambda > 0.$$

Les puissances négatives sont permises puisque les u_j sont des unités. Sur une algèbre affinoïde B, la condition $|v| \le \lambda$ est un domaine de Laurent représenté par $B\{T/\lambda\}/(T-v)$. On itère cette construction pour les conditions simultanées, avec les rayons réels positifs de la catégorie non stricte. La continuité conserve les voisinages relatifs des G-recouvrements par image réciproque. Les domaines ainsi obtenus G-recouvrent $f^{-1}(P)$ par transitivité, donc cette partie est un domaine analytique.

Enfin, si P contient $f(W)$ et si φ est paralinéaire sur P, ses cellules d'affinité se relèvent en un G-recouvrement de W par des domaines analytiques. Sur le raffinement commun avec les expressions de f, la composition $\varphi \circ f$ est encore une constante réelle plus une combinaison rationnelle de logarithmes d'unités. Le G-faisceau les recolle, ce qui démontre l'axiome de composition.

105. G-recouvrement par les traces de domaines compacts

Texte visé. Lemme 3.2.10(ii), p. 78, `espgtrop.tex`, lignes 419–421.

Contre-exemple. La définition 3.1.2 impose $W_j \subset \Sigma$ dans (ii). Or la preuve de (i) $\Rightarrow$ (ii) choisit un G-recouvrement de X.

Prenons l'espace de Cantor $X = \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ avec la topologie produit et les paramètres $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$. Les domaines sont les ouverts et les fonctions paralinéaires sont les fonctions réelles localement constantes. L'espace est compact séparé, de base formée de cylindres compacts ouverts et fermés. Les axiomes d'intersection et de reconnaissance découlent de la stabilité des ouverts par intersections finies et réunions. Les cylindres donnent les G-recouvrements par des domaines compacts. Les G-recouvrements sont ici les recouvrements ouverts, sur lesquels les fonctions localement constantes forment un faisceau de **Q**-espaces vectoriels. Sur un domaine compact, tout uplet a une image finie, donc un polyèdre compact formé de points $z_j = a_j$. La composition garde la constance locale et les images réciproques sont des réunions de fibres ouvertes.

Fixons $x \in X$. Le singleton $\Sigma_1 = \Sigma = \{x\}$ est fermé et fidèlement paralinéaire. La carte nulle $X \to \mathbf{R}$ induit un homéomorphisme sur le point 0. Chaque trace d'un domaine ambiant est vide ou ponctuelle et chaque fonction ambiante y donne une constante permise. La famille à un seul membre est localement finie, donc (i) est vraie. L'espace X n'a aucun point isolé, donc aucun domaine non vide ne peut être contenu dans Σ. La condition (ii) littérale est fausse.

Énoncé corrigé. Soit (Σ_i) une famille localement finie de parties paralinéaires fermées de X, de réunion Σ. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Σ est paralinéaire dans X. **(ii)** Il existe des domaines compacts W_j de X dont les traces $\Sigma \cap W_j$ G-recouvrent Σ, et pour chaque j une partie paralinéaire $T_j \subset W_j$ contenant cette trace.

Lorsqu'elles sont satisfaites, $\Sigma_i \cap \Sigma_{i'}$ est paralinéaire dans Σ et dans chacun des facteurs.

Localité sur les traces. Soit A localement fermée, G-recouverte par des traces paralinéaires $A \cap W_j$. Chaque trace est G-recouverte par des morceaux fidèles $A \cap W_j \cap U_{j\ell}$, avec $U_{j\ell}$ domanial dans W_j par restriction, donc domanial dans X. La composition des témoins finis forme un voisinage relatif à A de chaque point, recouvert par un nombre fini de morceaux fidèles contenant ce point. Ainsi A est paralinéaire. Le lemme 3.2.9 avec l'hypothèse littérale $W_j \subset A$ est un cas particulier.

Preuve. Sous (i), restreignons à Σ un G-recouvrement de X par des domaines compacts W_j. Par 3.2.8(c–d) et restriction de l'ambiant, les traces sont paralinéaires dans W_j. Prenons $T_j = \Sigma \cap W_j$.

Supposons (ii). La réunion Σ est fermée par locale finitude. Recouvrons chaque compact W_j par un nombre fini de voisinages qui rencontrent chacun un nombre fini de Σ_i. Par 3.2.8(c–d), les $\Sigma_i \cap W_j$ sont paralinéaires dans W_j, puis dans T_j, où ils sont fermés. Leur réunion finie forme un G-recouvrement fermé de $\Sigma \cap W_j$, qui est donc paralinéaire dans T_j par composition des recouvrements fidèles. La trace est ainsi paralinéaire dans X par 3.2.8(d) et transitivité. La localité sur les traces donne (i).

Enfin, par 3.2.8(d), les Σ_i sont paralinéaires dans Σ, ainsi que leurs intersections, qui sont aussi paralinéaires dans chacun des facteurs. La famille vide convient.

106. Restriction des G-formes à une partie paralinéaire

Texte visé. §3.3.13, p. 81, `espgtrop.tex`, lignes 773–782.

Contre-exemple au calcul intermédiaire. Prenons la droite paralinéaire usuelle de paramètres $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$, la carte $h(t) = |t|$ à valeurs dans $[0, \infty[$ et la forme ordinaire lisse $d'u$ dans la coordonnée d'arrivée. Les deux demi-droites fermées forment un G-recouvrement de la droite. La carte est affine sur chacune et y donne les images réciproques $d't$ sur $[0, \infty[$ et $-d't$ sur $]-\infty, 0]$. Les deux restrictions au singleton d'intersection sont nulles en degré $(1, 0)$, car l'espace tangent de ce singleton est nul. Elles se recollent donc en une G-forme intrinsèque.

Une forme ordinaire sur un voisinage ouvert de zéro s'écrit $b(t)d't$ avec un coefficient qui est une fonction effective. Sur un intervalle fermé à droite de zéro, la restriction impose $b(0) = 1$, puisque la valeur à cette extrémité est testée dans la direction de l'enveloppe affine de l'intervalle. Sur un intervalle fermé à gauche, elle impose $b(0) = -1$. La contradiction vaut même avec des coefficients réels arbitraires. La séparation des formes ordinaires pour la G-topologie sur chacun des deux intervalles permet de lire ces égalités avant faisceautisation.

Correction. Dans le calcul sur $\Sigma \cap V$, prendre l'image réciproque dans le G-faisceau intrinsèque des formes. Plus précisément, pour une application paralinéaire vers le sous-espace d'arrivée P, prenons un G-recouvrement de la source par des cellules sur lesquelles l'application est affine. Sur chacune, tirons la forme ordinaire en arrière par cette application affine. Sur chaque intersection, les restrictions des applications coïncident. Un raffinement cellulaire commun, puis la compatibilité du tiré en arrière affine avec les restrictions, donnent l'égalité des formes sur l'intersection dans le G-faisceau. Les formes se recollent ainsi de manière unique, indépendamment du G-recouvrement choisi.

Soit $j : \Sigma \hookrightarrow X$ l'inclusion de la partie paralinéaire, qui est un G-morphisme. Pour chaque représentant $(h : V \to E, P, \alpha)$ d'une section du préfaisceau des formes sur X, le lemme de trace rend $h|_{\Sigma \cap V}$ paralinéaire à valeurs dans P. Le calcul précédent fournit la section intrinsèque sur $\Sigma \cap V$. Elle coïncide avec la construction G-tropicale locale sur la structure paralinéaire canonique de Σ. Les flèches affines entre cartes commutent au tiré en arrière sur un raffinement cellulaire commun. La section dépend donc seulement de la classe du représentant dans la limite inductive des cartes, et elle commute aux restrictions de domaine. Le morphisme de préfaisceaux ainsi obtenu, à valeurs dans l'image directe du G-faisceau sur Σ, induit après faisceautisation

$$j^* : \mathcal{F}^{p,q}_{X_{\mathrm{G}}} \longrightarrow j_* \mathcal{F}^{p,q}_{\Sigma_{\mathrm{G}}}.$$

Sur tous les représentants locaux, il coïncide avec le morphisme fonctoriel de §3.3.12 appliqué à j. Le morphisme final de restriction de §3.3.13 est ainsi conservé.

107. Injectivité du tiré en arrière d'une application paralinéaire

Texte visé. §3.6.4, p. 87, `espgtrop.tex`, lignes 1671–1672.

Contre-exemple. Prenons l'intervalle paralinéaire usuel $Q = [0,1]$ et la somme topologique discrète $P = \coprod_{t\in Q}\{p_t\}$, chaque singleton étant une carte sur un point. Ces espaces paralinéaires, de paramètres $(\mathbf{Q},\mathbf{R})$, sont séparés et localement compacts. La source est paracompacte. L'application $f(p_t) = t$ est continue et surjective, et elle est paralinéaire puisque sa restriction à chaque singleton est affine. La forme ordinaire $d'x$ sur Q est non nulle, par évaluation sur la direction de l'intervalle et détection dans le G-faisceau. Sur chaque singleton de P son image réciproque est nulle, car l'espace tangent y est nul. Ces singletons G-recouvrent P, donc $f^*d'x = 0$ sur P. Le noyau est algébrique et apparaît en degré positif.

Correction. Supposons qu'il existe un G-recouvrement (V_i) de Q par des domaines munis de sections paralinéaires $s_i : V_i \to P$ de f. Alors $s_i^* f^*\alpha = \alpha|_{V_i}$. Si $f^*\alpha = 0$, la propriété de faisceau donne $\alpha = 0$. Pour les fonctions, la surjectivité seule donne l'injectivité ponctuelle.

Avec la topologie des jets par morceaux de n° 108, ces sections donnent aussi la stricte continuité à tout ordre fini ou infini. Pour un test par une carte $h : C \to Q$ d'une cellule compacte, subdivisons C en un nombre fini de cellules fermées subordonnées aux images réciproques des domaines V_i. Sur chaque morceau C_j, le test $h|_{C_j}$ se relève en $s_i \circ h|_{C_j}$. La semi-norme testée sur C est le maximum des semi-normes des restrictions, avec les métriques induites, par invariance du jet par subdivision. Elle est donc contrôlée par un nombre fini de semi-normes de $f^*\alpha$. Cela donne la continuité de l'inverse sur l'image. L'existence des sections et l'échec possible de la stricte continuité dans le cas scalaire sans ces sections relèvent des résultats distincts n° 111 et n° 112.

108. Jets par morceaux et tests sur cellules compactes

Texte visé. §3.6.3, p. 87, `espgtrop.tex`, lignes 1631–1644. Préciser aussi « norme standard » aux lignes 1651–1657.

La norme de §3.6.1 concerne les formes lisses ordinaires. Un tiré en arrière paralinéaire peut être seulement lisse par morceaux. Sur $[-1,1]$, $t \mapsto |t|$ est lisse sur les deux demi-cellules fermées et les restrictions concordent en zéro, où la dérivée ordinaire manque.

Norme sur un polyèdre compact. Soit D un polyèdre fort compact plongé dans un espace affine euclidien, éventuellement non pur. Sur une cellule compacte F, $N_{F,r}$ est le maximum des normes uniformes des dérivées d'ordres $0,\dots,r$ d'une forme ordinaire, tous les arguments étant tangents à l'enveloppe affine de F, avec la métrique induite. Les jets sont indépendants du prolongement lisse, car ils coïncident dans l'intérieur relatif et donc sur sa fermeture.

Pour une G-forme lisse a, raffinons ses présentations par cartes affines par morceaux. La compacité et les témoins pointés donnent une subdivision forte finie $\mathcal{D}$ où les restrictions sont lisses ordinaires. Sur les faces communes, elles concordent par détection des formes ordinaires dans le G-faisceau. Posons

$$J_{D,r}(a) = \max_{F\in\mathcal{D}} N_{F,r}(a|_F).$$

Un raffinement restreint les arguments des jets aux sous-espaces tangents, sans accroître le maximum. Les nouvelles cellules de pleine dimension dans chaque ancienne cellule ont le même espace tangent et la recouvrent, car leur réunion est fermée et les autres cellules, en nombre fini, ont un intérieur relatif vide. Le maximum est donc inchangé. Une subdivision commune donne l'indépendance et l'inégalité triangulaire. L'ordre zéro sépare par G-recouvrement. Les métriques donnent des normes équivalentes par comparaison tensorielle, et sur les formes ordinaires d'une cellule on retrouve la norme usuelle.

Tests et continuité. Pour une application paralinéaire entre polyèdres plongés compacts, fixons ses pièces affines. Raffinons la cible pour la forme et la source par image réciproque. La règle de la chaîne applique le linéaire A_i de la pièce à chacun des arguments du tenseur. La constante d'ordre r en bidegré (p, q) est le maximum des $\max(1, \|A_i\|)^{r+p+q}$ sur les pièces initiales, indépendamment du raffinement.

Sur un espace paralinéaire, prenons les semi-normes $J_{C,r}(h^*a)$ de tous les tests $h : C \to X$ sur cellules compactes, pour $r \leq m$ si m est fini et pour tous les r finis sinon. La composition donne la continuité du tiré en arrière. Les plongements de cellules compactes qui G-recouvrent X suffisent et séparent. Un test compact se subdivise en un nombre fini de morceaux qui s'y relèvent. L'estimation affine et l'invariance par subdivision contrôlent la semi-norme du test.

Si X est compact et m fini, un G-recouvrement fini par cellules donne une norme. Une norme $\mathcal{C}^m$ standard signifie une norme qui induit cette topologie. Sur un intervalle, les fonctions $N^{-(m+1)} \sin(Nt)$ tendent vers zéro à l'ordre m et leurs dérivées d'ordre $m + 1$ gardent un maximum égal à un pour N assez grand. Une norme d'un autre ordre ne convient donc pas en général. Une famille déterminante dénombrable donne la métrisabilité. Elle existe si X est dénombrable à l'infini, en recouvrant chaque compact d'une exhaustion par les intérieurs d'un nombre fini de voisinages paralinéaires compacts, puis en les subdivisant. Les cellules ainsi obtenues G-recouvrent X, avec des témoins finis dans chaque voisinage. La stricte continuité sous l'hypothèse de sections effectives relève de n° 107. Les exemples scalaires de n° 110 et n° 112 conservent leur portée.

109. Estimation inverse des jets sans section affine globale

Texte visé. §3.6.2, p. 87, `espgtrop.tex`, lignes 1571–1576.

Contre-exemple. Projetons le tétraèdre de sommets $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)$ sur le carré unité en oubliant la hauteur. Les fibres des quatre sommets du carré ont les hauteurs $0, 0, 0, 1$. Aucune fonction affine ne prend ces quatre valeurs, donc il n'existe pas de section affine dans le tétraèdre.

Preuve corrigée. Soit A la partie linéaire de l'application entre espaces directeurs et B un inverse linéaire à droite. Pour chaque point cible y, choisissons un antécédent x quelconque dans la cellule source. Par la règle de chaîne, le tenseur des jets d'ordre j du tiré en arrière est celui de la cible composé avec A dans les $j + p + q$ places. L'évaluation sur les vecteurs relevés par B reconstitue le jet cible et le borne, uniformément jusqu'au bord par continuité. Cela donne l'estimation inférieure à tout ordre fixé. On peut aussi trianguler la cellule cible et prendre une section affine sur chaque simplexe en relevant ses sommets.

110. Famille dénombrable de semi-normes pour la métrisabilité

Texte visé. §3.6.3, p. 87, `espgtrop.tex`, ligne 1659.

Contre-exemple. Sur un espace paralinéaire discret non dénombrable, tout test provenant d'une cellule compacte connexe est constant. Les semi-normes scalaires sont donc les évaluations de coordonnées et la topologie est la topologie produit. Une famille dénombrable de voisinages de base de zéro ne contrôle qu'un ensemble dénombrable de coordonnées. La topologie ne possède donc pas de base dénombrable en zéro, bien que l'espace soit paracompact.

Correction. Demander une famille dénombrable déterminante de semi-normes séparantes p_j ; la distance $\sum_j 2^{-j} \min(1, p_j(u - v))$ induit alors la topologie. Pour la topologie paralinéaire corrigée des jets par morceaux de n° 108, être dénombrable à l'infini suffit. Recouvrons chaque compact d'une exhaustion par les intérieurs d'un nombre fini de voisinages paralinéaires compacts. En les subdivisant, on obtient un G-recouvrement dénombrable par cellules

compactes. Les relèvements sur les raffinements finis contrôlent les autres tests d'ordre fixé par les semi-normes de ce recouvrement. Pour l'ordre infini, les ordres entiers sont dénombrables.

111. Sections effectives dans le tiré en arrière paralinéaire

Texte visé. §3.6.4, p. 87, `espgtrop.tex`, ligne 1671.

Contre-exemple. Pour la bijection $[0,1)\amalg[1,2]\to[0,2]$ de n° 97, toute section est l'inverse sur son domaine. Une section continue sur un domaine contenant un impose que, près de un dans ce domaine, les points aient leurs antécédents dans la seconde composante, qui est ouverte. Le domaine omet donc les points immédiatement à gauche de un. Une famille finie de domaines de section contenant un ne couvre aucun voisinage de un. Le G-recouvrement demandé manque.

Correction. Exiger des sections paralinéaires G-locales effectives. Une surjection paralinéaire propre les fournit dans le champ d'application de la proposition 2.1.12.

112. Contrôle inverse des semi-normes avec des sections locales

Texte visé. §3.6.4, p. 87, `espgtrop.tex`, ligne 1672.

Contre-exemple. Pour la bijection de n° 97, prenons $u_n(t)=\chi(n(t-1))$ avec χ lisse de support compact dans $(-2,-1)$, de supremum absolu un. Sur le compact cible $[0,2]$, la semi-norme d'ordre zéro est un. Sur chaque compact de la source, le tiré en arrière est finalement nul, car sa partie dans $[0,1)$ est bornée à distance positive de un. Le tiré en arrière scalaire est injectif mais son inverse sur l'image est discontinu.

Correction. Supposons des sections paralinéaires G-locales effectives. Un test de cellule compacte cible se raffine en un nombre fini de cellules se relevant dans les domaines de section. En ordre zéro scalaire, son supremum se contrôle par ceux des tests relevés. Avec les normes corrigées de jets par morceaux de n° 108, à tout ordre le même raffinement donne les estimations par tirés en arrière affines sur les cellules relevées. Il est choisi indépendamment de la forme, d'où la continuité de l'inverse sur l'image et la stricte injectivité dans ce cadre. Le noyau possible en degré positif sous simple surjectivité relève de n° 107.

113. Séparation des étages compacts à l'ordre infini

Texte visé. §3.6.5, p. 88, `espgtrop.tex`, ligne 1721, dans le calcul des lignes 1717–1726.

Correction. Pour un domaine compact $W\subset V$, l'étage transporté des formes ordinaires sur l'image compacte $f(W)$ est séparé à tout ordre. Il est normable aux ordres finis. À l'ordre infini, les normes des ordres finis forment une famille croissante et séparante, qui définit une topologie métrisable.

Contre-exemple à la normabilité à l'ordre infini. Prenons $X=V=W=[0,2\pi]$, la carte identité et le bidegré $(0,0)$. Sur cet intervalle paralinéaire compact, les normes $p_j(u)=\max_{0\le k\le j}\sup_W|u^{(k)}|$ définissent la topologie transportée. Si elle provenait d'une norme N, la continuité de N à l'origine et l'homogénéité donneraient $N\le Cp_j$ pour un j fini. La continuité de p_{j+1} pour N donnerait alors $p_{j+1}\le C'p_j$. Or $u_n(t)=n^{-(j+1)}\sin(nt)$ vérifie $p_j(u_n)\le n^{-1}$ et $p_{j+1}(u_n)=1$.

Plus généralement, sur une image compacte plongée, le cas où l'espace des formes est nul ou l'image de dimension zéro donne un espace de dimension finie. Sinon choisissons une cellule F de dimension maximale, une forme extérieure constante β du bidegré prescrit qui s'y restreint non trivialement, et une forme linéaire ℓ non constante sur F. Pour tout r fini, les formes ordinaires $n^{-r}\sin(n\ell)\beta$ ont des normes bornées jusqu'à l'ordre r, tandis que leur norme

d'ordre $r+1$ croît au moins comme une constante positive fois n sur F. En effet, on évalue les arguments différentiels dans une direction où ℓ est non nulle et les arguments extérieurs là où β est détectée. L'intervalle $\ell(F)$ contient une période pour n assez grand. La domination nécessaire entre deux ordres successifs échoue encore.

Adhérence de zéro. Au passage suivant, il faut considérer la topologie initiale de l'espace global associé à la carte $f : V \to E$. Puisque les étages compacts sont séparés, l'adhérence de zéro est l'intersection des noyaux des restrictions à ces étages. Les domaines compacts G-recouvrent V, donc ces formes s'annulent sur V. Réciproquement, toute G-forme globale nulle sur V appartient à l'espace associé à f, avec les représentants nuls sur toutes les images compactes, et est dans cette intersection. La conclusion imprimée sur l'adhérence de zéro est conservée.

114. Comparaison stricte des topologies de jeux de cartes

Texte visé. Corollaire 3.6.13(a), p. 91, `espgtrop.tex`, lignes 2066–2067.

Défaut du recouvrement relatif. Sur l'intervalle paralinéaire usuel $X = [0,1]$ de paramètres $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$, prenons pour $\mathcal{D}$ le jeu de la seule carte identité sur X. Ajoutons sa restriction à $V = [0, 1/2]$ pour former $\mathcal{E}$. Les cartes sont définies sur des domaines compacts, $\mathcal{D}$ G-recouvre X et $\mathcal{D} \preceq \mathcal{E}$ par la carte commune. Pour couvrir relativement la carte sur V, il faudrait une carte admissible de $\mathcal{D}$ dont le domaine soit contenu dans V. La seule carte a pour domaine X, donc il n'y a aucune pièce admissible pour le test compact V. Cela fait aussi échouer le recouvrement tropical relatif. On peut garder les deux domaines égaux à $[-1,1]$ et adjoindre $t \mapsto |t|$ à la carte identité pour former $\mathcal{E}$. Cette carte supplémentaire ne s'obtient par aucune factorisation affine à partir de l'identité sur tout son domaine.

Preuve de (a). La relation $\mathcal{D} \preceq \mathcal{E}$ donne l'inclusion $A^{p,q}_{\mathcal{E}} \subset A^{p,q}_{\mathcal{D}}$ et sa continuité. Chaque carte de $\mathcal{D}$ se compare à une carte de $\mathcal{E}$ sur un domaine contenant le sien. Sur chaque domaine compact testé, le représentant ordinaire est le tiré en arrière affine du représentant de $\mathcal{E}$, et la règle de la chaîne contrôle les semi-normes sans perte d'ordre.

Pour la stricte continuité, prenons un domaine compact K dans le domaine d'une carte g de $\mathcal{E}$. Restreignons le G-recouvrement de $\mathcal{D}$ à K. Les témoins finis en domaines compacts autour de chaque point et la compacité donnent un nombre fini de domaines compacts $W_i \subset K$, chacun dans le domaine d'une carte f_i de $\mathcal{D}$, qui recouvrent K. Sur l'image compacte $P_i = (f_i, g)(W_i)$, tirons en arrière les deux représentants ordinaires de la même forme par les projections sur $f_i(W_i)$ et $g(W_i)$. Les résultats sont égaux, par le critère de nullité sur image compacte, puisque leurs tirés en arrière sur W_i coïncident. La projection de P_i sur $g(W_i)$ admet des sections sur une subdivision finie en simplexes. On subdivise les images des cellules convexes de P_i, puis on relève les sommets de chaque simplexe dans une cellule convexe qui les porte et on étend affinement. Le tiré en arrière par ces sections et par la première projection borne la norme d'ordre r du représentant sur $g(W_i)$ par une constante fois la norme d'ordre r sur $f_i(W_i)$. Les dérivées sont les jets tangentiels ordinaires sur ces cellules. Le contrôle est indépendant de la forme.

Les $g(W_i)$ forment un recouvrement polyédral compact fini de $g(K)$. Une subdivision commune borne la semi-norme sur $g(K)$ par un multiple du maximum d'un nombre fini de semi-normes du côté de $\mathcal{D}$. Cela donne la continuité de l'inverse sur l'image à tout ordre fini. À l'ordre infini, on applique les mêmes estimations aux ordres finis d'un voisinage de base.

Preuve de (b). Pour deux familles G-couvrantes, la même comparaison sur images jointes donne les deux contrôles sur leur espace commun de formes, sans condition de raffinement. En les restreignant à l'intersection de tous les espaces de la famille donnée, on obtient l'égalité des topologies annoncée.

115. Ordre des jeux de cartes, colimite et produit à facteur fixé

Texte visé. §3.7.4–3.7.5 et proposition 3.7.8, p. 92–94, `espgtrop.tex`, lignes 2227–2232, 2272–2288 et 2410–2449.

Deux échecs avec le sens imprimé. Sur $X = [-1, 2]$ muni de la structure paralinéaire usuelle de paramètres $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$, prenons les jeux à une carte globale $D = \{f\}$, $E = \{g\}$ et $Z = \{0\}$, où $f(t) = |t|$, $g(t) = |t-1|$ et $0 : X \to \mathbf{R}^0$. Ces cartes sont paralinéaires, et chaque jeu G-recouvre X par le domaine compact X. Le préordre imprimé $D \preceq E$ signifie que chaque carte de D se factorise vers une carte de E sur un domaine qui contient le sien, par une application affine de l'espace d'arrivée de la première vers celui de la seconde. Ainsi Z est un majorant de D et E, et $\Gamma = \{D, E, Z\}$ satisfait la filtration imprimée.

Prenons le bidegré $(0, 0)$ et $\Phi = \Psi$ égales à la famille de tous les fermés de X. Les fonctions f, g sont G-lisses sur leurs subdivisions affines et appartiennent respectivement aux étages D, E, avec la coordonnée lisse d'arrivée comme coefficient. Une fonction de l'étage D est constante sur les fibres de f, comme le montre le test sur le domaine compact X lui-même. De même pour E, et l'étage Z ne contient que les constantes. Or $f + g$ vaut $3, 1$ en $-1, 1$, sur une même fibre de f, et vaut $1, 3$ en $0, 2$, sur une même fibre de g. Le produit fg vaut $2, 0$ sur la première paire et $0, 2$ sur la seconde. Les deux fonctions sont non constantes. Ni la somme ni le produit n'appartiennent donc à la réunion des trois étages. Pour le produit, $\alpha = f$ et $\omega = g$ sont deux facteurs de bidegré $(0, 0)$, avec tous les supports permis. L'échec d'appartenance précède toute question de continuité et est indépendant de la coquille de bidegré à la ligne 2418 (n° 528).

Ordre corrigé et étages. Conservons le préordre $\preceq$. Demandons que Γ soit non vide et que, pour tout $D, E \in \Gamma$, il existe $H \in \Gamma$ avec $H \preceq D, E$. Pour une famille non vide de supports Φ, stable par réunions finies et passage aux sous-ensembles fermés, notons $A^{p,q}_{D,F}$ l'espace des formes de l'étage D de support contenu dans $F \in \Phi$. Sa topologie est induite par les semi-normes des formes ordinaires sur les images compactes des cartes de D.

Si $D \preceq E$, pour une carte $d : U \to L$ de D on a une carte $e : V \to M$ de E et $a : L \to M$ affine permise telles que $U \subset V$ et $e|_U = a \circ d$. Sur tout domaine compact $K \subset U$, le coefficient ordinaire β d'une forme de l'étage E sur $e(K)$ donne le coefficient $a^*\beta$ sur $d(K)$. L'identification de ces coefficients utilise l'injection sur images compactes de §3.4.4. Sur une subdivision cellulaire finie adaptée, les mineurs du linéaire de a sont constants et la règle de la chaîne donne

$$\|a^*\beta\|_{d(K),r} \leq C_r \|\beta\|_{e(K),r}$$

pour chaque ordre fini r. Sur les cellules de dimension inférieure, on travaille dans leurs enveloppes affines et les degrés extérieurs trop grands donnent zéro. L'inclusion $A^{p,q}_{E,F} \to A^{p,q}_{D,F'}$ est donc continue dès que $F \subset F'$, à tout ordre m, y compris $m = \infty$ dont les voisinages de base combinent un nombre fini de semi-normes.

Pour deux étages $(D, F), (E, F')$, le minorant H et $F \cup F'$ fournissent un étage commun. La réunion est donc un espace vectoriel et la colimite algébrique des inclusions dirigées, les relations finies se vérifiant dans un étage commun. Les semi-normes dont toutes les restrictions aux étages sont continues engendrent sa topologie localement convexe finale, la plus fine rendant les inclusions continues. Pour un but localement convexe, les semi-normes tirées en arrière montrent qu'une application linéaire est continue exactement quand toutes ses restrictions aux étages le sont. La topologie croît avec l'ordre, car toute semi-norme continue sur les étages à l'ordre m le reste à un ordre supérieur.

La famille de tous les jeux G-couvrants satisfait la condition corrigée. Sur chaque intersection de domaines de deux jeux, prenons la carte produit. En un point, les intersections de deux témoins finis des G-recouvrements couvrent l'intersection des voisinages qu'ils recouvrent. Les projections affines donnent le minorant. Un jeu identique unique convient également. Pour les cartes analytiques par logarithmes d'unités dont les intérieurs recouvrent X, les intersections

préservent cette couverture et les unités se concatènent. Dans la variante stricte, on utilise la stabilité par intersections finies des domaines analytiques stricts dans l’espace ambiant strict au sens de §11.8.1, y compris sous valuation triviale et sans séparation analytique ambiante.

Produit à facteur fixé. Soit α une forme fixée de bidegré (p', q') tropicalisée par un jeu $E \in \Gamma$. Gardons la condition originale sur Φ, Ψ. Tout fermé de X contenu dans $\operatorname{supp}\alpha$ qui appartient à Φ appartient à Ψ. Pour l’étage d’entrée (D, F), prenons $H \preceq D, E$ et $B = F \cap \operatorname{supp}\alpha$. Alors $B \in \Phi$ par stabilité par passage aux fermés et $B \in \Psi$ par l’hypothèse. Le produit est porté par B par localité. Sur chaque image compacte de H, les coefficients ordinaires du produit sont des sommes finies de produits des coefficients des deux formes, avec des signes fixes. Par Leibniz, la semi-norme d’ordre r est majorée par une constante fois le produit des deux semi-normes d’ordre r sur cette image. Celle d’α est fixée et la précédente estimation affine contrôle celle de ω depuis l’étage D, sans perte d’ordre. On obtient à tout ordre fini et à l’ordre infini l’application continue

$$A^{p,q}_{D,F} \longrightarrow A^{p+p',q+q'}_{H,B}, \qquad \omega \longmapsto \alpha \wedge \omega.$$

Les topologies de ces étages supportés sont les topologies induites. Le choix de H, B est fixe sur tout l’étage d’entrée. La propriété finale linéaire donne la continuité vers $A^{p+p',q+q'}_{\Gamma,\Psi}$. La preuve établit la continuité pour ce facteur fixé. La continuité conjointe sur le produit des espaces finaux est une question distincte.

116. Cofinalité des jeux de cartes et inclusion des espaces de formes

Texte visé. §3.7.6, p. 93, `espgtrop.tex`, lignes 2302–2318. La relation imprimée entre familles figure aux lignes 2262–2270.

Deux contre-exemples. Sur $X = [0,1]$ muni de sa structure paralinéaire usuelle de paramètres $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$, considérons le jeu I de la carte identité et le jeu Z de la carte constante vers $\mathbf{R}^0$, tous deux G-couvrants sur le domaine compact X. On a $I \preceq Z$ puisque la carte constante est une composée affine de l’identité. En bidegré $(0,0)$, l’étage de I contient t, alors que celui de Z ne contient que les constantes, par le test sur le domaine X. Prenons $\Phi = \Psi$ égales à la famille de tous les fermés. Pour $\Gamma = \{I\}$ et $\Delta = \{Z\}$, la relation imprimée $\Gamma \preceq \Delta$ est satisfaite et t est dans l’espace associé à Γ, mais pas dans celui associé à Δ.

Prenons maintenant $\Gamma' = \{I, Z\}$ et $\Delta' = \{Z\}$. Chacune est cofinale vers le haut dans la réunion, puisque Z est un majorant de tout élément et appartient aux deux familles. Les espaces correspondants restent différents, car seul celui de Γ' contient t. Les familles utilisées sont dirigées dans les deux sens et les espaces associés sont vectoriels. Les deux échecs sont donc distincts du défaut de linéarité de §3.7.5 (n° 115).

Correction. Gardons le préordre $\preceq$ des cartes. Soient Γ, Δ des familles non vides de jeux G-couvrants sur X, chacune à minorants communs, et $\Phi \subset \Psi$ des familles de supports. Pour obtenir l’inclusion continue $A^{p,q}_{\Gamma,\Phi} \hookrightarrow A^{p,q}_{\Delta,\Psi}$, demandons

$$\forall D \in \Gamma \quad \exists E \in \Delta \quad E \preceq D.$$

C’est la cofinalité de Δ vers le bas dans la réunion. Celle-ci a alors des minorants communs, en choisissant un minorant dans Δ de deux représentants inférieurs dans Δ.

Fixons un étage (D, F) de la source et un $E \in \Delta$ comme dans la condition corrigée. Pour une carte $e : V \to L$ de E, il existe une carte $d : U \to M$ de D avec $V \subset U$ et $d|_V = a \circ e$, où $a : L \to M$ est affine. Sur un domaine compact $K \subset V$, un représentant ordinaire β sur $d(K)$ se tire en arrière en $a^*\beta$ sur $e(K)$. Sur les enveloppes affines des cellules d’une subdivision finie adaptée, la règle de la chaîne et les mineurs constants du linéaire de a donnent $\|a^*\beta\|_{e(K),r} \leq C_r \|\beta\|_{d(K),r}$ pour tout ordre fini r. Les coefficients sont ceux des formes ordinaires sur images compactes, avec l’injection de §3.4.4. On obtient l’inclusion continue vers l’étage E pour tous

les ordres, y compris ∞, en traitant à chaque fois les semi-normes finies d'un voisinage de base. Le support reste contenu dans $F \in \Psi$, donc l'inclusion se factorise par l'étage supporté (E, F) de la cible. Ces factorisations sont compatibles, puisqu'elles sont l'identité sur les formes. La propriété finale linéaire donne l'inclusion continue annoncée. Si les supports coïncident et que le critère vaut aussi en échangeant Γ, Δ, les deux inclusions continues sont inverses et les espaces et topologies coïncident.

117. Jeux de cartes pour le tiré en arrière et la restriction

Texte visé. Proposition 3.7.9, p. 94, `espgtrop.tex`, lignes 2459 et 2473–2476, et proposition 3.7.12(c), p. 95–96, lignes 2558–2564 et 2607–2616. Le quantificateur relatif imprimé est défini aux lignes 2262–2270.

Relation relative. Pour $u : Y \to X$, un jeu E sur Y et un jeu D sur X, conservons $E \preceq_u D$ lorsque, pour toute carte $e : V \to L$ de E, une carte $d : W \to M$ de D et une application affine $a : L \to M$ vérifient $u(V) \subset W$ et $d \circ u|_V = a \circ e$. Une forme présentée sur D se tire alors en arrière sur E. La relation imprimée entre familles $\Delta \preceq_u \Gamma$ demande un $D \in \Gamma$ pour chaque $E \in \Delta$. La preuve a besoin de trouver un jeu à la source pour chaque jeu donné au but.

Tiré en arrière sans le quantificateur requis. Sur $I = [0,1]$ de structure paralinéaire usuelle de paramètres $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$, prenons $u = \mathrm{id}_I$, $D_1 = \{t : I \to \mathbf{R}\}$, $D_0 = \{0 : I \to \mathbf{R}^0\}$, $\Gamma = \{D_1, D_0\}$ au but et $\Delta = \{D_0\}$ à la source. Ces jeux sont G-couvrants. Les familles sont dirigées dans les deux sens, car $D_1 \preceq D_0$. Prenons le bidegré $(0,0)$ et les familles de tous les fermés. Les supports se tirent en arrière par l'identité et la relation imprimée vaut par le choix $E = D = D_0$. La fonction t appartient à l'étage D_1, mais son tiré en arrière n'appartient pas à l'étage D_0, dont le test sur le compact I impose un coefficient sur un point. L'application de 3.7.9 ne prend donc pas ses valeurs dans l'espace annoncé.

Prolongement par zéro sous les hypothèses imprimées. Prenons $X = I \sqcup \{z\}$, $U = I$, $j : U \hookrightarrow X$ et le bidegré $(1,1)$. Sur U, prenons $\Gamma = \{C_U\}$, avec C_U la carte constante vers $\mathbf{R}^0$. Sur X, prenons $\Delta = \{C_X, L_X\}$. Les deux jeux comprennent la carte constante sur $\{z\}$, et sur I ils ont respectivement la carte constante et la coordonnée t. Les jeux sont G-couvrants par composantes, ouvertes et fermées, et $L_X \preceq C_X$, donc les familles sont dirigées dans les deux sens. Prenons tous les fermés de U et de X comme Φ, Ψ. Chaque $F \in \Phi$ est fermé dans X. Le jeu C_X est inférieur au jeu $C_U^F = C_U \cup \{0 : X \setminus F \to \mathbf{R}^0\}$, en utilisant la carte sur I et la carte complémentaire respectivement. Les hypothèses de prolongement de 3.7.11 valent donc pour tout F. La relation imprimée pour l'inclusion j vaut par $C_U \preceq_j C_X$. Tout fermé de X situé dans U est dans Φ, et $d_{\mathrm{trop}}(z) = 0 < 1$. Pourtant l'espace de formes sur U de l'étage C_U est nul en degré $(1,1)$, tandis que l'étage L_X contient $d't \wedge d''t$ sur I, prolongée par zéro au point. Cette forme est non nulle, de support I. Le prolongement annoncé en 3.7.12(c) n'est pas surjectif.

Correction de 3.7.9. Pour les familles non vides à minorants communs et les familles non vides de supports stables par réunions finies et sous-ensembles fermés, gardons la topologie finale des étages supportés. Les semi-normes de ces étages sont induites par les formes ordinaires sur les images compactes des cartes. Supposons

$$\forall D \in \Gamma \quad \exists E \in \Delta \quad E \preceq_u D, \qquad F \in \Phi \implies u^{-1}(F) \in \Psi,$$

avec Γ, Φ sur X et Δ, Ψ sur Y. Dans la factorisation de la preuve, le sous-indice de la relation relative est u. Alors $u^* : A^{p,q}_{\Gamma,\Phi}(X) \to A^{p,q}_{\Delta,\Psi}(Y)$ est linéaire et continue à tout ordre m, fini ou infini, sans perte d'ordre.

En effet, fixons (D, F) et choisissons le jeu E de la condition corrigée. Pour une carte $e : V \to L$ de E, un domaine compact $K \subset V$ et les données d, W, a de la relation relative, prenons un domaine compact $C \subset W$ contenant $u(K)$. Un recouvrement par voisinages domaniaux compacts de W, la compacité de $u(K)$ et la réunion finie donnent un tel C. Une présentation

ordinaire sur $d(C)$ se tire en arrière par a sur $e(K)$. Sur une subdivision cellulaire finie adaptée, les mineurs constants de la partie linéaire de a et la règle de la chaîne majorent chaque semi-norme d'ordre r sur $e(K)$ par une constante fois celle d'ordre r sur $d(C)$. Les calculs se font dans les enveloppes affines des cellules, avec annulation des degrés trop grands. L'identification des coefficients utilise l'injection de §3.4.4 sur images compactes. À l'ordre infini, tout voisinage de base n'utilise qu'un nombre fini de semi-normes d'ordres finis. Par localité, le support tiré en arrière est contenu dans $u^{-1}(F)$. La factorisation dans l'étage supporté $(E, u^{-1}(F))$ et la propriété finale linéaire donnent la continuité. Pour la famille de tous les jeux, le tiré en arrière du jeu D fournit E, car les témoins finis du G-recouvrement se tirent en arrière par continuité. Cela donne aussi les cas de supports fermés, et de supports compacts si le morphisme est propre.

Correction de 3.7.12(c). Gardons les hypothèses de 3.7.11. Chaque $F \in \Phi$ est fermé dans X et appartient à Ψ. Pour tout $D \in \Gamma$ et tout $F \in \Phi$, un $E \in \Delta$ vérifie $E \preceq D^F$, où $D^F = D \cup \{0 : X \setminus F \to \mathbf{R}^0\}$. Gardons aussi les conditions originales de 3.7.12(c)

$$H \in \Psi,\ H \text{ fermé dans } X,\ H \subset U \implies H \in \Phi, \qquad d_{\mathrm{trop}}(x) < k = \max(p, q) \quad (x \in X \setminus U).$$

Remplaçons la condition relative par

$$\forall E \in \Delta \quad \exists D \in \Gamma \quad D \preceq_j E.$$

Le prolongement $j_!$ est alors un homéomorphisme de réciproque j^*, à tout ordre m.

Pour la continuité de $j_!$, sur un étage (D, F) on recolle la forme sur U et zéro sur $X \setminus F$, avec égalité sur l'intersection. Le support est conservé. Vers l'étage (D^F, F), les anciennes cartes donnent les mêmes semi-normes et la carte complémentaire donne des semi-normes nulles. Les formes de cet étage se restreignent à (D, F), puis se prolongent en la forme initiale. Le passage à (E, F) avec $E \preceq D^F$ est une inclusion continue et la propriété finale donne la continuité de $j_!$.

Pour j^*, fixons un jeu $E \in \Delta$ et $x \in X \setminus U$. Le G-recouvrement de E fournit un nombre fini de cartes $e_i : V_i \to L_i$ dont les domaines contiennent tous x et recouvrent un voisinage de x. Dans chaque V_i, choisissons un voisinage domanial compact relatif K_i de x avec $\dim e_i(K_i) < k$, par la définition locale de la dimension. Toute forme de l'étage E est nulle sur chacun de ces K_i, car sur les cellules de l'image un des facteurs extérieurs a un degré trop grand. La réunion des K_i contient un voisinage ouvert N_x de x. En effet, on intersecte un ouvert recouvert par les V_i avec des ouverts ambiants dont les traces dans V_i sont contenues dans K_i. Les $K_i \cap N_x$ forment un recouvrement fermé fini, donc un G-recouvrement de N_x, sur lequel toutes les formes de l'étage s'annulent. Ainsi $T_E = X \setminus \bigcup_x N_x$ est un fermé contenu dans U qui porte toutes les formes de l'étage E. Si $k = 0$, la condition de dimension impose $U = X$ et $T_E = X$ convient.

Pour l'étage supporté (E, F), posons $H = F \cap T_E$. Il appartient à Ψ par stabilité par passage aux fermés et à Φ par la condition faible ci-dessus. Le choix $D \preceq_j E$ et la preuve de 3.7.9 à étages fixes rendent continue la restriction vers (D, H). Il s'agit d'un support fixé pour tout l'étage, et la topologie induite donne ainsi la continuité de j^* par finalité. On a $j^* j_! = \mathrm{id}$, et $j_! j^* = \mathrm{id}$ puisque la forme d'un étage s'annule hors de son porteur T_E. Le porteur par étage permet d'appliquer le résultat G-tropical de tiré en arrière avec les supports effectivement disponibles. La correction de la référence à la ligne 2616 relève de n° 529.

118. Base canonique des formes dans le quotient par l'idéal négligeable

Texte visé. Remarque 4.1.8, p. 99.

`calibrages-pl.tex`, lignes 230–239.

Correction. Dans les deux assertions relatives à une base en bidegré général, prendre les classes des $f^*\alpha_{I,J}$ dans $\mathscr{G}^{p,q}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}^{p,q}$. La proposition 4.1.7 donne ces bases après passage au quotient. Si $\max(p,q) = n$, le corollaire 4.1.4 donne $\mathscr{I}_n\mathscr{G}^{p,q} = 0$, et la formulation dans le faisceau des formes lui-même s'applique, notamment au bidegré $(n, 0)$.

119. Constante locale des coefficients dans la base quotient

Texte visé. Définition 4.1.9, p. 99.

`calibrages-pl.tex`, lignes 267–277.

Correction. Définir la constance G-locale par les coefficients canoniques de la classe dans $\mathscr{G}^{p,q}/\mathscr{I}_n\mathscr{G}^{p,q}$, dans les bases de la remarque 4.1.8 corrigée en n° 118. Pour une section de $\mathscr{G}^{p,q}$, la condition porte sur sa classe. Dans les bidegrés $\max(p,q) = n$, l'idéal annule le faisceau, et la définition s'exprime directement sur les formes.

120. Section de comparaison de deux orientations

Texte visé. Lemme 4.2.5(b), pp. 101–102.

`calibrages-pl.tex`, lignes 445–464.

Correction. Deux orientations déterminent une section canonique inversible α de $\mathscr{A}/\mathscr{I}_n$, donnée cellule par cellule par le rapport des signes d'orientation. Elle satisfait $\alpha^2 = 1$ et induit l'identité de comparaison entre les deux applications sur M indiquée dans le lemme. L'unicité déduite de cette action sur $M(Y)$ demande la fidélité de l'action. Par exemple, pour $M = 0$ sur une cellule orientable, les deux sections 1 et -1 agissent de la même façon.

121. Tiré en arrière d'une forme-volume en rang insuffisant

Texte visé. § 4.3.5, p. 103.

`calibrages-pl.tex`, lignes 622–643.

Correction. Sur une cellule X_i où $\dim f(X_i) < n$, poser $(f^*\omega)|_{X_i} = 0$, même si $\dim X_i = n$. Lorsque l'image a dimension n, $f|_{X_i}$ est un isomorphisme sur son image et le couple $[f^*\omega_j, f^*\varepsilon_j]$ est défini. La densité nulle est indépendante de l'orientation. Elle se restreint et se subdivise comme les autres branches de la construction.

122. Support fermé dans le recollement des formes-volume

Texte visé. Lemme 4.3.8(c), preuve, p. 105.

`calibrages-pl.tex`, lignes 753–781.

Correction. Dans le cadre paracompact PL, raffiner le G-recouvrement par des domaines compacts PL subordonnés, localement finis dans X. Près d'un point, une famille finie des domaines qui le contiennent couvre un voisinage. Comme ces domaines sont localement fermés, on peut les rendre fermés dans un voisinage commun puis les intersecter avec de petits voisinages compacts PL. La paracompacité fournit une famille localement finie de ces voisinages, et leurs recouvrements finis par les morceaux fermés sont des G-recouvrements.

Restreindre chaque support Σ_i au domaine compact correspondant. Cette restriction est fermée dans X. Leur réunion localement finie est un sous-espace PL fermé de dimension au plus n, et les classes compatibles se recollent sur ce support.

123. Stricte positivité du calibrage image

Texte visé. § 4.5.4, pp. 109–110.

`calibrages-pl.tex`, lignes 1204–1271.

Correction. Une immersion par morceaux propre préserve la positivité du calibrage. Pour la stricte positivité, exiger que chaque cellule cible pertinente de dimension n reçoive une cellule source de dimension n dans une subdivision adaptée. La surjectivité suffit. Sous cette hypothèse, le coefficient cible est une somme finie non vide de coefficients strictement positifs transportés par des isomorphismes affines.

Une inclusion propre d'un intervalle fermé dans la droite, à calibrage unitaire sur l'intervalle, fournit un poids nul sur les cellules de dimension un hors de son image. La propreté seule ne suffit donc pas.

124. Multiplication des formes localement intégrables

Texte visé. §4.5.6, p. 110, `calibrages-pl.tex`, lignes 1317–1319.

Contre-exemple. Sur $[0,1]$ muni de sa structure paralinéaire standard de niveau 1, prenons le calibrage positif unitaire μ et la forme $\omega = d'x \wedge d''x$. La mesure associée est la mesure de Lebesgue sur l'intervalle, donc ω est localement μ-intégrable. La fonction b donnée par $b(x) = 1/x$ pour $x > 0$ et $b(0) = 0$ est borélienne à valeurs réelles finies sur cette cellule. Son prolongement par zéro hors de la cellule est borélien. La forme $b\omega$ a pour mesure de variation $b(x)\,dx$. Pour $0 < \delta < \varepsilon \leq 1$, la masse de $[\delta, \varepsilon]$ vaut $\log(\varepsilon/\delta)$. Tout voisinage de zéro contient un intervalle $[0, \varepsilon]$ de masse infinie. La stabilité par multiplication par tout scalaire borélien échoue.

Énoncé corrigé. Les formes boréliennes (n, n) localement μ-intégrables forment un sous-faisceau d'espaces vectoriels réels et un sous-module sur les scalaires boréliens G-localement bornés. L'application $\omega \mapsto \langle \omega, \mu \rangle_{\mathrm{Rad}}$ est $\mathbf{R}$-linéaire et commute à la multiplication par ces scalaires.

Sur une cellule de dimension n, écrivons la forme avec le coefficient a dans la base positive supérieure et le calibrage avec le coefficient m dans le repère dual. La mesure de variation est $|am|\,dx$. L'inégalité triangulaire donne la stabilité par addition et $|bam| \leq M|am|$ là où le scalaire est borné par M. La finitude locale se vérifie sur des témoins finis de G-recouvrement et par raffinement cellulaire compact. Ainsi la bornitude G-locale suffit. Les cellules de dimension inférieure à n donnent zéro. Les restrictions sont compatibles avec la construction locale, et les mesures signées se recollent avec les densités $am\,dx$, ce qui donne la linéarité et la formule $\langle b\omega, \mu \rangle_{\mathrm{Rad}} = b\,\langle \omega, \mu \rangle_{\mathrm{Rad}}$. Cette multiplication de mesures s'entend en intégrant b localement contre les parties de Jordan.

Sur une cellule compacte fixée. Soit D de dimension n et $d\nu = |m|\,dx$. Les coefficients boréliens finis intégrables sont ceux de $L^1(\nu)$, puisque la finitude locale de leur mesure de variation équivaut à la finitude sur D. Les multiplicateurs qui préservent tous ces coefficients sont exactement les scalaires essentiellement bornés pour ν. La suffisance suit de l'estimation précédente. Pour la nécessité, si b est essentiellement non borné, choisissons des bandes boréliennes disjointes E_j, de masse $0 < \nu(E_j) < \infty$, sur lesquelles $|b| \geq 2^{2j}$. On prend des bornes inférieures au-dessus des bornes supérieures déjà utilisées et on intersecte avec des ensembles $\{|m| \leq k\}$ de masse finie. La finitude des valeurs permet de choisir chaque borne supérieure finie. Alors

$$a = \sum_{j \geq 1} \frac{2^{-j}}{\nu(E_j)} \mathbf{1}_{E_j} \quad \text{vérifie} \quad \int_D |a|\,d\nu < \infty, \qquad \int_D |ba|\,d\nu = \infty.$$

Ce coefficient est fini en tout point par disjonction des bandes et se prolonge par zéro hors de la cellule fermée. Le critère essentiel concerne cette cellule fixée et sa mesure ν. L'énoncé de faisceau utilise la bornitude G-locale ponctuelle.

125. Forme-volume de bord et restriction aux ouverts

Texte visé. §4.6.3, p. 112, `calibrages-pl.tex`, lignes 1555–1557.

Contre-exemple sur le G-site. Prenons $X = [-1, 1]$ avec la structure paralinéaire usuelle de niveau 1, le calibrage unitaire et les coefficients boréliens. Les domaines fermés $C_- = [-1, 0]$ et $C_+ = [0, 1]$ forment un G-recouvrement. Les formes $d''t$ sur C_- et zéro sur C_+ se recollent en une G-forme ω de bidegré $(0, 1)$. Les deux restrictions à leur intersection ponctuelle sont nulles par degré. La forme-volume de bord sur X est le terme $+1$ en 0 et le terme -1 en -1, donnés par les deux extrémités orientées de C_-. La contribution de C_+ est nulle. La restriction de cette forme-volume à C_+ conserve le terme au point 0, dont le singleton est un porteur fermé de dimension zéro. Or $\omega|_{C_+} = 0$, exactement comme la restriction de la forme globale nulle, qui donne un terme de bord nul. Le calibrage ambiant est le même dans les deux calculs. La construction ne commute donc pas à toute restriction domaniale.

Correction. Fixons μ et restreignons à la topologie des ouverts ordinaires les faisceaux de coefficients, de formes et de formes-volume. L'application $\omega \mapsto \langle \omega, \mu \rangle$ y définit un morphisme de modules sur le faisceau restreint des coefficients, des formes de type $(n - 1, n)$ vers les formes-volume signées de dimension $n - 1$.

Sur un voisinage ouvert paralinéaire, la construction cellulaire donne les sommes signées sur les faces fermées. Le lemme 4.6.2 compare ces sommes après raffinement compatible. Sur un ouvert ordinaire contenant un point d'une face, toutes les cellules incidentes y sont encore représentées au voisinage de ce point. Les contributions sur les faces intérieures ajoutées par raffinement s'annulent par orientations opposées, et les faces héritées portent la somme d'incidence restreinte. Les formes-volume concordent donc sur les intersections des ouverts et se recollent. Un coefficient scalaire multiplie chaque terme incident par sa restriction sur la face, ce qui donne la linéarité de module sur ce site.

126. Propreté des inclusions dans la compensation des bords

Texte visé. Proposition 4.6.6, p. 113.

`calibrages-pl.tex`, lignes 1614–1629.

Correction. Prendre un G-recouvrement localement fini par des domaines fermés dans X. Chaque intersection finie est fermée, donc son inclusion est propre et l'image directe du bord est définie. Les contributions d'une cellule sont calculées sur une subdivision commune. Pour l'ensemble fini K des indices des domaines contenant cette cellule, on a $\sum_{\emptyset \neq J \subseteq K} (-1)^{|J|+1} = 1$. Cela donne la compensation des bords.

Pour un domaine ouvert non fermé de la droite, l'inclusion n'est pas propre. Les images directes du texte exigent donc une hypothèse qui les rende définies.

127. Négligeabilité dans la définition de la discordance

Texte visé. Remarque 4.6.11, pp. 114–115.

`calibrages-pl.tex`, lignes 1838–1854.

Correction. Employer la $(n - 1)$-négligeabilité pour la classe de discordance et pour son indépendance de la subdivision. Deux subdivisions admettent G-localement un raffinement commun. Le calcul d'incidence du § 4.6.8 donne les mêmes valeurs sur les cellules ouvertes de

dimension $n-1$. Les exceptions sont contenues dans les cellules de dimension au plus $n-2$, d'où l'indépendance dans le quotient corrigé.

128. Discordance globale et harmonie sur les faces fermées

Texte visé. Remarque 4.6.11, p. 115, `calibrages-pl.tex`, lignes 1863–1864.

Contre-exemple. Dans le plan paralinéaire affine de niveau 2, prenons pour carte l'identité. Multiplions le calibrage standard par $1+\mathbf{1}_{\{0\}}$ sur le demi-plan supérieur fermé, et laissons-le standard sur le demi-plan inférieur fermé. Ces coefficients boréliens sont strictement positifs et définissent un calibrage par la construction sur cellules fermées. Les valeurs des coefficients sur les deux cellules de dimension deux sont conservées à l'origine. Sur l'axe horizontal, les deux contributions orientées s'annulent sauf à l'origine, où leur somme est un bivecteur unitaire à un signe près.

Le défaut subsiste sur une décomposition adaptée. Par locale finitude des cellules fermées, près de l'origine les cellules qui rencontrent le voisinage contiennent l'origine. Une cellule de dimension deux qui rencontre les deux demi-plans ouverts devrait avoir, par comparaison sur deux recouvrements de pleine dimension, les deux valeurs 1 et 2 au même point. L'axe est donc une frontière cellulaire près de l'origine, et une face fermée de l'axe contenant l'origine reçoit la différence entre les deux coefficients. Ainsi l'harmonie ponctuelle échoue. Pourtant, après raffinement en quadrants et adaptation locale à la partie paralinéaire testée, les faces ouvertes de dimension un évitent l'origine et ont discordance nulle. Le prolongement par zéro donne des classes globales nulles. La valeur exceptionnelle est portée par un singleton, qui est 1-négligeable et disparaît dans le quotient corrigé de n° 127.

Correction. L'harmonie ponctuelle implique l'annulation des classes globales, définies modulo les ensembles $(n-1)$-négligeables. Réciproquement, supposons continues les traces de discordance sur les faces fermées d'une décomposition adaptée. Un calibrage G-localement constant suffit. Sur chaque face fermée, l'annulation de la classe donne l'annulation de la trace dans l'intérieur relatif hors d'un ensemble $(n-1)$-négligeable. Le complément est dense dans la face. Par continuité la trace est nulle sur toute la face, y compris sur ses bords de dimension inférieure. La comparaison sur faces fermées par raffinement donne alors l'harmonie ponctuelle. Le seuil de négligeabilité de n° 127 et la régularité nécessaire à ce raisonnement interviennent à des étapes distinctes.

129. Restriction pure à une trace paralinéaire

Texte visé. §5.1.7, p. 121, `espcalibres.tex`, lignes 211–215.

Deux branches fidèles à intersection non paralinéaire. Posons

$$I=[0,1],\qquad A=\{0\}\cup\bigcup_{j\geq 1}[1/(2j+1),1/(2j)].$$

Soient P le graphe de la fonction nulle sur I, W celui de $t\mapsto \operatorname{dist}(t,A)$ et $X=P\cup W$, muni de la topologie compacte induite du plan. La première coordonnée π identifie chaque branche à I. Leur intersection se projette sur A. Les composantes d'intervalle de A s'accumulent en 0, donc A n'est pas paralinéaire dans I.

Fixons $(K,G)=(\mathbf{Q},\mathbf{R})$. Prenons pour domaines les parties localement fermées de X dont les traces sur les deux branches sont paralinéaires dans la coordonnée π, et pour fonctions paralinéaires les fonctions continues qui sont paralinéaires sur ces deux traces. Les ouverts et les intersections sont admis. Un G-recouvrement pointé se restreint à chaque branche, ce qui donne la reconnaissance des domaines. Le recollement de fonctions continues sur un G-recouvrement se vérifie avec les témoins finis dont les membres sont fermés près du point, puis la paralinéarité se vérifie sur les traces. Pour obtenir des voisinages domaniaux compacts

en un point commun aux branches, prenons l'image réciproque d'un petit intervalle fermé autour de sa coordonnée. La fibre y est singleton, et la compacité de X et la fermeture de π permettent de placer ce voisinage dans un ouvert prescrit. Hors de l'intersection, prenons un petit intervalle fermé dans $I \setminus A$ sur la branche concernée. En coupant avec le domaine dans un ouvert où il est fermé, on obtient le G-recouvrement par des domaines compacts. Les images de cartes sur un domaine compact sont des réunions finies de polyèdres compacts venant des deux traces. La composition et les images réciproques se vérifient sur chaque trace, avec la fermeture locale requise par continuité. La coordonnée π est une carte fidèle sur chacune des deux branches, car elle s'étend à X et les traces des domaines et les restrictions des cartes y sont paralinéaires.

Dans un domaine D, prenons pour parties squelettiques élémentaires les parties de $P \cap D$ fermées dans D et paralinéaires dans P. La restriction à un domaine préserve ces conditions. Pour la réunion finie de parties élémentaires de domaines fermés, on peut prendre X avec la partie élémentaire P qui contient la réunion. Ainsi X est chordé et P porte le calibrage unitaire pur de dimension 1. Avec $V = X$ et la branche fidèle W, la trace $P \cap W$ n'est pas paralinéaire dans P, puisque son image est A. Les parties calibrées de l'identité imprimée ne sont donc pas définies.

Correction. Exiger que $B = P \cap W$ soit paralinéaire dans P. Ceci vaut en particulier lorsque W est un domaine de V. La trace $P \cap V$ est paralinéaire et les deux parties B et $B \cap |P \cap V|$ portent les calibrages induits. Dans une subdivision compatible, le support pur est localement la réunion des p-cellules fermées dont le calibrage est non nul. Toute cellule ainsi retenue dans B appartient au support $|P \cap V|$ avec le même calibrage. Réciproquement, une p-cellule à calibrage non nul de $B \cap |P \cap V|$ est une telle cellule de B. On obtient avec les mêmes calibrages

$$\big|\,|P \cap V| \cap W\,\big| = |P \cap W|.$$

L'identité inclut le support vide et s'applique aux restrictions successives aux domaines.

130. Infimum et supremum des calibrages signés

Texte visé. Lemme 5.1.9, pp. 122–123.

`espcalibres.tex`, lignes 308–352.

Correction. Sur une subdivision commune, prendre l'infimum sur la partie pure de dimension p de l'intersection, avec le minimum des deux poids présents. Pour le supremum, prendre la réunion des supports, avec le maximum sur leur intersection et le seul poids présent ailleurs. Les poids se recollent sur ces supports fermés. Toute borne inférieure a son support dans l'intersection et ses poids sous les deux poids présents. Toute borne supérieure contient la réunion et domine chaque poids présent.

Sur les intervalles disjoints $[0, 1]$ et $[2, 3]$ munis chacun du calibrage -1, le minimum après prolongement par zéro a le support des deux intervalles, et le maximum s'annule. Le prolongement par zéro convient aux calibrages positifs, où la comparaison avec zéro respecte l'ordre.

131. Constantes dans les générateurs affines analytiques

Texte visé. Exemple 5.2.8, p. 126, `espcalibres.tex`, lignes 591–594.

Contre-exemple. Pour un corps complet ultramétrique trivialement valué k, prenons le point analytique $\mathcal{M}(k)$, séparé et de dimension pure zéro. Toute unité analytique a valeur absolue 1 en ce point. Les logarithmes imprimés sont donc tous nuls, alors que l'affinage doit contenir la constante 1.

Correction. Pour un espace k-analytique topologiquement séparé, de dimension pure n, sur un corps ultramétrique complet k, prendre les expressions locales pour la topologie ordinaire du domaine analytique

$$c + \sum_{j=1}^{r} a_j \log |u_j|, \qquad c \in \mathbf{R}, \quad a_j \in \mathbf{Q},$$

où les u_j sont des unités analytiques sur le domaine considéré. Les fonctions paralinéaires sont les fonctions G-localement affines. Cette prescription est la version pour l'affinage de la correction au §3.1.7 (n° 104). En chassant les dénominateurs et en multipliant les puissances entières des unités, on obtient une expression $a \log |u| + c$. Le produit vide donne les constantes.

Pour un uplet fini, on recueille toutes les unités sur un raffinement commun et on écrit la carte comme composée d'un moment tropicalisé et d'une application affine à coefficients rationnels et à translation réelle. Sur un domaine compact de présentation, on applique la borne de dimension de l'image au moment joint. Une projection à coefficients rationnels peut être choisie injective sur les directions des cellules de l'image, en nombre fini, vers $\mathbf{R}^n$ si la réduction d'arité est nécessaire. Après multiplication par un entier, ses coordonnées correspondent à des monômes en les unités du moment. Sur chaque cellule, l'inverse affine sur l'image redonne les expressions G-locales. Les constantes réelles sont conservées dans ces applications affines. La borne de dimension des images compactes est l'entrée utilisée dans cette réduction.

132. Topologie initiale des restrictions aux squelettes

Texte visé. Remarque 5.2.9, p. 126.

`espcalibres.tex`, lignes 627–666.

Correction. La topologie est la moins fine des topologies localement convexes rendant continues les restrictions indiquées. La continuité de ces restrictions donne une comparaison. Dans l'autre sens, la richesse permet de majorer chaque semi-norme de carte par un nombre fini de semi-normes de restrictions à des cellules squelettiques compactes.

Sur $\mathbb{R}$, des translatées f_j d'une bosse lisse, de supports disjoints s'échappant à l'infini, tendent vers zéro pour la topologie C^∞ sur les compacts. Une forme linéaire algébrique L vérifiant $L(f_j) = 1$ existe par indépendance. L'ajout de $|L|$ rend la topologie strictement plus fine et conserve la continuité des restrictions.

133. Cellules affines dans le test du support fort

Texte visé. Lemme 5.3.4, p. 128, `espcalibres.tex`, lignes 804–808.

Une f-cellule au sens de §5.4.1 est contenue dans le lieu maximal $\Sigma_f^{(n)}$. Sur l'intervalle paralinéaire standard $[-1, 1]$, au niveau 1, prenons $f(t) = \max(t, 0)$. Cette carte à pentes rationnelles a pour lieu maximal $[0, 1]$. L'intervalle entier est un test squelettique fermé, dont la partie négative ne peut être recouverte par les f-cellules demandées.

Correction. Soit $\omega = f^*\alpha$ de bidegré (p, q), avec $\max(p, q) = n$, et posons $S = \Sigma_f^{(n)}$. Hors de S, la dimension d'image d'un voisinage domanial compact est inférieure à n, donc ω y est nulle. Ainsi le support ordinaire est contenu dans S.

Pour un test squelettique fermé $T \supset S$, travaillons sur des voisinages paralinéaires compacts de T. Subdivisons-les en cellules fermées compatibles avec la trace de S et sur lesquelles f est affine, y compris aux rangs inférieurs à n. Pour une cellule C dont l'intérieur relatif est disjoint de S, prenons un point de cet intérieur. Un voisinage domanial compact ambiant de ce point a une image de dimension inférieure à n. Dans ce voisinage on peut prendre une sous-cellule de pleine dimension relative de C. L'application affine a le même rang sur cette sous-cellule et

sur C, donc $\alpha|_{f(C)} = 0$ par degré. Ainsi $\omega|_C = 0$, y compris sur ses faces. Sur les cellules de S, on conserve la restriction de ω. Le recollement sur les cellules fermées donne le prolongement par zéro de $\omega|_S$ sur T, comme requis pour le support fort.

134. Support d'une forme et détection sur le squelette maximal

Texte visé. Proposition 5.3.6, p. 129, `espcalibres.tex`, lignes 917–919.

Contre-exemple à l'égalité intermédiaire. La somme topologique des intervalles paralinéaires usuels $[-1, 0]$ et $[0, 1]$ est un espace vertébré de niveau 1, avec les squelettes paralinéaires usuels par composante. La carte donnée par la coordonnée sur chaque branche est de rang maximal partout et est une immersion par morceaux dans son image $[-1, 1]$. Les deux demi-intervalles fermés de l'image donnent un G-recouvrement muni de sections. Sur l'image, prenons $\alpha = \phi(t)d't$, où $\phi(t) = e^{-1/t^2}$ pour $t > 0$ et $\phi(t) = 0$ pour $t \leq 0$. La forme est lisse et 0 appartient à son support. L'antécédent de 0 dans la branche négative a un voisinage où le tiré en arrière est nul. Les sections G-locales ne donnent donc pas l'égalité imprimée des supports.

Preuve corrigée. Travaillons avec une présentation compacte $\omega = f^*\alpha$, de bidegré (p, q) avec $\max(p, q) = n$, et posons $S = \Sigma_f^{(n)}$. Si $\omega|_S$ est nulle près de x sur S, prenons un voisinage domanial compact U de x dont la trace dans S soit dans cette région d'annulation. Le squelette maximal S_U de la carte restreinte est contenu dans $S \cap U$, et $f(S_U) = f(U)^{(n)}$ par la proposition 5.2.5. Sur les cellules fermées d'une subdivision compacte de S_U, f est une immersion affine. Les inverses affines donnent l'annulation de α sur les cellules images, qui G-recouvrent $f(U)^{(n)}$. Sur les cellules restantes, la forme s'annule par degré. On obtient $\alpha|_{f(U)} = 0$, donc $\omega = 0$ près de x.

Le lemme 5.3.4 corrigé donne le support fort S. Si Σ est un autre support fort, les deux restrictions à S et à Σ ont le même support, par comparaison avec leurs prolongements par zéro sur l'union squelettique fermée $S \cup \Sigma$. La détection précédente prouve l'inclusion de $\operatorname{supp}\omega$ dans ce support commun, et l'inclusion inverse suit de la restriction. Le calcul s'applique sur un témoin fini de présentations compactes autour de chaque point.

135. Fermeture et propreté après découpe de la cible

Texte visé. Proposition 5.4.5, p. 130, `espcalibres.tex`, lignes 994–998.

Pour la carte identité de la droite paralinéaire standard au niveau 1, si $P = (0, 1)$, la partie pure découpée est $(0, 1)$. Elle est fermée dans le squelette restreint, et n'est pas fermée dans le squelette entier.

Correction. Soit f une carte agréable comme dans l'énoncé, et posons

$$S = \Sigma_f^{(n)}, \qquad A = S \cap f^{-1}(P), \qquad B = \Pi_f \cap P.$$

Le morphisme $g = f|_A : A \to B$ est propre par changement de base. Un compact de B a le même antécédent, compact, que pour $f|_S$. Les espaces A et B sont paralinéaires. Au-dessus d'un voisinage paralinéaire compact dans B, subdivisons l'antécédent compact en un nombre fini de cellules fermées sur lesquelles g est un isomorphisme affine sur son image. Les cellules images qui contiennent un point donné recouvrent un voisinage relatif du point. La dimension locale en ce point est n exactement lorsqu'une telle cellule a dimension n, auquel cas le point a un relèvement dans $A^{(n)}$. L'immersion par morceaux donne la réciproque, donc $g(A^{(n)}) = B^{(n)}$.

La proposition 5.2.5(b) donne $\Sigma_{f_P}^{(n)} = A^{(n)}$. Cette partie est fermée dans A. La restriction $A^{(n)} \to B^{(n)}$ est une immersion par morceaux propre sur son image, qui est paralinéaire dans

la cible affine. Ainsi f_P est agréable et $\Pi_{f_P} = (\Pi_f \cap P)^{(n)}$.

136. Comparaison des deux étoiles compactes

Texte visé. § 5.4.6, p. 130.

`espcalibres.tex`, lignes 1020–1028.

Correction. Poser $f_0 = f|_{V \cup V'}$. La fibre de f_0 en $f(x)$ est $\{x\}$. Choisir un voisinage ouvert O de x dans $V \cup V'$, contenu dans $V \cap V'$. L'image du compact $(V \cup V') \setminus O$ évite $f(x)$. Un voisinage suffisamment petit U de $f(x)$ donne donc $f_0^{-1}(U) \subset V \cap V'$. Ainsi $f(V)$ et $f(V')$ ont le même germe en $f(x)$.

137. Partie pure de l'image de l'étoile d'une carte

Texte visé. §5.4.7, p. 130, `espcalibres.tex`, lignes 1045–1048.

Sur la droite paralinéaire standard avec $n = 1$, la carte identité est agréable. Au point $x = 0$, prenons l'étoile compacte $V = [-1, 1]$ et le voisinage domanial compact $U = [-\varepsilon, \varepsilon] \cup \{2\varepsilon\}$ pour $0 < 2\varepsilon < 1$. Le lieu maximal est la droite et $U \cap \Sigma_f^{(1)} \subset V$. Le point isolé 2ε appartient à $f(U \cap V)$ et pas à $f(U)^{(1)}$. L'image de la trace dans l'étoile peut donc avoir une partie de dimension inférieure.

Correction. Notons $D = f(U \cap V)$. La proposition 5.2.5 et la condition sur U donnent

$$f(U)^{(n)} = f(\Sigma_{f|_U}^{(n)}) \subset D \subset f(U).$$

Par monotonie et pureté, $D^{(n)} = f(U)^{(n)}$. C'est cette égalité qui remplace la dernière inclusion imprimée et l'expression $f(U^{(n)})$.

Pour chaque n-cellule incidente C de l'étoile, $f(U \cap C)$ contient un voisinage de $f(x)$ dans $f(C)$, car f y est une immersion affine. Les cellules incidentes sont en nombre fini, donc il existe un voisinage ambiant N de $f(x)$ tel que $D \cap N = f(V) \cap N$. Ce dernier espace est pur de dimension n. Ainsi $D^{(n)}$ et $f(V)$ ont le même germe en $f(x)$. Cela donne l'indépendance du voisinage U pour le cône tropical $\Pi_{f,x}$. La comparaison des étoiles compactes relève de la correction n° 136.

138. Positivité du calibrage de l'espace paralinéaire associé

Texte visé. Exemple 5.5.2, p. 131, `espcalibres.tex`, lignes 1077–1079.

Sur la droite paralinéaire de niveau 1, l'opposé du calibrage standard est un calibrage paralinéaire, car la définition du chapitre 4 permet les calibrages signés. La droite entière est une partie squelettique. La famille définie par restriction y reprend le calibrage donné, qui est négatif et ne satisfait donc pas la stricte positivité de la définition 5.5.1.

Correction. Supposer que le n-calibrage μ de l'espace paralinéaire est strictement positif. Pour chaque partie squelettique S de l'espace G-tropical vertébré associé, prenons $\mu_S = \mu|_S$. Une subdivision adaptée en cellules fermées donne sur toute cellule de dimension n la restriction du poids strictement positif. Sur une cellule de dimension inférieure, le quotient de niveau n est nul et la classe induite possède un représentant positif. Les restrictions à des parties emboîtées se composent. On obtient ainsi la famille requise par la définition 5.5.1.

139. Recollement de calibrages prescrits strictement positifs

Texte visé. Lemme 5.5.4, p. 131, `espcalibres.tex`, lignes 1090–1094.

Sur la droite paralinéaire de niveau 1, choisissons pour famille de parties squelettiques la famille à un membre formée de la droite entière. Toute partie squelettique est une partie paralinéaire de ce membre et se G-recouvre elle-même. Attribuons au membre unique l'opposé du calibrage standard. Les conditions de compatibilité sont satisfaites, mais un calibrage de l'espace G-tropical qui le prolongerait serait négatif sur la droite entière, contrairement à la définition 5.5.1.

Correction. Demander que chacun des calibrages prescrits sur les membres de la famille soit strictement positif. Pour une partie squelettique P, choisissons un G-recouvrement pointé par des parties paralinéaires P_i contenues dans des membres S_i de la famille. Les restrictions des calibrages donnés sur S_i s'accordent sur les intersections $P_i \cap P_j$, grâce à la compatibilité sur $S_i \cap S_j$. Elles se recollent en un unique calibrage paralinéaire sur P. La stricte positivité se vérifie sur les cellules adaptées du G-recouvrement. Un raffinement commun établit l'indépendance des choix et la compatibilité avec les restrictions entre parties squelettiques. La famille obtenue prolonge les données et toute famille qui les prolonge coïncide avec elle sur ces recouvrements.

140. Agrément des deux cartes tropicales

Texte visé. Exemple 5.5.7, p. 132.

`espcalibres.tex`, lignes 1232–1246.

Correction. Supposer agréables la carte f et sa projection affine $g = p \circ f$. On dispose alors des polyèdres tropicaux calibrés requis et l'on applique la comparaison des parties pures de n° 141.

Au niveau un, prenons la réunion disjointe d'une droite et d'une famille dénombrable d'intervalles à calibrage unité. La carte f envoie la droite sur la ligne horizontale de hauteur 2 et les intervalles sur les segments verticaux de hauteur $[0,1]$ placés en abscisses $0, 1, 1/2, \ldots$. La projection sur la première coordonnée est l'identité sur la droite et contracte les intervalles. Elle est agréable sur son squelette maximal. L'image de f n'est pas paralinéaire près du milieu du segment d'abscisse zéro. Une cellule convexe locale y reste dans une seule abscisse, et il faudrait une infinité de cellules.

141. Partie pure du squelette de la projection

Texte visé. Exemple 5.5.7, p. 132.

`espcalibres.tex`, lignes 1251–1264.

Correction. Si les deux cartes f et $g = p \circ f$ sont agréables, utiliser

$$\Sigma_g^{(n)} = \left(\Sigma_f^{(n)} \cap f^{-1}(\Pi'_f)\right)^{(n)}, \qquad f(\Sigma_g^{(n)}) = \Pi'_f.$$

Sur une subdivision commune, l'image par f d'une cellule contractée par p ne peut rencontrer une cellule d'image non contractée qu'en dimension inférieure à n, puisque sinon leurs directions affines auraient le même rang pour p. Les cellules non contractées de dimension n donnent donc le calibrage projeté. Pour un compact $K \subseteq \Pi_g$, l'ensemble $p^{-1}(K) \cap \Pi'_f$ est l'image par f du compact $g^{-1}(K) \cap \Sigma_g^{(n)}$, d'où la propreté voulue.

Deux droites disjointes envoyées sur les deux axes donnent un exemple avec les deux cartes agréables. L'origine de la droite envoyée sur l'axe vertical appartient à $f^{-1}(\Pi'_f)$, tandis que la projection est constante sur toute cette droite.

142. Prolongement d'un calibrage au cône tropical

Texte visé. § 5.5.8, p. 132.

`espcalibres.tex`, lignes 1280–1297.

Correction. Pour définir le calibrage du cône entier, supposer le calibrage G-localement constant près du sommet. Sur une subdivision conique assez fine, prolonger la valeur constante de chaque cellule incidente sur son cône. Une subdivision commune donne l'indépendance du choix et l'unicité parmi les calibrages constants sur les cellules coniques. Le germe de calibrage au sommet peut aussi être utilisé seul.

Sur la droite, le calibrage unité et sa multiplication par $1 + \psi$, où $\psi \geq 0$ est lisse, non nulle et à support dans $(2, 3)$, ont le même germe en zéro. Les deux calibrages sont adaptés à la décomposition en demi-droites, mais distincts. La seule adaptation ne suffit donc pas.

143. Supports fermés et raffinement par des domaines compacts

Texte visé. Preuve de la proposition 5.6.4, p. 133.

`espcalibres.tex`, lignes 1402–1417.

Correction. Dans l'espace localement compact séparé et paracompact considéré, raffiner d'abord le G-recouvrement par une famille localement finie de domaines compacts. Au voisinage d'un point, choisir une famille finie de domaines du recouvrement contenant ce point et dont la réunion contient un voisinage du point. Après rétrécissement, leurs traces sont fermées dans ce voisinage et leurs intersections avec un voisinage domanial compact sont compactes. La paracompacité permet un choix localement fini. Les supports squelettiques fermés dans ces domaines compacts sont fermés dans X. Leur réunion est fermée et squelettique, ce qui permet le recollement des sections.

144. Tests d'intégrabilité locale par des volumes de degré maximal

Texte visé. §5.7.2(iii), p. 135, `espcalibres.tex`, lignes 1533–1535.

Sur la droite paralinéaire standard de niveau 1, posons $u(0) = +\infty$ et $u(t) = 0$ ailleurs. Les tests sur les cellules squelettiques de dimension 1 donnent l'intégrabilité locale pour la mesure de Lebesgue complétée. La forme-volume de degré zéro de poids 1 portée par le point squelettique fermé $\{0\}$ a pourtant pour mesure positive δ_0. Elle a un coefficient borélien borné, et u n'est pas localement intégrable pour cette mesure.

Correction. Dans (iii), tester les formes-volume de dimension n à coefficients boréliens localement bornés et employer le complété de leur mesure positive λ_{Bor}. Sur chaque morceau compact d'un porteur squelettique, un raffinement fini en cellules fermées de dimension n ramène l'intégrale aux tests de Lebesgue complétés, pondérés par des densités bornées sur ces morceaux. Les cellules de plus petite dimension ne contribuent pas. Les changements de coordonnées sont affines par morceaux, avec des jacobiens absolus non nuls sur les pièces de pleine dimension. Ils préservent donc les ensembles nuls et l'intégrabilité locale dans ces tests.

Réciproquement, sur toute sous-cellule compacte de pleine dimension d'une cellule squelettique, le volume de coordonnée de poids 1, prolongé par zéro sur son porteur squelettique fermé, donne le test de Lebesgue de cette sous-cellule. Ces sous-cellules détectent l'intégrabilité locale sur la cellule. Cette comparaison donne l'équivalence des trois tests corrigés.

145. Multiplicateurs mesurables des fonctions localement intégrables

Texte visé. §5.7.2, p. 135, `espcalibres.tex`, lignes 1543–1544.

Sur la droite paralinéaire standard de niveau 1, prenons $A \subset (0,1)$ non mesurable pour la mesure de Lebesgue. La fonction $\mathbf{1}_A$ est bornée. Son produit avec la constante 1, qui est localement intégrable, échoue au test de mesurabilité sur la cellule squelettique $[0,1]$.

Correction. Employer l'anneau des fonctions réelles localement bornées dont les restrictions aux cellules squelettiques de dimension n sont mesurables pour les mesures de Lebesgue complétées en coordonnées. La mesurabilité de ces restrictions est stable par sommes et produits et ne dépend pas des coordonnées paralinéaires. Sur une cellule compacte de dimension n, si $|b| \leq M$, le produit bu est mesurable et

$$\int |bu|\, d\lambda \leq M \int |u|\, d\lambda.$$

Le même argument sur les sous-cellules compactes donne l'intégrabilité locale. Tester le produit avec $u = 1$ impose la mesurabilité dans ces cellules à tout multiplicateur de l'espace entier. Les fonctions boréliennes localement bornées forment un sous-anneau suffisant.

146. Test de négligeabilité par des volumes de degré maximal

Texte visé. §5.7.3(iii), p. 135, `espcalibres.tex`, lignes 1565–1568.

Sur la droite paralinéaire usuelle de niveau 1, le point $N = \{0\}$ est nul pour la mesure de Lebesgue sur chaque cellule squelettique de dimension 1. Son indicatrice est localement intégrable. Pourtant, la forme-volume de degré zéro de poids 1 portée par ce point est à support compact et donne la mesure δ_0, pour laquelle $\int \mathbf{1}_N \, d\delta_0 = 1$. Même après avoir corrigé le symbole de l'intégrande, le degré du volume utilisé dans le test est donc essentiel.

Correction. Dans (iii), intégrer $\mathbf{1}_N$ pour les complétés des mesures positives associées aux formes-volume de dimension n, à support compact et à coefficients boréliens localement bornés. Si les traces de N sont nulles sur les cellules de dimension n, le raffinement fini des porteurs compacts et la comparaison des densités bornées donnent l'intégrale nulle sur chaque porteur. Le complété permet d'inclure tous les sous-ensembles de traces nulles. Dans l'autre sens, sur toute sous-cellule compacte de pleine dimension, le volume de coordonnée de poids 1 prolongé par zéro sur son porteur squelettique fermé donne la nullité de la trace sur cette sous-cellule. Par exhaustion on obtient la nullité sur la cellule entière. L'intégrabilité locale de $\mathbf{1}_N$ dans le test corrigé est celle de §5.7.2 avec les volumes de degré n.

147. Classe de coefficients du volume apparié

Texte visé. Proposition 5.8.3, p. 136, `espcalibres.tex`, lignes 1675–1676.

Sur la droite paralinéaire usuelle de niveau 1, multiplions le calibrage standard par $1 + \mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$, et donnons à chaque partie squelettique sa restriction. Les poids sont strictement positifs et compatibles. L'appariement de la forme lisse $d't \wedge d''t$ avec ce calibrage donne le coefficient $1 + \mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$ dans le repère standard. Sur tout intervalle non dégénéré, le coefficient prend chacune de ses deux valeurs sur un ensemble dense. Il ne peut donc être représenté par des coefficients continus sur une subdivision en cellules fermées, alors que la forme de départ est lisse.

Correction. Pour que le volume apparié soit à coefficients dans la classe $\mathcal{G}$, supposer que les poids du calibrage sur le porteur appartiennent à $\mathcal{G}$, ou directement que les produits appariés appartiennent à cette classe. Sur une cellule adaptée de dimension n, le coefficient signé du volume est le produit du coefficient de la forme par le poids du calibrage. La stabilité de la classe par produit et sous les changements de coordonnées paralinéaires adaptés donne la propriété

voulue. Les restrictions et les recollements de l'appariement s'appliquent à ces coefficients. Les poids G-localement constants conviennent pour toutes les classes considérées au §2.3.1.

148. Coefficients boréliens pour la mesure associée

Texte visé. §5.8.5, p. 137, `espcalibres.tex`, lignes 1707–1713.

Sur la droite paralinéaire usuelle de niveau 1, choisissons un ensemble $A \subset (0,1)$ non mesurable pour la mesure de Lebesgue. Le poids $1 + \mathbf{1}_A$ par rapport au calibrage standard donne par restriction une famille compatible strictement positive. L'appariement de la forme lisse $d't \wedge d''t$ a le même poids sur la cellule de coordonnée. Celui-ci n'est pas mesurable même pour la mesure de Lebesgue complétée, donc le volume obtenu ne satisfait pas la condition borélienne de la construction de §5.7.1.

Correction. Exiger que les produits des coefficients de la forme et des poids du calibrage dans le volume apparié de dimension n soient boréliens sur le porteur. Cela vaut si les deux facteurs sont boréliens sur les cellules adaptées de dimension n. La mesure positive de Borel se construit avec la valeur absolue de la densité appariée, en recollant les mesures cellulaires. Lorsque cette mesure est finie sur les compacts, la densité signée donne la mesure de Radon et la mesure positive est sa variation totale. La condition borélienne suffit à la construction positive, y compris pour des masses infinies.

149. Poids du calibrage et intégrabilité des formes lisses

Texte visé. §5.8.5, p. 137, `espcalibres.tex`, lignes 1731–1736.

Sur l'intervalle paralinéaire compact $[-1,1]$ au niveau 1, multiplions le calibrage standard par $m(t) = 1/|t|$ si $t \neq 0$ et $m(0) = 1$. Les restrictions à toutes les parties squelettiques donnent des poids boréliens strictement positifs et compatibles. La forme lisse $d't \wedge d''t$ a support compact et donne la mesure positive de densité $m(t)$. Tout voisinage de zéro a une masse infinie, donc même l'intégrabilité locale échoue.

Correction. Pour les assertions générales d'intégrabilité des formes lisses de bidegré (n,n), demander que les poids boréliens du calibrage soient localement intégrables pour la mesure de Lebesgue en coordonnées sur les cellules fermées adaptées de dimension n. Les coefficients lisses d'une forme sont bornés sur les morceaux compacts des cartes. Les produits appariés sont donc absolument intégrables sur ces morceaux. Le raffinement fini des porteurs compacts donne la finitude locale de la mesure associée. Si le support de la forme est compact, la mesure s'annule sur son complément ouvert ordinaire et la masse totale est finie. La linéarité de l'appariement et l'inégalité triangulaire sur les densités donnent les sous-espaces de formes localement intégrables et intégrables, et les inclusions corrigées des formes lisses correspondantes.

150. Produit d'une fonction intégrable par une mesure de forme lisse

Texte visé. §5.8.6, p. 137, `espcalibres.tex`, lignes 1739–1742. Corriger en conséquence le terme médian du produit tensoriel à la ligne 1756.

Sur l'intervalle paralinéaire standard $[-1,1]$ au niveau 1, prenons pour poids du calibrage et pour fonction u la valeur $|t|^{-1/2}$ hors de zéro et 1 en zéro. Le poids est borélien et strictement positif et se restreint de manière compatible aux squelettes. La fonction u satisfait ses tests d'intégrabilité locale. La forme lisse unitaire $\omega = d't \wedge d''t$ donne une mesure de Radon de densité $m(t) = |t|^{-1/2}$ hors de zéro. Le produit a densité $u(t)m(t) = |t|^{-1}$ hors de zéro et n'est pas localement intégrable près de zéro.

Correction. Pour définir le produit pour toute fonction u localement intégrable et toute forme lisse ω de degré maximal, supposer les poids du calibrage boréliens et localement

essentiellement bornés pour les mesures de Lebesgue des cellules fermées de dimension n. Sur chaque morceau compact, le coefficient lisse de la forme est borné. Si a est ce coefficient et m le poids, l'intégrale de $|uam|$ est donc majorée par une constante fois celle de $|u|$. Un raffinement compact fini donne la finitude locale et le recollement de la mesure signée. Pour un couple particulier, l'intégrabilité locale de u contre la variation de la mesure appariée suffit.

Les mesures pondérées sont absolument continues sur les cellules de dimension n. On peut donc remplacer les représentants mesurables pour la mesure complétée par des représentants boréliens égaux presque partout. L'appariement passe au quotient $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ et est équilibré sur les fonctions lisses, par l'identité des produits de coefficients sur chaque cellule. Dans la chaîne de morphismes de faisceaux, employer ce quotient dans le terme médian.

151. Compensation des bords sur un recouvrement fermé

Texte visé. Proposition 5.9.5, p. 138, `espcalibres.tex`, lignes 1886–1893.

Sur la droite paralinéaire de niveau 1, au calibrage unitaire, prenons le domaine localement fermé

$$A = \bigcup_{j \geq 1} [2^{-2j}, 2^{-2j+1}]$$

et le G-recouvrement fini $(\mathbf{R}, A)$. Ce domaine est paralinéaire, les composantes étant localement finies sur l'ouvert qui exclut zéro. Pour $\omega = d''t$, la forme-volume de bord sur A porte deux contributions opposées et non nulles par intervalle. Les extrémités s'accumulent en zéro, absent de A. Or, près de zéro, une forme-volume ambiante de dimension zéro admet un nombre fini de présentations pointées sur des porteurs compacts de dimension zéro, qui sont finis. Elle ne peut donc porter toutes ces valeurs. Le terme de la somme correspondant au seul membre A ne possède pas l'image directe annoncée.

Correction. Supposer que les domaines X_i du G-recouvrement localement fini sont fermés dans X, et sommer sur les ensembles d'indices J finis et non vides. Les inclusions $u_J : X_J = \bigcap_{j \in J} X_j \hookrightarrow X$ sont propres. Au voisinage de chaque point, seuls un nombre fini de membres interviennent. Sur un ouvert ordinaire paracompact, prenons un support squelettique fort et raffinons sa partie supérieure selon les traces fermées des membres pertinents.

Pour une cellule supérieure C et une de ses faces F, la contribution orientée de C apparaît pour les J non vides formés d'indices des membres qui contiennent C. L'ensemble de ces indices est fini et non vide. La contribution est la même pour chacun de ces J, et la somme de ses coefficients d'inclusion-exclusion est 1. On retrouve ainsi la somme des contributions incidentes sur le porteur fermé commun de dimension inférieure. Le recollement sur les ouverts ordinaires donne la formule de compensation.

152. Coefficients boréliens de la forme-volume de bord

Texte visé. §5.9.6, p. 139, `espcalibres.tex`, lignes 2136–2141.

Sur le rectangle paralinéaire $[-1, 1] \times [0, 1]$, au niveau 2, donnons au calibrage le poids 1 hors du côté inférieur et le poids $1 + \mathbf{1}_A$ sur ce côté, avec $A \subset (-1, 1)$ non mesurable pour la mesure de Lebesgue. Les poids sont strictement positifs et compatibles par restriction. La forme lisse $d'x \wedge d''x \wedge d''y$ donne, par contraction avec le calibrage, le coefficient $1 + \mathbf{1}_A$ au signe d'orientation près sur le côté inférieur. Il est non mesurable pour la mesure de longueur complétée. Le poids égale pourtant 1 presque partout pour la mesure de dimension deux.

Correction. Demander que les coefficients de la forme-volume de bord appariée soient boréliens. Des poids boréliens sur les cellules supérieures fermées d'une subdivision adaptée suffisent pour une forme à coefficients boréliens. On restreint poids et coefficients aux faces

fermées, on contracte avec le représentant orienté et on somme les contributions incidentes, en nombre fini sur chaque morceau local. Ces opérations conservent la mesurabilité borélienne. La mesure positive est donnée par les valeurs absolues des coefficients appariés. Si elle est localement finie, les coefficients signés donnent la mesure de Radon dont la variation totale est cette mesure positive.

153. Intégrabilité de bord et poids sur les faces fermées

Texte visé. §5.9.6, p. 139, `espcalibres.tex`, lignes 2153–2155.

Sur le rectangle paralinéaire $[-1,1]\times[0,1]$ au niveau 2, prenons un calibrage de poids 1 hors du côté inférieur. Sur ce côté, prenons le poids $1/|x|$ pour $x\neq 0$ et 1 pour $x=0$. Les poids sont boréliens et strictement positifs et se restreignent aux parties squelettiques. La forme lisse $d'x\wedge d''x\wedge d''y$ donne sur le côté inférieur une mesure de variation de densité $1/|x|$, car ce côté n'a qu'une cellule supérieure incidente. Sa masse est infinie près de $(0,0)$, bien que le poids soit égal à 1 presque partout pour la mesure de dimension deux.

Correction. La mesure de bord demande des coefficients appariés boréliens. Pour l'intégrabilité de bord des formes lisses, il suffit que les restrictions effectives des poids du calibrage aux faces fermées incidentes soient localement intégrables dans une subdivision adaptée. Sur un morceau compact, les restrictions des coefficients lisses sont bornées, et les sommes signées finies de leurs produits par les poids des faces ont une variation localement finie. Des poids boréliens localement bornés sur les cellules supérieures fermées satisfont cette condition. Pour une forme lisse à support compact, la mesure de bord s'annule sur le complément ouvert du support, donc la masse totale est finie.

154. Intégrabilité locale de la forme de bord

Texte visé. Proposition 5.10.1(c), pp. 139–140.

`espcalibres.tex`, lignes 2191–2217 et 2231–2244.

Correction. En degré $p=n-1$, supposer que $f^*\alpha$ est localement intégrable. Le lemme 4.4.6, avec la propreté sur le support squelettique pertinent, majore la variation totale au but par l'image de celle de la source. On obtient l'intégrabilité locale sur Π_f et l'égalité des mesures de Radon signées. En degré n, l'égalité des variations donne l'équivalence. Elle suffirait aussi en degré de bord.

Contre-exemple. Prenons la réunion disjointe des deux rectangles $[-1,0]\times[-1,1]$ et $[0,1]\times[-1,1]$, de calibrage unitaire, avec leur application de coordonnées f. Cette carte agréable, propre sur le squelette compact, a pour polyèdre tropical le carré de calibrage unitaire. Soit $\chi\geq 0$ lisse, égale à un près de zéro et à support dans $(-1/2,1/2)$. Posons $h(y)=\chi(y)/|y|$ pour $y\neq 0$ et $h(0)=0$. La forme borélienne

$$\alpha=\chi(x)h(y)\,d'y\wedge d''x\wedge d''y$$

s'annule près du bord du carré. Sur les deux copies de $x=0$ à la source, les densités de bord ont des signes opposés et leur valeur absolue est $h(y)\,dy$. Chacune a masse infinie près de $y=0$, alors que la mesure de bord au but est nulle.

155. Coefficients boréliens des deux volumes dans la comparaison tropicale

Texte visé. Proposition 5.10.1, p. 139, `espcalibres.tex`, lignes 2196–2209.

Sur un intervalle paralinéaire compact de niveau 1, la carte identité est agréable et son squelette maximal est l'intervalle entier. Prenons pour poids strictement positif $1+\mathbf{1}_A$,

avec A non mesurable pour la mesure de Lebesgue dans l'intérieur de l'intervalle. Les restrictions donnent les calibrages compatibles de toutes les parties squelettiques. Pour la forme supérieure unitaire, l'appariement a ce même poids à la source et à la cible. Aucune des deux constructions boréliennes n'est alors définie.

Correction. Supposer boréliens les coefficients de chacun des deux volumes appariés. Des poids boréliens sur les cellules supérieures fermées de la source suffisent, grâce aux transports affines et aux sommes sur les cellules adaptées. Sur un morceau compact de la cible, la propreté sur le squelette maximal permet de travailler sur un nombre fini de pièces affines compactes. En degré $p = n$, chaque contribution transportée est le même coefficient supérieur de α multiplié par un poids de calibrage positif. Les valeurs absolues s'additionnent donc, y compris pour des masses infinies. En (a), lire le signe $=$ à la ligne 2203.

En degré $p = n - 1$, on calcule d'abord la densité signée de bord sur chaque face fermée de la source par la somme des contributions incidentes. Les signes de ces densités peuvent s'opposer après transport. La somme de leurs valeurs absolues majore la valeur absolue de leur somme, ce qui donne l'inégalité de (b). L'intégrabilité de la source donne alors l'intégrabilité de la cible et l'identité signée lorsqu'elle est définie. Les réciproques en degré de bord requièrent la condition de non-compensation des corrections n° 154 et n° 156.

156. Hypothèse de l'égalité des intégrales de bord

Texte visé. Proposition 5.10.1(d), p. 139.

`espcalibres.tex`, lignes 2219–2228.

Correction. En degré $p = n - 1$, supposer $f^*\alpha$ intégrable sur X. La majoration des variations et l'identité d'image signée de n° 154 donnent l'intégrabilité sur Π_f et l'égalité des intégrales de bord. L'implication originelle vaut en degré n, ou en degré de bord sous l'hypothèse supplémentaire d'égalité des images des variations totales.

Dans l'exemple de n° 154, l'intégrale absolue sur le bord du carré vaut zéro. Chacune des deux copies de la couture $x = 0$ a néanmoins une densité absolue $h(y)\,dy$, dont la masse est infinie au voisinage de zéro. L'intégrabilité au but ne garantit donc pas l'intégrabilité globale requise à la source.

157. Reconstitution de la mesure de Radon par les tests tropicaux

Texte visé. §5.10.2, p. 140, `espcalibres.tex`, lignes 2297–2315.

Hypothèse. Pour une G-forme ω de bidegré (n, n) à support compact, demander que les coefficients appariés soient boréliens et que la variation de la mesure appariée soit localement finie. Des coefficients de forme boréliens localement bornés et des poids boréliens localement intégrables sur les cellules supérieures fermées suffisent. À défaut, sur l'intervalle compact $[0, 1]$, le poids $1/t$ pour $t > 0$ et 1 en zéro est borélien et strictement positif mais donne une masse infinie près de zéro à la forme supérieure unitaire.

Calcul et détermination. Sous l'hypothèse corrigée la mesure est finie sur le support compact. Les témoins de G-recouvrement et la compacité donnent un nombre fini de domaines compacts qui tropicalisent ω et couvrent son support. Les intersections finies non vides sont des domaines compacts sur lesquels on hérite d'une carte qui tropicalise ω. Compléter la ligne 2315 par « est agréable ». La formule tropicale en degré maximal s'applique à chaque intersection. Comme la mesure supérieure se restreint aux domaines, l'inclusion-exclusion donne l'intégrale signée sur leur réunion.

Pour déterminer toutes les valeurs de la mesure sur le porteur squelettique fermé, raffinons par des traces compactes fidèles dans ces domaines. Ajoutons les coordonnées fidèles aux cartes qui tropicalisent la forme. On obtient un plongement paralinéaire sur chaque trace

compacte, prolongé au domaine ambiant correspondant. L'image d'un borélien de cette trace est borélienne dans la cible puisque l'image de la trace est compacte et le plongement est un homéomorphisme sur son image. Sur cette trace, restreignons la forme, le calibrage et la mesure, puis appliquons la formule tropicale à cette carte compacte de la trace. Multiplions le coefficient de la forme cible par l'indicatrice de ce borélien. Le tiré en arrière donne le test d'indicatrice sur la trace, donc la formule tropicale calcule la mesure de chaque morceau borélien. La disjonction des morceaux sur des raffinements compacts et la régularité déterminent la mesure sur le porteur, et elle est nulle hors de celui-ci. L'intégrale totale est le test par la constante 1.

158. Supports compacts d'une partition près d'un fermé

Texte visé. Corollaire 6.2.8, p. 143.

`esptrop.tex`, lignes 184–204.

Correction. Pour X paracompact et F fermé, ajouter $X \setminus F$ au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$. Prendre un raffinement relativement compact et localement fini, puis une partition lisse subordonnée, à supports compacts. Garder les termes $(\theta_j)_{j\in J}$ associés à un $U_{a(j)}$, pour $a : J \to I$. Au voisinage de chaque point de F, la locale finitude et la fermeture des supports écartent les termes dont le support est dans $X \setminus F$. La somme retenue vaut donc un près de F.

En groupant par i, on obtient des supports fermés contenus dans U_i, éventuellement non compacts. Si F est compact, un nombre fini de fonctions à support compact suffit sous les hypothèses locales, sans la paracompacité ambiante. Pour $F = X = U_1 = \mathbb{R}$, l'unique terme du recouvrement imprimé devrait être identiquement un et à support compact.

159. Finitude locale des coupures dans l'espace ambiant

Texte visé. Corollaire 6.2.8, p. 143, `esptrop.tex`, lignes 186–202.

Contre-exemple. Soient ω_1 le premier ordinal non dénombrable et ω le premier ordinal infini. Avec les topologies d'ordre, prenons

$$X = ([0,\omega_1] \times [0,\omega]) \setminus \{(\omega_1,\omega)\}, \qquad F = \{\omega_1\} \times [0,\omega), \qquad U = [0,\omega_1] \times [0,\omega).$$

Les produits d'intervalles ordinaux compacts ouverts donnent une base d'ouverts compacts dans X. L'espace est séparé et localement compact. La partie F est fermée et dénombrable à l'infini. L'ouvert U, somme topologique de lignes compactes ouvertes, est paracompact et recouvre F.

Pour les paramètres $(\mathbf{Q},\mathbf{R})$, prenons toutes les parties localement fermées comme domaines et les fonctions réelles localement constantes pour les fonctions paralinéaires et affines. Les intersections sont admises et l'axiome de reconnaissance est immédiat. Pour un domaine $O\cap C$, O ouvert et C fermé, l'intersection de C avec un voisinage compact ouvert contenu dans O donne un voisinage domanial compact relatif. Les fonctions compatibles localement constantes se recollent, car autour de chaque point un témoin fini dont les membres contiennent le point permet de restreindre simultanément les voisinages de constance. Les uplets ont des images finies sur les domaines compacts. La composition préserve la constance locale et les images réciproques sont des réunions de fibres ouvertes et fermées relativement au domaine. Le faisceau affine ordinaire engendre G-localement le faisceau paralinéaire. Les indicatrices d'ouverts compacts séparent les points et sont lisses, donc la séparation différentielle est satisfaite.

La somme s d'une famille subordonnée à U et localement finie dans X serait continue, égale à 1 sur F et nulle hors de U. Pour chaque entier j, la continuité en (ω_1, j) donne un ordinal dénombrable α_j tel que $s(\alpha, j) > 1/2$ pour $\alpha > \alpha_j$. Choisissons un ordinal $\alpha < \omega_1$ qui

majore strictement tous les α_j. Les points (α, j) tendent vers (α, ω), où $s = 0$, contradiction. Le choix des indices et la compacité des supports individuels n'interviennent pas dans cette contradiction.

Corrections. Si X est paracompact, raffinons le recouvrement élargi par $X \setminus F$ en un recouvrement localement fini d'ouverts relativement compacts. Un rétrécissement fermé et les coupures lisses compactes donnent une partition dont chaque terme du raffinement a support compact. Écartons les termes subordonnés à $X \setminus F$. Par finitude locale, leurs supports ont une réunion fermée disjointe de F. La somme des termes retenus vaut donc 1 près de F.

On peut aussi prendre un ouvert ordinaire paracompact P et un ouvert V tels que $F \subset V \subset \overline{V}^X \subset P$. Dans P, raffinons le recouvrement formé des $U_i \cap V$ et de $P \setminus F$. Les termes retenus se prolongent par zéro à X. Ils sont localement finis dans P et leurs supports sont disjoints de l'ouvert $X \setminus \overline{V}^X$. On garde les indices du raffinement pour la compacité individuelle. L'obstruction de n° 158 concerne le regroupement par indices initiaux lorsque F est non compact.

Si F est compact, choisissons un nombre fini de coupures lisses compactes non négatives dans les ouverts initiaux, dont la somme b vaut au moins 1 près de F. Multiplions chacune par une fonction lisse non négative de b, nulle près de 0 et égale à $1/b$ lorsque $b \geq 1$. La somme vaut 1 près de F et le regroupement fini conserve les supports compacts.

160. Extension globale d'une forme et fermeture de son support

Texte visé. Proposition 6.3.2(b), p. 144.

`esptrop.tex`, lignes 265–325.

Correction. Supposer X paracompact et $\mathrm{supp}_V \omega$ fermé dans X. La partie (a) fournit les prolongements près de ce support. Le raffinement de n° 158 donne des coupures subordonnées, localement finies dans X, dont la somme vaut un près du support. La somme des prolongements multipliés par ces coupures, prolongés par zéro hors des ouverts qui les portent, coïncide avec ω sur V. La partie (c) utilise la construction finie sur un support compact.

Sur $V = (0, \infty) \subset X = \mathbb{R}$, la fonction lisse $1/x$ a pour support dans V tout V, décent et dénombrable à l'infini, et n'a aucun prolongement continu à l'origine. L'extension sur tout X sans la paracompacité ajoutée reste ouverte dans le cadre général de l'énoncé.

161. Séparation locale autour du support compact

Texte visé. Proposition 6.5.2, p. 148, `esptrop.tex`, lignes 624–625.

Lacune de preuve. Le caractère presque bon fournit la densité du corps résiduel du germe ordinaire dans le corps résiduel complété et la séparation du germe analytique. Il permet de prolonger chacun des germes affines prescrits et de décrire certains domaines par un nombre fini d'inégalités affines. La séparation différentielle locale exige un même voisinage ordinaire portant des fonctions lisses qui séparent toutes ses paires de points. Les rétrécissements germes par germes ne donnent pas ce voisinage. Le cas général presque bon reste ouvert.

Hypothèse suffisante. Supposer la séparation holomorphe locale autour du support compact. Dans l'intérieur ordinaire d'un voisinage analytique séparant, deux points distincts ont des normes distinctes pour une fonction analytique f. Une coupure scalaire lisse du logarithme de $|f|$ sépare ces valeurs, quitte à échanger les deux points lorsque l'une des valeurs est nulle. Elle se prolonge de façon lisse par zéro près des zéros de f. Cela donne les séparateurs lisses sur un même ouvert ordinaire dans le voisinage. Les voisinages affinoïdes d'un espace analytique topologiquement séparé et bon près du support fournissent la séparation holomorphe requise.

Recouvrons le support par un nombre fini d'ouverts ordinaires relativement compacts et dénombrables à l'infini, pris dans ces voisinages. Leur réunion est localement compacte, séparée, dénombrable à l'infini et donc paracompacte. La séparation différentielle locale vaut sur la réunion et la construction finie de la décomposition positive à supports compacts s'y applique.

162. Décomposition positive et finitude locale des coupures

Texte visé. Proposition 6.5.2(a), p. 148, `esptrop.tex`, lignes 640–647.

Lacune de preuve. Le corollaire 6.2.8 demande un support dénombrable à l'infini. Sur un espace discret non dénombrable, prenons toutes les parties comme domaines, les fonctions localement constantes comme fonctions paralinéaires et affines, et les paramètres $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$. Les compacts sont finis, les images de leurs cartes sont finies et les indicatrices fournissent la séparation différentielle. Le support de la forme scalaire lisse 1 est tout l'espace, qui est paracompact mais non dénombrable à l'infini. Pour un support dénombrable à l'infini, n° 159 établit l'obstruction distincte à la finitude locale dans l'espace ambiant. La décomposition sous la seule hypothèse imprimée reste ouverte.

Preuve sous une hypothèse de voisinage. Posons $S = \operatorname{supp}\omega$ et notons P l'ouvert paracompact localement différentiellement séparé de l'énoncé. Supposons qu'un ouvert ordinaire V vérifie

$$S \subset V \subset \overline{V}^{X} \subset P.$$

La normalité de X suffit à choisir V, notamment lorsque X est paracompact. Dans P, raffinons localement finiment le recouvrement par les ouverts de cartes intersectés avec V et par $P \setminus S$. Un rétrécissement fermé et des coupures lisses compactes normalisées donnent une partition. Les supports des termes assignés à $P \setminus S$ ont une réunion fermée dans P, disjointe de S. Après retrait de ces termes la somme vaut un près de S. Les prolongements par zéro sont localement finis dans X, puisque les supports restants sont contenus dans V et que $\overline{V}^{X} \subset P$.

Sur chaque carte, symétrisons le représentant. Dans la convention où la positivité est celle de la matrice symétrique $A = (a_{IJ})$, posons $c = 1 + \sum_{I,J} a_{IJ}^2$. Comme $\|A\|_{\mathrm{op}} \leq c$, les matrices $A + cI$ et cI sont positives et gardent les coefficients dans $\mathscr{G}$. Tirons les deux formes en arrière, multiplions-les par les coupures et prolongeons par zéro. Les sommes localement finies donnent deux formes positives dont la différence est ω. Si S est compact, un nombre fini de coupures compactes dans des cartes suffit dans tout voisinage prescrit de S à l'intérieur de P. Les deux formes ont alors un support compact.

163. Décomposition positive des G-formes G-lisses

Texte visé. Remarque 6.5.3, p. 148 (imprimée et PDF), esptrop.tex, lignes 658–663.

Identification fausse. Une G-forme G-lisse peut avoir des coefficients ordinaires incompatibles de part et d'autre d'une face. Le passage à des formes ordinaires à coefficients scalaires G-lisses dans la remarque doit être retiré.

Contre-exemple. Prenons la droite tropicale standard $X = \mathbf{R}$, avec son affinage par restrictions des fonctions affines ambiantes, son calibrage constant positif et son bord vide. Un domaine PL y est localement une réunion finie d'intervalles et de points, que l'on décrit par des inégalités affines larges. En rétrécissant en un point, les fonctions de l'affinage se prolongent de façon affine. Ces deux observations vérifient la décence. Tout compact PL est inclus dans un intervalle compact et chaque domaine compact peut servir à détecter sa propre image. Le niveau est un. La coordonnée sépare différentiellement, la droite est paracompacte, et les contributions du calibrage aux points de subdivision s'annulent par paires. Sur un

squelette, le bord relatif des domaines se réduit aux contributions locales des extrémités, qui sont 1-négligeables.

Soit χ une fonction lisse à valeurs dans $[0,1]$, égale à 1 près de 0 et nulle hors de $[-1,1]$. Sur les deux moitiés fermées de la droite, prenons

$$\omega_- = 0, \qquad \omega_+ = \chi(x)\, d'x \wedge d''x.$$

Elles se recollent en une G-forme ω. En effet, le recouvrement est un G-recouvrement et, à son intersection $\{0\}$, le tangent est nul. La convention sur J donne $J(d'x \wedge d''x) = d'x \wedge d''x$. Chaque partie est donc symétrique et positive, même fortement positive. Le support est compact dans $[0,1]$ et contient 0.

Sur l'espace affine de la carte, les fonctions scalaires G-lisses sont continues, par recollement sur une famille finie de pièces compactes fermées autour de chaque point. Une présentation ordinaire de ω près de 0 par une carte f aurait des coordonnées $f_j(x) = a_j x + b_j$ sur un intervalle assez petit, par le choix de l'affinage. Une représentation ambiante des coefficients sur la carte donnerait au tiré en arrière un coefficient continu $h(x)$ devant $d'x \wedge d''x$, puisque les a_j sont constants. Sur les intervalles non dégénérés à gauche et à droite de 0, le calcul sur les tangents de dimension un impose respectivement $h = 0$ et $h = 1$ près de 0. Cela contredit la continuité. Le même argument s'applique à la différence de deux formes ordinaires de cette classe.

Énoncé corrigé. Soit ω une (p,p)-G-forme G-lisse symétrique sur un espace G-tropical affiné et décent, de support S. Si S est compact et possède un voisinage ordinaire localement différentiellement séparé, ω est une différence de deux G-formes G-lisses positives à support compact. Plus généralement, ω est une différence de deux G-formes G-lisses positives s'il y a des ouverts ordinaires V, U tels que

$$S \subset V \subset \overline{V}^{X} \subset U,$$

avec U paracompact et localement différentiellement séparé.

Démonstration de la correction. Soit β une G-forme symétrique sur un compact PL P d'un espace affine de dimension N. La présentation G-lisse se réduit à un nombre fini de pièces PL compactes fermées, par la condition locale de G-recouvrement et la compacité. Après subdivision les cartes sont affines sur les cellules. En rétrécissant autour des points, les représentants ordinaires se prolongent à l'espace ambiant, par projection affine sur l'enveloppe de la cellule. On les rend symétriques par $(\beta_i + J\beta_i)/2$, ce qui préserve la restriction.

Dans une base extérieure signée commune, les matrices symétriques de ces représentants sont uniformément bornées sur leurs cellules compactes. Pour $p \le N$, la forme ambiante

$$\Omega_p = \frac{1}{p!}\left(\sum_j d'x_j \wedge d''x_j\right)^p$$

a pour matrice l'identité dans cette base. Le signe de la base est $(-1)^{p(p-1)/2}$, obtenu en regroupant les facteurs primés et doublement primés. L'accouplement complémentaire avec les vecteurs extérieurs arbitraires donne le critère de matrice semi-définie positive pour le cône positif. Pour C supérieur à toutes les normes des matrices, $\beta + C\Omega_p$ et $C\Omega_p$ sont donc positives sur chaque cellule, jusque sur ses faces, par restriction de la matrice au tangent. Elles donnent deux G-formes positives sur P par G-localité. Leur différence vaut β. Le cas $p = 0$ prend $\Omega_0 = 1$, et le cas $p > N$ est nul.

Près de chaque point de S, la présentation de 6.3.4 donne le tiré en arrière d'une G-forme sur l'image PL compacte d'une carte. On peut la symétriser puisque le tiré en arrière est symétrique.

La décomposition précédente se tire en arrière et se restreint à l'intérieur de ce voisinage compact.

Sous la condition affichée sur V, U, l'argument de partition de l'unité fournit des fonctions lisses positives λ_i, à supports compacts subordonnés à ces ouverts, localement finies dans X, dont la somme vaut 1 près de S. On multiplie les deux parties locales par la même λ_i. Le support fermé de chaque produit permet son prolongement par zéro à X. La somme localement finie donne les deux G-formes positives, et leur différence est $(\sum_i \lambda_i)\omega = \omega$. Pour S compact, un nombre fini de fonctions de coupure suffit. Si $b = \sum b_i \geq 1$ sur S, choisir ℓ lisse positive, nulle près de zéro et égale à $1/t$ pour $t \geq 1/2$, et poser $\lambda_i = \ell(b)b_i$. Les deux sommes ont alors un support compact. Le cas S vide donne les deux formes nulles.

La conclusion porte sur le cône positif des G-formes G-lisses et sur les hypothèses explicites de voisinage.

164. Détection des formes par des squelettes compacts

Texte visé. Proposition 6.5.4, p. 148 (imprimée et PDF), esptrop.tex, lignes 689–692.

Lacune de preuve. Dans l'argument, supprimer l'exigence que le détecteur soit de dimension pure n. Un espace PL ponctuel muni de sa structure canonique au niveau 1 est riche. Le lieu de variation maximale de niveau 1 est vide et chaque domaine compact détecte sa propre image. La forme lisse 1 est non nulle et a des coefficients tropicalement continus. Aucun compact de dimension pure un ne la détecte. Le point lui-même est un détecteur squelettique.

Preuve corrigée. Conserver les hypothèses de la proposition, dont la richesse au niveau n, la continuité tropicale des coefficients, et, pour les cônes positifs, le domaine symétrique de bidegré diagonal.

Pour une application PL surjective $q : Q \to P$ entre compacts PL, subdiviser la source en un nombre fini de cellules sur lesquelles q est affine. Sur une cellule, choisir des coordonnées pour lesquelles $q(y, z) = y$ et les contraintes s'écrivent

$$Az + By \leq c, \qquad A, B \text{ sur } K, \quad c \text{ dans } G.$$

Une fibre compacte non vide possède un sommet. Les normales des contraintes actives au sommet engendrent les directions du noyau, car sinon un déplacement dans une direction commune aux noyaux resterait admissible dans les deux sens. Un sous-système actif inversible H donne une section affine

$$z_H(y) = A_H^{-1}(c_H - B_H y)$$

sur la partie fermée admissible de l'image de la cellule. Ces sections, en nombre fini, recouvrent l'image et respectent la structure K, G, même pour les fibres de dimension inférieure.

Un recouvrement polyédral fini fermé détecte une forme ordinaire sur chaque cellule, y compris sur les faces. En effet, après subdivision commune, les adhérences des pièces de pleine dimension recouvrent la cellule et chacune a le même espace tangent que la cellule. Les tirés en arrière par les sections permettent donc de faire descendre la nullité ou l'appartenance à chacun des trois cônes séparément.

Si la forme ω est non nulle, elle reste non nulle sur une pièce compacte V de sa présentation. La carte f de cette pièce présente $\omega|_V = f^*\alpha$ sur $P = f(V)$. La richesse fournit un compact squelettique $\Sigma \subset V$ de même image. La surjection PL $q = f|_\Sigma$ a les sections précédentes. Si $\omega|_\Sigma = q^*\alpha$ était nulle, leurs tirés en arrière rendraient α nulle, une contradiction.

La restriction préserve chacun des trois cônes. Réciproquement, pour un cône fixé, les sections ramènent la condition de Σ à P sur chaque pièce compacte. Le tiré en arrière et la G-localité donnent la condition sur X. Si nécessaire, le critère de nullité appliqué à $J\omega - \omega$ donne d'abord la symétrie.

Enfin, si un ouvert ordinaire O rencontre le support, $\omega|_O$ est non nulle. La richesse est conservée sur O, avec les mêmes squelettes à l'intérieur du domaine. Le critère de nullité y donne un compact squelettique $\Sigma \subset O$ sur lequel la restriction est non nulle. Son support est non vide et inclus dans $\Sigma \cap \mathrm{supp}(\omega)$, par restriction des voisinages d'annulation. Ainsi tout tel O contient un point squelettique du support, d'où la densité annoncée.

165. Bord polyédral en dimension non pure

Texte visé. § 6.6.3, p. 149.

`esptrop.tex`, lignes 796–804.

Correction. Supposer X pur de dimension n pour la construction du bord par les facettes. Pour une décomposition non pure, prendre comme bord la réunion de toutes les cellules de dimension au plus $n-1$. L'intérieur est alors la réunion des intérieurs relatifs des cellules de dimension n, localement affines à calibrage constant, et vérifie les conditions du § 6.6.2.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, prenons un carré unité de dimension deux avec ses faces et un point isolé hors de son plan. Le carré a son calibrage unitaire et le calibrage de dimension deux sur le point est vide. La seule réunion des arêtes laisse ce point dans l'intérieur, où son voisinage ouvert ne contient aucune partie squelettique pure de dimension deux. La très grande richesse requise échoue.

166. Harmonie hors de l'image du bord squelettique

Texte visé. Théorème 6.6.8, p. 151 (imprimée et PDF), esptrop.tex, lignes 917–918. La décomposition cellulaire adaptée au bord prescrite au début de la preuve peut manquer. Le théorème d'harmonie reste valable.

Contre-exemple à la décomposition. Soit C l'ensemble triadique de Cantor fermé de $[0,1]$. Munir $X = \mathbf{R}^2$ de sa structure PL usuelle et du calibrage unité de niveau deux, et prescrire $\partial X = C \times \{0\}$. Le bord est fermé et 2-négligeable au sens des porteurs PL. Sur chaque squelette PL sa trace est portée par l'intersection avec la droite $y = 0$, de dimension au plus un. Les bords de domaines ont localement des porteurs de dimension au plus un, donnés par leurs facettes. La richesse vaut sur X. Hors du bord prescrit, le modèle local du plan est décent, très riche, différentiellement séparé, harmonieux et de dimension pure deux. L'identité est une carte plaisante. Son squelette de dimension maximale et son image valent X.

Une décomposition adaptée ferait de $C \times \{0\}$ une réunion de cellules contenues dans cet ensemble. Une cellule de dimension positive contient un chemin connexe non constant à l'intérieur d'une de ses présentations convexes. Le bord prescrit est totalement discontinu, donc ces cellules seraient toutes ponctuelles. La finitude locale donne seulement un nombre fini de cellules rencontrant ce compact. Or il contient une infinité de points. Ceci réfute l'étape de décomposition, même pour la carte identité.

Preuve correcte. Poser $S = \Sigma_f^{(n)}$, $P = f(S)$ et $E = f(\partial X \cap S)$. La condition de carte plaisante donne une image PL et une application propre $g = f|_S : S \to P$. L'ensemble E est fermé dans P. Au-dessus d'un voisinage compact dans P, l'intersection de $\partial X \cap S$ avec son image réciproque est fermée dans un compact. Son image est compacte et fermée dans ce voisinage.

Pour un ouvert ordinaire $O \subset P \setminus E$, choisir un ouvert affine ambiant U tel que $P \cap U = O$. Poser $X' = f^{-1}(U)$ et $S' = S \cap X'$. Alors X' est ouvert dans X, son bord est $\partial X \cap X'$, et S' en est disjoint. La restriction $g' : S' \to O$ est propre. Soit $\alpha = d'x_I \wedge d''x_J$, avec $|I| = n-1$ et $|J| = n$, une forme constante de l'espace affine ambiant.

Le squelette S' porte fortement $f^*\alpha$. Dans un raffinement de tout squelette plus grand en cellules où f est affine, la puissance extérieure de degré n du second facteur donne zéro sur

chaque cellule de rang inférieur à n, sur toute la cellule. Une cellule de rang n est contenue dans S', puisque l'image de chacun de ses voisinages relatifs a dimension n. On obtient ainsi le prolongement par zéro exact depuis S'. L'objet formel de bord associé à $f^*\alpha$ est porté par S'. Sur l'intérieur ordinaire de X', l'harmonie annule les discordances de toute présentation affine locale. Le même objet est donc porté par $\partial X'$. Ces deux supports étant disjoints, l'objet formel de bord est nul.

Pour préciser les identités utilisées, choisir une orientation de la facette F. Orienter chaque cellule incidente A de dimension n de sorte que son orientation sortante sur F soit celle choisie. Si m_A est son vecteur de calibrage, le vecteur de discordance image est

$$\delta_{f,F}(z) = \sum_{A \supset F} (\Lambda^n df_A) m_A(z).$$

La contraction du deuxième facteur de α avec ce vecteur et la restriction du premier facteur à F donnent la contribution formelle sur F, avec le signe commun $(-1)^{n(n-1)/2}$. Les nouvelles facettes d'un raffinement à l'intérieur d'une cellule ont deux orientations sortantes opposées, donc leurs contributions s'annulent point par point. Sur une ancienne facette on restreint la somme initiale. Cela donne la compatibilité avec les restrictions aux ouverts ordinaires, y compris pour les valeurs sur le bord des facettes.

Au-dessus d'un voisinage compact dans O, une subdivision locale finie commune rend g' affine sur les cellules sources et leurs images. La contraction se transporte par $\langle g'^*\xi, m\rangle = \langle \xi, (\Lambda^n dg')m\rangle$. Les orientations sortantes se transportent avec l'orientation des volumes de facettes. En sommant les pièces sources, on obtient l'identité formelle

$$g'_*\langle g'^*\alpha, \mu_{S'}\rangle = \langle \alpha, g'_*\mu_{S'}\rangle.$$

Chaque coefficient est transporté avant passage aux mesures. Puisque le premier membre est nul, le volume formel de bord associé à α sur O est nul.

Dans une présentation cellulaire de O adaptée au calibrage, fixer une facette pure F et choisir I pour lequel $d'x_I$ ne s'annule pas sur sa direction tangente. L'idéal I_{n-1} est nul sur cette facette. La formule de contraction donne donc $\langle d''x_J, \delta_F(z)\rangle = 0$ pour tout $z \in F$ et tout J, y compris sur les faces de F. Les covecteurs coordonnés engendrent le dual de la puissance extérieure de degré n, donc $\delta_F = 0$. Ainsi P est harmonieux sur $P \setminus E$. En niveau zéro, il n'y a pas de facettes à vérifier.

167. Bord tropical d'un intervalle réel

Texte visé. § 6.7.1, p. 151.

`esptrop.tex`, lignes 954–963.

Correction. Pour un intervalle non dégénéré I, prendre comme bord $I \cap \partial_{\mathbb{R}} I$, c'est-à-dire les extrémités appartenant à I. Ce bord est fermé dans I. Le modèle local est la droite affine dans l'intérieur et la demi-droite aux extrémités incluses. Ainsi $(0,1)$ est sans bord tropical. Pour un singleton, préciser séparément la convention de dimension zéro, ou le placer tout entier dans le bord si le niveau un est conservé.

168. Rayon logarithmique dans la réalisation d'un intervalle

Texte visé. § 6.7.1, p. 151.

`esptrop.tex`, lignes 965–966.

Correction. Sur un corps trivialement valué, si $0 \notin I$, réaliser I par la couronne $\{\log|T| \in I\}$ du tore analytique. À chaque rayon $r \in \exp(I)$, les monômes non nuls d'un polynôme de Laurent

ont des normes distinctes puisque $r \neq 1$. Le terme maximal impose donc l'unique norme de Gauss de rayon r. Le logarithme du rayon donne la coordonnée affine et le calibrage unitaire. Le choix $I = (-2, -1)$ rend la condition imprimée $|T| \in I$ impossible.

169. Intervalles étendus, bord et squelettes

Texte visé. Exemple 6.7.2, p. 151 (imprimée et PDF), esptrop.tex, lignes 969–985.

Deux défauts indépendants. Le bord imprimé $A = \partial_{\overline{\mathbf{R}}} I \cap \overline{\mathbf{R}}$ contient les points 0 et 1 si $I = (0, 1)$. Or le bord tropical doit être un sous-ensemble fermé de l'espace I.

Même si l'on remplace A par $A \cap I$, les fonctions et les squelettes prescrits sont incompatibles. Prenons $I = [0, 1]$, dans la structure paralinéaire usuelle. Le point 0 appartient à l'ensemble où toutes les fonctions paralinéaires doivent être localement constantes. Pour une carte à nombre fini de composantes, les voisinages de constance de ces composantes ont une intersection qui est encore un voisinage de 0. Sur toute pièce contenant 0 où la carte est fidèle, donc injective, le point 0 est alors isolé. Un G-recouvrement fidèle du squelette annoncé I devrait fournir au point 0 un nombre fini de pièces contenant toutes 0 et dont la réunion contient un voisinage relatif de 0. Le point 0 est isolé dans cette réunion finie, ce qui est impossible. Le défaut concerne ainsi la condition de carte fidèle (lignes 198–216 de espgtrop.tex), dès la définition du squelette.

Données corrigées. Soit I un intervalle admissible non dégénéré de $\overline{\mathbf{R}}$. Posons

$$E_\infty = I \cap \{-\infty, +\infty\}, \qquad D_{\text{fin}} = I \cap \mathbf{R} \cap \partial_{\overline{\mathbf{R}}} I.$$

Un domaine est une partie localement fermée qui est une réunion localement finie d'intervalles admissibles, la finitude locale étant prise aux points du domaine. Il contient un voisinage dans I de chacune des extrémités idéales qu'il contient. Les fonctions paralinéaires sont les fonctions usuelles aux coordonnées finies, constantes au voisinage de chaque extrémité idéale incluse. Les squelettes sont les parties paralinéaires de $I \cap \mathbf{R}$, munies du 1-calibrage unitaire $|e_1|$. Le bord tropical est D_{fin}.

Sur toute composante connexe d'un domaine qui évite E_∞, les fonctions affines sont les fonctions $t \mapsto at + c$. Sur une composante qui rencontre E_∞, elles sont les fonctions constantes. La prescription porte sur les composantes du domaine où la fonction est définie. Les extrémités finies incluses admettent donc les coordonnées affines usuelles.

Vérification des axiomes. La topologie d'ordre est séparée et localement compacte. Les intervalles usuels aux points finis et les demi-intervalles compactifiés aux extrémités idéales fournissent une base d'ouverts dénombrables à l'infini. Les ouverts ordinaires sont des domaines. Leurs conditions sont conservées par intersection. Pour une partie localement fermée G-recouverte par des domaines, les témoins pointés finis donnent aux points finis les germes d'intervalles usuels. À une extrémité idéale incluse, tout domaine du témoin qui contient ce point contient un voisinage de l'extrémité. La saturation en résulte. Les intervalles compacts, y compris les segments compactifiés près des extrémités idéales, donnent les raffinements locaux par domaines compacts.

Le recollement par un témoin pointé fini donne une fonction paralinéaire ordinaire aux points finis. Aux extrémités idéales, le recollement est constant sur un voisinage commun. Cela donne le G-faisceau de fonctions paralinéaires. Pour un nombre fini de telles fonctions sur un domaine compact, écartons les portions initiales ou finales où toutes sont constantes. Le reste a une subdivision finie en intervalles et points. L'image du domaine par le tuple est donc polyédrique compacte. La composition se vérifie sur ces subdivisions. L'image réciproque d'une partie paralinéaire a des germes usuels aux points finis. À une extrémité idéale, elle est absente d'un voisinage ou contient ce voisinage suivant la valeur constante de la carte. C'est donc un domaine.

La coordonnée usuelle donne des cartes fidèles au voisinage des points finis d'un squelette. Elle s'étend à un domaine, fournit la topologie du morceau et identifie les traces des

autres domaines et de leurs fonctions paralinéaires à des parties et fonctions paralinéaires usuelles. Les parties paralinéaires fermées à coordonnées finies dans les domaines forment les squelettes élémentaires. Les restrictions et les réunions finies fermées préservent cette famille, et les G-recouvrements donnent les squelettes annoncés. Les vecteurs-volume unitaires sur les morceaux non dégénérés sont compatibles par restriction et subdivision.

Toute carte a une image de dimension au plus un. Son lieu de variation maximale est formé des morceaux non constants et de leurs extrémités finies appartenant au domaine. C’est un squelette fermé dans le domaine. Chaque extrémité idéale possède un voisinage de constance. Le niveau est donc un. Pour réaliser l’image d’une carte sur un domaine compact, on conserve les morceaux non constants compacts à coordonnées finies et l’on choisit un point fini pour chaque valeur constante restante. Les plateaux des extrémités idéales contiennent de tels points, et les composantes finies isolées sont elles-mêmes des squelettes. Le squelette compact ainsi obtenu réalise toute l’image.

Les fonctions affines prescrites se restreignent et se recollent pour la topologie ordinaire. Une expression localement affine sur une composante connexe a une seule pente, qui est nulle dès que la composante rencontre une extrémité idéale. Réciproquement, on subdivise une fonction paralinéaire en morceaux affines aux coordonnées finies et en morceaux constants aux extrémités idéales. Cela donne l’affinage. Pour la décence, aux points finis on prolonge les expressions affines et l’on décrit le germe d’un domaine par une combinaison finie d’inégalités affines larges. Aux extrémités idéales, le prolongement est constant et le domaine est un voisinage ordinaire, décrit par une inégalité tautologique.

Les fonctions lisses de la coordonnée séparent localement les points finis. Une fonction lisse de la coordonnée qui est constante au voisinage d’une extrémité idéale et varie sur un intervalle compact fini sépare localement cette extrémité des points finis. Dans $I \setminus D_{\text{fin}}$, tout squelette compact est contenu dans une réunion finie d’intervalles compacts non dégénérés du même ouvert. Cette réunion donne l’agrandissement pur de dimension un. Pour une carte affine ordinaire, aux points intérieurs finis, les deux contributions unitaires sortantes se compensent. Aux extrémités idéales, la carte est localement constante et le lieu de variation maximale y est vide. L’intérieur est donc très riche et harmonieux. Le bord D_{fin} est fermé et sa trace sur chaque squelette est 1-négligeable. Les frontières relatives des domaines ont sur chaque squelette des germes paralinéaires localement fermés de dimension zéro. Elles sont également 1-négligeables. Ceci vérifie les axiomes de 6.6.2.

La non-dégénérescence est nécessaire à cette description. Un singleton idéal ne fournit aucun point squelettique pour réaliser l’image non vide d’une carte constante. Un singleton fini peut être traité par la convention séparée où il est tout entier au bord. Le cas vide relève de sa convention propre. Pour $I = [-\infty, 0)$, on obtient $E_\infty = \{-\infty\}$ et $D_{\text{fin}} = \emptyset$. La comparaison de ce modèle abstrait avec le disque analytique relève d’une vérification distincte.

170. Affinage et équilibre au centre d’une étoile

Texte visé. Exemple 6.7.3, p. 152 (imprimée et PDF), esptrop.tex, lignes 1025–1042.

Contre-exemple. Sur l’étoile imprimée, choisissons une branche b_0 et une constante admissible $a > 0$. La fonction

$$h_{b_0}(t) = \max(t, -a), \qquad h_b(t) = 0 \quad (b \neq b_0)$$

a pour valeur commune 0 au centre η. Elle est continue, paralinéaire sur chaque branche, constante au voisinage des extrémités idéales, et n’a qu’une branche exceptionnelle. Elle satisfait donc la définition imprimée aux lignes 1025–1032.

Si h était G-localement affine en η, il existerait un témoin pointé fini de domaines contenant tous η, dont la réunion contient un voisinage de η. Sur b_0, la trace d’un domaine en 0 est localement soit $\{0\}$, soit un intervalle terminal. L’un des domaines du témoin contient donc un intervalle

terminal sur b_0. La pente de h y vaut 1 et toutes les autres pentes qui entrent dans la somme imprimée valent 0. La somme vaut 1, alors que la définition de la fonction affine exige qu'elle soit nulle. L'axiome de génération G-locale par les fonctions affines (lignes 20–22) échoue. Si l'on interdit la trace centrale réduite à un point, les domaines contenant le centre gardent davantage de germes terminaux. Le même calcul de pente donne encore la contradiction.

Données corrigées. Supposons que B ait au moins deux éléments. Conservons l'étoile X_B, dont les branches X_b sont des copies de $[-\infty, 0]$ identifiées seulement en leur point $0 = \eta$. Un ouvert a une trace ouverte sur chaque branche et, s'il contient η, contient toutes les branches entières sauf un nombre fini. Sur chaque branche, les traces des domaines sont les parties localement fermées formées d'une réunion d'intervalles localement finie sur la trace. Une trace contenant $-\infty$ contient un voisinage de ce point. C'est le modèle corrigé de l'exemple 6.7.2 (n° 169), où seule l'extrémité $-\infty$ impose la constance locale. Un domaine contenant η contient toutes les branches entières sauf un nombre fini. Conservons la prescription paralinéaire des lignes 1025–1032 avec ces domaines.

Une fonction affine sur un domaine V est affine sur chaque composante connexe de chaque trace, donc constante sur une composante qui contient $-\infty$. On impose la relation

$$\sum_{b \in B} f_b'(0) = 0 \qquad \text{si } \eta \in \operatorname{Int}_{X_B} V.$$

Une branche entière n'apporte aucune pente, de sorte que cette somme est finie. À un point central qui est au bord du domaine, aucune relation de somme n'est imposée. La condition d'intérieur est toujours prise dans l'étoile ambiante, y compris quand on restreint l'affinage à un domaine.

Un squelette a des traces paralinéaires à coordonnées finies. S'il contient η, le nombre de bras dont la trace diffère de $\{\eta\}$ est fini. Le calibrage est unitaire sur les branches et le bord tropical est vide.

Topologie et domaines. Pour séparer η d'un point non central, on raccourcit la branche de ce point. Les autres séparations se font dans les branches ou dans des ouverts de branches distinctes. Dans un recouvrement ouvert, un ouvert contenant η contient déjà presque toutes les branches compactes entières. La compacité des dernières branches donne un sous-recouvrement fini. La projection de la somme disjointe des branches est continue. Lorsque B est infini, la famille des traces $(-1, 0]$ sur toutes les branches donne un ouvert de la topologie quotient qui n'est pas ouvert dans la topologie prescrite. Un voisinage de base de η est la réunion du bouquet compact des branches non exceptionnelles et d'un nombre fini d'intervalles terminaux, chacun dénombrable à l'infini. Avec les voisinages dans les branches, cela donne la base requise.

Les domaines sont localement fermés, y compris au centre où l'on se ramène à fermer les traces des branches exceptionnelles dans un voisinage commun. Les intersections préservent les conditions et les ouverts ordinaires sont des domaines. Une partie localement fermée G-recouverte se vérifie à l'aide d'un témoin pointé fini. Au centre, la réunion des ensembles de branches exceptionnelles des membres du témoin est finie, et sur chaque branche on utilise la saturation de l'intervalle. Un voisinage compact relatif dans un domaine contenant le centre conserve les branches non exceptionnelles entières et prend des traces compactes sur les branches restantes, avec $\{0\}$ pour un bras absent près du centre. Ailleurs, on utilise les intervalles compacts des branches. Ces raffinements donnent la propriété de G-recouvrement par domaines compacts.

Fonctions et squelettes. Le recollement par un témoin pointé fini au centre conserve un nombre fini de branches exceptionnelles et la même valeur constante centrale sur les autres. Sur les branches, le recollement paralinéaire et la constance aux extrémités idéales viennent du modèle d'intervalle. Cela prouve l'axiome du G-faisceau. Un domaine compact qui évite le centre ne rencontre qu'un nombre fini de branches, lesquelles donnent chacune un ouvert

du complémentaire du centre. Sur un domaine compact contenant le centre, un tuple fini de fonctions n’a qu’un nombre fini de branches exceptionnelles. Après avoir écarté les plateaux des extrémités idéales, les subdivisions finies des morceaux restants donnent une image polyédrique compacte. Composition et images réciproques se vérifient dans les branches. Quand l’image réciproque contient le centre, les branches entières portant la valeur centrale commune restent incluses.

Près du centre, sur un squelette formé d’un nombre fini de bras, on prend une coordonnée par bras, nulle sur les autres et aplatie plus loin sur sa branche. Ces coordonnées paralinéaires s’étendent à un domaine autorisé. Elles plongent le morceau de squelette comme un éventail fini et identifient les traces des domaines et fonctions paralinéaires aux traces paralinéaires usuelles. Ailleurs on prend la coordonnée d’intervalle. Les squelettes élémentaires fermés sont stables par restriction et réunion finie fermée, et leur recollement donne la famille indiquée. Les lieux de variation maximale des cartes sont les morceaux non constants avec leurs extrémités finies appartenant au domaine. Au centre, les pentes non nulles concernent un nombre fini de bras. Le lieu de variation maximale contient le centre exactement lorsque l’une de ces pentes est non nulle. Une extrémité idéale a un voisinage de constance. Ces lieux sont des squelettes fermés et les images ont dimension au plus un.

Pour réaliser l’image d’une carte sur un domaine compact, on conserve les morceaux non constants à coordonnées finies et des représentants finis des valeurs constantes restantes, avec η pour la valeur centrale si elle intervient. Un plateau idéal admet toujours un tel représentant. C’est un squelette compact. Un squelette compact qui évite le centre ne rencontre qu’un nombre fini de branches, par compacité et recouvrement par les ouverts de branches. S’il contient le centre, la finitude résulte de la définition des squelettes. La compacité maintient ces traces à distance des extrémités idéales. On obtient donc un nombre fini de morceaux d’intervalles compacts et de points. En épaississant les points isolés par de petits intervalles, y compris par un segment dans une branche si le squelette se réduit à η, on obtient un agrandissement compact pur de dimension un. Les calibrages unitaires se recollent sur ces morceaux. À une intersection réduite au centre, le module de degré un est nul.

Affinage. La restriction préserve la condition d’équilibre. Si un domaine plus petit contient η dans son intérieur ambiant, le plus grand contient également un voisinage de η et les pentes en jeu sont les mêmes. Le recollement ordinaire la préserve aussi, puisque dans un domaine qui contient un voisinage ambiant du centre, un voisinage relatif du centre contient encore un voisinage ambiant.

Pour rendre une fonction paralinéaire localement affine, on raccourcit les traces exceptionnelles jusqu’à ce que chacune soit affine près de 0 et on conserve les autres branches entières, toutes constantes. Si un bras manque déjà près du centre, aucun équilibre n’est exigé. Sinon on choisit deux branches distinctes. On forme deux domaines en remplaçant respectivement la trace de l’une ou l’autre branche par $\{0\}$ et en gardant toutes les autres traces. Ces domaines, fermés dans le voisinage de travail, le recouvrent et contiennent tous deux η, chacun ayant un bras manquant. La fonction y est affine selon la prescription corrigée. Ce témoin pointé valide donne la subdivision G-locale recherchée. Ailleurs on utilise la subdivision usuelle de l’intervalle. La réciproque découle du G-faisceau paralinéaire.

Décence et axiomes tropicaux. Près du centre, soit M l’ensemble fini des branches dont le germe terminal manque dans le domaine. Si M est vide, on se restreint au voisinage ordinaire déjà inclus dans le domaine. Sinon, pour prolonger une fonction affine, on choisit $c \in M$. On donne à cette branche la pente opposée à la somme des pentes présentes et aux autres branches manquantes la pente nulle. On raccourcit les branches de pente non nulle pour ôter leurs extrémités idéales. On obtient une fonction affine sur un voisinage ordinaire, de même valeur centrale et de mêmes germes sur les bras présents. Cela prouve le premier axiome de décence.

Pour le second, pour chaque $b \in M$ on choisit une branche auxiliaire distincte. Sur un voisinage ordinaire du centre, on construit une fonction affine de valeur centrale nulle et de pentes $+1$

sur b, -1 sur la branche auxiliaire et 0 ailleurs. Ses deux bras non constants sont raccourcis. Comme $t \leq 0$, l'inégalité large qui demande que la fonction soit positive ou nulle ôte exactement le germe de b en dehors du centre. La conjonction finie de ces inégalités décrit le domaine près de η, y compris lorsque tous les bras manquent. Une inégalité tautologique suffit lorsque M est vide. Hors du centre, la décence est celle de l'intervalle.

Une fonction lisse à support dans une portion finie d'une branche et nulle vers le centre se prolonge par zéro. On peut aussi prendre une coupure constante près d'une extrémité idéale et nulle vers le centre. Ces fonctions séparent localement les points. Dans une carte affine ordinaire au centre, la somme des vecteurs de pente des bras est nulle. Les contributions sortantes ont la même somme, au signe commun lié à l'orientation de la coordonnée près. La discordance est donc nulle. Le long d'une branche, les deux contributions unitaires s'annulent et, près d'une extrémité idéale, la carte est constante. Enfin, la frontière relative d'un domaine a des germes de dimension zéro à coordonnées finies. Sur tout squelette qui contient η, le nombre de bras concernés est fini. La trace de cette frontière y est paralinéaire, localement fermée et 1-négligeable. Avec le bord prescrit vide, cela achève la vérification des axiomes d'un espace tropical de niveau un.

Avec une seule branche, le modèle d'intervalle étendu a $\{\eta\}$ pour bord. L'ensemble vide de branches ne possède pas de centre. Le critère de lissité ordinaire et la réalisation analytique de l'étoile relèvent de vérifications distinctes.

171. Jets au centre d'une étoile à deux branches

Texte visé. § 6.7.3, p. 152.

`esptrop.tex`, lignes 1044–1051.

Correction. Pour deux branches, une carte affine centrale se factorise par $x = t$ sur la première et $x = -t$ sur la seconde, en raison de l'équilibre des pentes. La régularité lisse ordinaire exige

$$f_1^{(m)}(0) = (-1)^m f_2^{(m)}(0) \qquad (m \geq 0).$$

Ces égalités sont aussi suffisantes, en recollant les dérivées successives dans la coordonnée x. Les restrictions t^2 et 0 vérifient l'équilibre des dérivées premières et échouent au deuxième ordre.

Pour au moins trois branches, le critère d'équilibre du premier ordre repose sur une autre carte. Choisir $m \geq 3$ branches couvrant les exceptions finies, avec vecteurs $v_i = e_i$ pour $i < m$ et $v_m = -\sum_{i<m} e_i$. Les fonctions $Q_m = x_1 x_2$ et $Q_i = x_i^2 - x_1 x_2$ pour $i < m$ sélectionnent les branches car $Q_i(v_j) = \delta_{ij}$. Après la partie affine équilibrée, chaque reste vaut $t^2 h_i(t)$ avec h_i lisse. Pour des formes linéaires $\ell_i(v_i) = 1$, la somme $\sum_i Q_i(x) h_i(\ell_i(x))$ recolle ces restes dans la carte équilibrée et vaut zéro sur les branches non sélectionnées, envoyées sur zéro.

172. Indices des branches de la droite projective analytique

Texte visé. § 6.7.3, p. 152.

`esptrop.tex`, lignes 1053–1057.

Correction. Pour la réalisation par la droite projective analytique, prendre un corps k algébriquement clos trivialement valué et fixer une bijection $B \simeq \mathbb{P}^1(k)$. Le centre est la valeur absolue triviale sur $k(T)$. Les branches qui en partent sont indexées par les points de $\mathbb{P}^1(k)$, chacune étant paramétrée par la valeur d'un paramètre en ce point. Un ensemble fini B ne peut donner cette réalisation, puisque tout corps algébriquement clos est infini.

173. Compacité locale de la limite projective

Texte visé. §6.7.5, p. 153, `esptrop.tex`, lignes 1089–1090, avec les hypothèses des lignes 1074–1087 lues pour $S \subset V$.

Contre-exemple topologique avec les structures tropicales requises. Soit D l'ensemble discret dénombrable des suites d'entiers naturels finalement nulles. Pour chaque mot w de longueur i, notons D_w les suites de D qui commencent par w et $T_w = D_w \sqcup \{\infty_w\}$ son compactifié à un point. Chaque D_w est infini, en faisant varier le terme suivant. À l'étage i, prenons la somme topologique

$$X_i = \mathbf{R} \sqcup \coprod_{w \in \mathbf{N}^i} T_w \qquad (i \geq 0).$$

La droite est paralinéaire usuelle de paramètres $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$, avec son affinage ordinaire et son calibrage unitaire. Sur T_w, prenons pour domaines les ouverts et pour fonctions paralinéaires et affines les fonctions réelles localement constantes.

Chaque T_w est compact séparé à base d'ouverts compacts. Les domaines y sont localement fermés, stables par intersection, reconnus par leurs recouvrements ouverts et G-recouverts par leurs ouverts compacts. Les G-recouvrements de domaines y sont exactement les recouvrements ouverts. Les fonctions localement constantes y forment un G-faisceau de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels et un faisceau ordinaire dont la G-localisation est le faisceau paralinéaire. Sur un domaine compact, un uplet localement constant a une image finie, donc polyédrique, les points étant permis par des équations $z_j = a_j$. La composition permise est localement constante et l'image réciproque d'un sous-espace est une réunion de fibres ouvertes. Sur la droite, ces propriétés résultent de la structure paralinéaire usuelle et des raffinements par cellules où les fonctions sont affines. Tout compact ne rencontre qu'un nombre fini de composantes ouvertes et fermées. Les axiomes se vérifient donc sur la somme, qui est séparée, localement compacte et à base d'ouverts dénombrables à l'infini.

Dans un domaine V, une partie squelettique élémentaire est formée d'une partie paralinéaire fermée dans $V \cap \mathbf{R}$ et de parties de $D_w \cap V$ fermées dans $T_w \cap V$. Un singleton isolé est un domaine fidèle, par sa carte constante vers un point qui respecte toutes les traces et fonctions ambiantes. Les parties discrètes sont ainsi paralinéaires par leurs recouvrements en singletons. La définition élémentaire est stable par intersection avec les domaines et par réunion finie de parties élémentaires de domaines fermés. La construction G-locale donne exactement les parties squelettiques formées d'une partie paralinéaire de la droite et d'une partie quelconque de D dans le domaine visé. Les points à l'infini restent exclus et les singletons fournissent le recouvrement réciproque.

La dimension tropicale locale vaut zéro sur T_w et un sur la droite. La dimension des images compactes est au plus un, atteinte sur un intervalle compact par l'identité. Au niveau 1, les lieux de variation maximale sont vides sur les T_w et paralinéaires fermés sur la droite. Sur chaque bloc, toute fibre non vide d'une carte sur un domaine compact rencontre l'ensemble dense D_w, puisqu'elle est ouverte. Un point isolé par valeur, avec la partie compacte sur la droite, fournit un squelette qui réalise toute l'image de la carte compacte. Les étages sont donc riches. Sur les squelettes de dimension zéro, l'unique calibrage de niveau 1 est strictement positif dans le quotient du manuscrit, où $1 \in I_1$ représente la classe nulle. Le volume standard est nul et son calibrage donne l'unité $1 = 0$ du quotient. Les calibrages se restreignent de manière compatible.

Désignons $\coprod_w T_w$ comme bord de X_i. Le bord est fermé et rencontre les squelettes en dimension zéro. Sur les blocs, le bord relatif inclus d'un domaine ouvert est vide, et sur la droite les bords relatifs des domaines sont de dimension zéro. Les deux conditions de négligeabilité au niveau 1 sont donc satisfaites. L'intérieur est la droite. Sa coordonnée sépare les points, les fonctions affines s'étendent à l'ambiant près de chaque point et les domaines

admettent des descriptions locales par combinaisons finies d'inégalités affines. Tout squelette compact de la droite est contenu dans un squelette pur de dimension 1. L'harmonie résulte de la compensation des deux orientations sortantes avec le calibrage constant sur chaque morceau de pente non nulle d'une carte affine. Cela vérifie les conditions intérieures.

Pour $i \leq j$, la transition f_{ij} fixe $\mathbf{R}$ et tous les points isolés étiquetés par D, et envoie ∞_v sur $\infty_{v|_i}$. Elle est cohérente et surjective. Sur chaque composante source, un voisinage cofini de l'infini cible se tire en arrière en un voisinage cofini de l'infini source, et les ouverts d'isolés se tirent en arrière en ouverts. Elle tire les domaines et fonctions en arrière sur les blocs et fixe la droite. Pour tout domaine cible V et tout squelette $S \subset V$, l'image réciproque est identique sur les étiquettes de S et préserve les structures paralinéaires et le calibrage. Réciproquement, tout squelette de $f_{ij}^{-1}(V)$ est formé d'une partie de la droite et de points isolés et provient du même squelette dans V. Le bord se tire également en arrière. Pour $j > i$, l'image réciproque du singleton $\{\infty_w\}$ est un ensemble infini discret, donc la transition n'est pas propre.

Un uplet compatible appartient à la droite fixe, correspond à un point isolé de D, ou consiste en des points à l'infini dont les mots sont des préfixes compatibles. Ce troisième ensemble est la fibre fermée $F = p_0^{-1}(\{\infty_\emptyset\})$. L'intersection avec F de l'image réciproque d'une composante T_w est le cylindre de préfixe w. Inversement, la trace sur F de tout cylindre ouvert d'étage est une réunion de cylindres de préfixe. Ainsi F est homéomorphe à $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ muni de la topologie produit des espaces discrets. Tout voisinage contient un cylindre dont la projection sur la coordonnée suivante est $\mathbf{N}$, tandis qu'une projection d'un compact vers cette coordonnée est finie. Cette fibre est partout dépourvue de voisinages compacts. Étant fermée dans la limite séparée, elle interdit la compacité locale de la limite effective.

Correction de la partie topologique. La localité des domaines et des fonctions et l'application aux modifications analytiques relèvent de démonstrations distinctes. Soit (Y_i, g_{ij}) un système projectif sur un ensemble ordonné filtrant à droite non vide. Supposons les Y_i séparés, localement compacts, à base d'ouverts dénombrables à l'infini, et les transitions continues, propres et surjectives. Alors la limite topologique Y est séparée et localement compacte, a une base d'ouverts dénombrables à l'infini et ses projections p_i sont surjectives, fermées et propres.

Pour calculer la limite, on peut se restreindre à la partie cofinale $j \geq i$. À partir d'un uplet sur cette partie, on récupère sa coordonnée à un indice quelconque k par $g_{k\ell}(y_\ell)$ pour $\ell \geq i, k$. Un majorant commun donne l'indépendance et la compatibilité. La formule est l'inverse continu de la restriction.

Pour $K \subset Y_i$ compact, l'image réciproque $p_i^{-1}(K)$ est donc la limite des compacts $K_j = g_{ij}^{-1}(K)$, $j \geq i$. Les transitions restreintes sont surjectives, car tout antécédent d'un point de K_j est encore au-dessus de K. La limite est fermée dans le produit compact des K_j, les équations de compatibilité étant fermées par séparation. Cela prouve sa compacité, y compris si K est vide. Pour $K = \{y_i\}$, tous les K_j sont non vides. Un nombre fini d'équations de compatibilité se réalise en relevant y_i à un indice qui majore les indices de ces équations, puis en projetant ce relèvement. Les autres coordonnées se choisissent dans leurs facteurs non vides. La propriété d'intersection finie dans le produit compact donne un uplet compatible au-dessus de y_i, donc la surjectivité de p_i. Si un étage est vide, un majorant commun et la surjectivité imposent que tous les étages soient vides, ce qui satisfait aussi les conclusions.

La limite est séparée, comme sous-espace du produit, et localement compacte, en relevant un voisinage compact d'une coordonnée. Pour un fermé A de Y et un voisinage compact $K \subset Y_i$, on a

$$p_i(A) \cap K = p_i(A \cap p_i^{-1}(K)).$$

Cet ensemble est compact. Les intérieurs de ces K recouvrent Y_i, donc $p_i(A)$ est fermé et p_i est propre. Enfin, une intersection finie de cylindres ouverts est un cylindre à un indice qui

majore les indices en jeu. Ces cylindres forment une base. À l'intérieur d'un tel cylindre, on peut prendre l'image réciproque d'un ouvert d'étage dénombrable à l'infini, $V = \bigcup_m K_m$. Les $p_i^{-1}(K_m)$ sont compacts, donc ces cylindres donnent la base requise.

174. Compatibilité des bords dans une limite projective tropicale

Texte visé. §6.7.5, p. 153, `esptrop.tex`, lignes 1089–1090, sous les hypothèses des lignes 1074–1087 et avec le transport des données squelettiques des lignes 1110–1122. On lit $S \subset V$ dans les hypothèses portant sur tout domaine V.

Contre-exemple avec transitions propres

Pour $i \geq 1$, posons $E_i = \{a/b : a \in \mathbf{Z},\ |a| \leq i,\ 1 \leq b \leq i\}$. Ces ensembles sont finis, croissants et de réunion $\mathbf{Q}$. Chaque X_i est la droite paralinéaire standard de paramètres $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$, avec ses domaines et fonctions paralinéaires usuels. Pour tout domaine D, définissons $L_i(D)$ en prenant les fonctions qui, au voisinage ordinaire relatif de chaque point de D, sont la restriction d'une fonction paralinéaire continue sur un intervalle ouvert ambiant, à pentes rationnelles et points de rupture dans E_i. Ces germes sont affines au sens usuel hors de E_i. Les restrictions, sommes et multiplications par les rationnels préservent la condition et celle-ci est locale pour la topologie ordinaire. On obtient un faisceau affine au sens du manuscrit, contenant les constantes et les germes affines usuels. Sa G-localisation est le faisceau paralinéaire standard, puisque tout germe paralinéaire se recouvre par des pièces d'affinité et que les sections de L_i sont déjà paralinéaires.

La droite est séparée, localement compacte et a une base d'ouverts dénombrables à l'infini. La description locale des domaines par un nombre fini d'intervalles et de points fournit la stabilité par intersection, la reconnaissance par G-recouvrement et le raffinement en domaines compacts, avec tous les ouverts admis. Le G-faisceau usuel, la composition et les images réciproques se vérifient sur les subdivisions affines. Les cartes sur les domaines compacts ont des images polyédrales compactes de dimension au plus un, atteinte par la coordonnée sur un intervalle compact. La convention de n° 103 donne la dimension globale 1.

Les parties squelettiques élémentaires d'un domaine sont ses parties paralinéaires fermées. La coordonnée, qui s'étend à toute la droite, est fidèle sur toute partie paralinéaire, car les intersections avec les domaines et les restrictions des cartes sont paralinéaires. Les parties élémentaires sont stables par restriction et par réunion finie dans des domaines fermés, et leur G-localisation donne exactement les parties paralinéaires. Pour une carte à plusieurs composantes, le lieu de variation maximale au niveau 1 est localement formé des morceaux d'intervalle à pente non nulle et de leurs extrémités incluses. Il est fermé dans le domaine et paralinéaire. Tout domaine compact est un squelette et détecte toute l'image de sa carte, d'où la richesse. Munissons-les du calibrage unitaire et de ses restrictions. En dimension zéro, la classe du calibrage de niveau 1 est nulle dans le module quotient, avec le représentant strictement positif 1 puisque $1 \in I_1$. Cela vérifie la positivité et la compatibilité dans les modules de calibrage.

Le bord désigné de X_i est E_i. Son intérieur $J_i = \mathbf{R} \setminus E_i$ est muni de l'affinage affine usuel. La coordonnée sépare les points. À un point de J_i, une fonction affine d'un domaine s'étend par son germe ambiant et les domaines se décrivent par des combinaisons finies d'inégalités affines faibles. Tout squelette compact de J_i est contenu dans une réunion finie d'intervalles compacts non dégénérés contenus dans J_i. Pour une carte affine sur un ouvert de J_i, les deux vecteurs sortants se compensent au point intérieur si la pente est non nulle, et le lieu maximal est vide pour une pente nulle. Ces faits donnent la séparation différentielle, la décence, la propriété d'être très riche et l'harmonie. Le bord désigné est fini. Le bord relatif inclus $D \setminus \mathrm{Int}_{\mathbf{R}}(D)$ de tout domaine est localement fermé et discret en chacun de ses points, par la description locale

en intervalles et points. Les deux traces sur tout squelette sont donc 1-négligeables. Cela vérifie tous les axiomes tropicaux de niveau 1 à chaque étage.

Pour $i \leq j$, la transition $f_{ij} : X_j \to X_i$ est l'identité de la droite. Elle est continue, propre, surjective et G-tropicale. Sur chaque domaine, l'inclusion $E_i \subset E_j$ donne $L_i(D) \subset L_j(D)$, donc la transition est affine. Pour tout domaine V et tout squelette de V, l'image réciproque est la même partie paralinéaire avec le même calibrage. Réciproquement tout squelette dans l'image réciproque de V vient ainsi d'un squelette dans V. On a $f_{ij}(J_j) \subset J_i$.

La limite effective est la droite et ses projections sont les identités. La localisation ne change ni domaines ni fonctions paralinéaires. Les squelettes sont les parties paralinéaires et le calibrage est unitaire. Le faisceau affine engendré localement pour la topologie ordinaire contient $u_q(t) = |t - q|$ pour tout $q \in \mathbf{Q}$, puisque q appartient à quelque E_i. Supposons qu'un bord fermé B complète cette structure. Si $q \notin B$, la carte affine u_q sur un intervalle ouvert autour de q dans $\mathbf{R} \setminus B$ a tout cet intervalle comme lieu de variation maximale. Dans la coordonnée cible s, sa discordance au point $\{q\}$, orienté positivement, est

$$(-1)(+\partial_s) + (+1)(-\partial_s) = -2\partial_s \neq 0.$$

Les deux termes sont les images des vecteurs sortants des intervalles gauche et droit, avec le calibrage unitaire. Cette valeur est la discordance formelle dans la direction cible, même si la mesure de la face ponctuelle est nulle. L'harmonie impose donc $\mathbf{Q} \subset B$, puis $B = \mathbf{R}$ par fermeture. La trace de B sur le squelette $\mathbf{R}$ n'est alors pas 1-négligeable. Aucun bord fermé ne convient à ces données affines, squelettiques et calibrées.

Énoncé suffisant corrigé

Soit I un ensemble ordonné filtrant à droite non vide. Prenons un système projectif d'espaces tropicaux X_i de même niveau n, pour les mêmes paramètres, et de G-morphismes f_{ij} continus, propres, surjectifs et affines sur tous les domaines de l'étage cible. Pour tout $i \leq j$ et tout domaine V_i, supposons que l'image réciproque identifie, dans les deux sens, les parties squelettiques de V_i et de $f_{ij}^{-1}(V_i)$, par de véritables isomorphismes paralinéaires préservant les n-calibrages. Supposons de plus

$$\partial X_j = f_{ij}^{-1}(\partial X_i) \qquad (i \leq j).$$

Alors sur la limite topologique X, la structure localisée décrite ci-dessous, avec squelettes et calibrages transportés, est tropicale de niveau n. Son bord est le fermé $B = p_i^{-1}(\partial X_i)$, indépendant de i. Cette égalité de bords est une hypothèse suffisante.

Domaines, fonctions et topologie. Le résultat topologique pour les transitions propres et surjectives (n° 173) donne la compacité locale, la séparation, la base d'ouverts dénombrables à l'infini et des projections p_i propres, fermées et surjectives. Les domaines sont les parties localement fermées G-recouvertes par des cylindres domaniaux contenus dans la partie. Sur ceux-ci, on autorise toutes les présentations d'étage. Une fonction paralinéaire est G-localement le tiré en arrière d'une fonction paralinéaire d'étage. Le faisceau affine est engendré pour la topologie ordinaire par les combinaisons linéaires rationnelles finies de restrictions de sections affines d'étage. L'affinité de chaque transition permet de représenter localement tout uplet affine par un uplet d'un seul étage, à un indice qui majore les indices des termes.

Un majorant commun donne les intersections finies de cylindres et leurs restrictions. La surjectivité de la projection à cet étage fait descendre les inclusions et les égalités. Les cylindres ouverts forment une base. La composition des témoins finis assure la reconnaissance des domaines. Par propreté, les domaines compacts d'étage se tirent en arrière en domaines compacts et G-recouvrent chaque domaine par transitivité. Les réunions finies de cylindres

compacts descendent à un étage commun comme domaines compacts, par propreté des transitions. On peut donc prendre, dans tout voisinage relatif d'un point d'un domaine, un cylindre compact qui en est un voisinage relatif. Un domaine compact est la réunion finie de tels cylindres et descend en entier. Près d'un point d'un domaine quelconque, ce domaine coïncide avec un cylindre compact après intersection avec un cylindre ouvert.

Pour le G-faisceau, les témoins pointés permettent de vérifier la continuité d'une fonction recollée, en intersectant les voisinages relatifs de continuité du nombre fini de morceaux. Le raffinement des présentations établit la paralinéarité du recollement. Un uplet paralinéaire sur un domaine compact se représente sur un nombre fini de cylindres compacts, en raffinant ensemble toutes ses composantes. À un étage commun les coefficients concordent par surjectivité et se recollent sur le recouvrement fermé fini, qui est un G-recouvrement. Le domaine et l'uplet descendent donc avec leur image exacte. La composition et les images réciproques de sous-espaces paralinéaires s'obtiennent sur les présentations d'étage. Pour la seconde assertion, la continuité donne une partie localement fermée et les domaines d'étage de ses traces la G-recouvrent. Ceci donne tous les axiomes paralinéaires. En particulier, la dimension sur domaines compacts est au plus n. Le faisceau affine ordinaire engendre G-localement le faisceau paralinéaire, en relevant les présentations affines des fonctions paralinéaires d'étage. Sur un domaine compact, un uplet affine descend en utilisant cette fois un sous-recouvrement fini par des cylindres ouverts relativement au domaine compact. À un étage commun, leurs images sont des ouverts relatifs. Elles recouvrent le domaine compact d'étage et les sections se recollent dans son faisceau affine ordinaire par surjectivité.

Squelettes et calibrages. Pour un squelette $S_i \subset X_i$, chaque $y \in S_i$ a une fibre singleton dans la limite. Le singleton est squelettique à l'étage, et chaque antécédent à un étage ultérieur est unique par l'hypothèse. Les relèvements compatibles sur la partie cofinale donnent la fibre. Si $p_i^{-1}(y) = \{x\}$, tout ouvert N contenant x contient $p_i^{-1}(O)$ pour l'ouvert $O = X_i \setminus p_i(X \setminus N)$ qui contient y. Ainsi $S = p_i^{-1}(S_i)$ est homéomorphe à S_i. À un autre indice h, un étage commun $k \geq i, h$ et le sens réciproque de la correspondance squelettique donnent S_h avec $S = p_h^{-1}(S_h)$. Les structures paralinéaires et les calibrages transportés coïncident à l'étage commun.

Sur une trace fidèle d'un squelette d'étage, la carte fidèle se relève en un homéomorphisme sur la même image paralinéaire, prolongé au cylindre de son domaine de définition. Pour vérifier la condition de fidélité contre une carte sur un nouveau domaine, raffiner ses présentations par des cylindres paralinéaires et passer à un étage commun. Le test sur chaque trace s'y ramène alors au test contre une carte du domaine correspondant. Le recollement sur ces traces donne le test demandé sur le nouveau domaine. Le squelette relevé a ainsi sa structure paralinéaire canonique, et toute partie paralinéaire de ce squelette provient par image réciproque d'une telle partie à l'étage.

À un étage, une partie paralinéaire d'un squelette est squelettique en recouvrant ses traces par des morceaux compacts, puis en réalisant chacun comme la trace d'un domaine compact dans le conteneur élémentaire. Les parties squelettiques contenues dans une partie et qui la G-recouvrent se recollent en un squelette. En effet, au voisinage d'un point, prendre finitement beaucoup de traces pointées sur des domaines compacts. Les domaines compacts, donc fermés, permettent d'utiliser l'axiome de réunion des squelettes élémentaires pour obtenir G-localement des conteneurs élémentaires communs. Dans ces conteneurs, les traces forment des réunions fermées finies de parties paralinéaires. Ce sont les traces requises, en utilisant les domaines ambiants par leurs intersections avec la partie.

Ces propriétés passent aux relevés. Pour le recollement, une partie A G-recouverte par des relevés contenus dans A est localement fermée par les témoins finis, dont les morceaux sont fermés sur un même voisinage. À un étage fixé, A est réunion de fibres singletons et p_i l'identifie topologiquement à $A_i = p_i(A)$. Si $A = C \cap U$, avec C fermé et U ouvert, alors $A_i = p_i(C) \setminus p_i(C \setminus U)$, par la propriété des fibres singletons sur A. L'image A_i est donc localement fermée et les traces du G-recouvrement la G-recouvrent par des squelettes d'étage. Elle est

squelettique. On peut prendre pour squelettes élémentaires d'un nouveau domaine les relevés qui y sont fermés. L'intersection avec un domaine est une trace paralinéaire, donc reste un relevé. Une réunion finie de squelettes élémentaires de sous-domaines fermés est un relevé fermé, par le recollement sur le recouvrement fermé fini. Les squelettes généraux obtenus sont exactement les relevés, ceux-ci étant élémentaires dans un ouvert où ils sont fermés. Le calibrage est indépendant de l'étage par comparaison à un indice commun. En présentant deux squelettes emboîtés au même étage, on obtient la compatibilité de restriction dans le module de calibrage. La stricte positivité se transporte dans le quotient, avec les représentants positifs des classes, y compris en dimension inférieure au niveau.

Variation maximale et richesse. Pour une carte $g = g_i \circ p_i$ sur $p_i^{-1}(V_i)$, le lieu de variation maximale au niveau n est l'image réciproque de celui de g_i. Hors de celui-ci, l'image réciproque d'un voisinage domanial compact d'étage a la même image de dimension inférieure à n. Sur ce lieu, la fibre est singleton. Pour tout voisinage domanial compact du point dans le cylindre, la propriété de projection fermée donne un voisinage relatif d'étage dont l'image réciproque y est contenue. Il contient un voisinage domanial compact d'étage qui a une image de dimension n. Ceci donne l'autre inclusion, avec la majoration de dimension déjà établie. Les cartes générales descendent sur des voisinages cylindriques compacts par la descente compacte. Sur leurs intérieurs relatifs, la comparaison donne des traces squelettiques qui se recollent. La richesse se transmet parce qu'une carte compacte descend et qu'un squelette compact d'étage qui réalise toute son image se relève en un squelette compact de même image.

Bord et traces négligeables. L'égalité des bords d'étage rend B indépendant de l'indice, en comparant à un majorant commun. Son complément J est $p_i^{-1}(J_i)$, où $J_i = X_i \setminus \partial X_i$. Sur tout squelette, les porteurs paralinéaires de dimension $< n$ de la trace du bord d'étage se transportent. Pour le bord relatif inclus d'un nouveau domaine D, au voisinage d'un point considérons un cylindre compact $C = p_i^{-1}(K_i) \subset D$ qui coïncide avec D sur un ouvert ambiant. La continuité donne

$$C \setminus \operatorname{Int}_X C \;\subset\; p_i^{-1}(K_i \setminus \operatorname{Int}_{X_i} K_i).$$

Présentons le squelette au même étage. La négligeabilité du bord relatif en bas donne des porteurs locaux de dimension $< n$ de la trace en haut. Pour obtenir un porteur sur chaque carte entière, on prend un recouvrement localement fini par cellules compactes subordonnées aux voisinages de porteurs. On intersecte chaque cellule avec son porteur. Près d'un point de la trace, on élimine les cellules fermées qui ne contiennent pas ce point et on rend les porteurs restants fermés sur un même voisinage. Leur réunion y est paralinéaire de dimension $< n$. La restriction de la réunion aux ouverts où cette vérification s'applique donne le porteur requis. Au niveau $n = 0$, les traces négligeables d'étage sont vides, et l'inclusion donne directement la vacuité de la trace du bord relatif.

Propriétés intérieures. Sur chaque J_i, la séparation différentielle locale donne des fonctions lisses séparant deux points globalement. Pour cela, autour de l'un des deux points choisir un voisinage compact dans un ouvert différentiellement séparé qui évite l'autre point. Les fonctions séparant le point choisi des points du bord de ce compact et des coupures lisses scalaires donnent un produit fini égal à un près du point et nul près du bord, grâce à la compacité du bord. Le prolongement par zéro est lisse et convient aussi pour un compact ouvert et fermé, avec sa fonction caractéristique. Deux points distincts de J diffèrent à un étage. Le tiré en arrière par la projection affine de la fonction lisse d'étage qui les sépare donne la séparation sur J.

Pour les deux clauses de décence, près d'un point d'un domaine de J on remplace celui-ci par un cylindre compact sur un voisinage ouvert cylindrique, puis on descend à un étage commun. La partie d'étage est dans J_i par surjectivité. Une fonction affine sur le domaine descend sur le compact, puis s'étend à un ouvert à l'étage par décence. Le tiré en arrière étend la fonction près du point. La description exacte du domaine près du point s'obtient en relevant les combinaisons finies d'inégalités affines faibles données par la décence à l'étage. Un squelette compact de J descend en un squelette compact de J_i. Un squelette pur de dimension n de J_i qui le contient

se relève avec la même dimension pure et reste dans J. Ceci donne la propriété d’être très riche.

Pour l’harmonie, considérons une carte affine sur un ouvert ordinaire de J. Au voisinage de tout point, elle se représente par une carte d’étage sur un cylindre ouvert. La surjectivité permet de prendre en bas un véritable ouvert dans le domaine de la carte et dans J_i. La comparaison des lieux maximaux les identifie par isomorphisme paralinéaire avec leurs calibrages. Transportons une subdivision adaptée. À chaque face orientée de dimension $n-1$, les valeurs des coefficients et les vecteurs orientés poussés par la puissance extérieure de la carte coïncident avec les termes de la discordance d’étage. Leur somme est donc nulle point par point. Sur les faces ajoutées par raffinement, les orientations sortantes opposées se compensent. Le calcul conserve les calibrages variables. Au niveau zéro il n’y a pas de faces de dimension négative.

Le résultat vaut sans stabilisation ni suite cofinale. Un étage vide impose la limite vide par surjectivité et filtrance. L’application aux modifications analytiques relève d’hypothèses distinctes.

175. Localité des domaines et des fonctions sur une limite projective

Texte visé. §6.7.5, p. 153, `esptrop.tex`, lignes 1096–1103. Dans les hypothèses des lignes 1074–1087, on lit $S \subset V$ pour la partie squelettique du domaine V.

Construction d’espaces tropicaux. Fixons $(K, G) = (\mathbf{Q}, \mathbf{R})$. Soit D un ensemble dénombrable infini discret, partagé en deux parties infinies D^+, D^-. Notons $T = D \sqcup \{\infty\}$ son compactifié à un point et

$$T' = (D^+ \sqcup \{\infty^+\}) \sqcup (D^- \sqcup \{\infty^-\})$$

la somme topologique des deux compactifiés à un point. Tous ces espaces sont compacts séparés, à base d’ouverts compacts, et les points de D sont isolés et denses. L’application $\pi : T' \to T$ fixe D et envoie $\infty^{\pm}$ sur ∞. Elle est continue car un voisinage cofini de ∞ contient presque tous les points de chaque moitié. Elle est surjective et propre.

Sur T et T', les domaines sont les ouverts et les fonctions paralinéaires et affines sont les fonctions réelles localement constantes. Les domaines sont localement fermés et stables par intersections finies. Une partie G-recouverte par des ouverts est ouverte et les domaines compacts ouverts donnent les G-recouvrements requis. Ici les G-recouvrements sont les recouvrements ouverts. Les fonctions localement constantes forment un G-faisceau de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels contenant les constantes et un faisceau pour la topologie ordinaire. Leur G-localisation redonne donc les fonctions paralinéaires. Sur un compact, un uplet localement constant a une image finie, donc polyédrique, les points étant donnés par les équations à coefficients rationnels $z_i = a_i$. Les compositions permises sont localement constantes et les images réciproques sont des réunions de fibres ouvertes.

Dans un domaine V d’un tel compactifié, les parties squelettiques élémentaires sont les parties formées de points isolés et fermées dans V. Les singletons isolés sont des domaines fidèles, par la carte constante qui identifie le singleton à un point et sur laquelle toutes les cartes ambiantes se restreignent à des constantes. Les parties discrètes sont donc paralinéaires. La définition élémentaire est stable par intersection avec un domaine. Dans une famille finie de domaines fermés, la réunion de parties élémentaires est encore fermée dans l’ambiant et formée de points isolés, donc elle est élémentaire. Les parties squelettiques obtenues par la construction G-locale sont exactement les parties de D. Le G-recouvrement par les singletons donne la réciproque, et aucun morceau élémentaire ne contient de point à l’infini.

La dimension tropicale locale et la dimension des images compactes sont nulles sur ces blocs. Au niveau 1, les lieux de variation maximale sont vides, donc squelettiques. Pour la richesse, dans tout domaine compact chaque fibre non vide d’une carte est ouverte et rencontre D. Un

point isolé par valeur donne un squelette fini qui réalise toute l'image. Le calibrage de niveau 1 d'un squelette de dimension zéro est l'unique calibrage du module nul. Il est strictement positif au sens du quotient du manuscrit, car 1 appartient à l'idéal de dimension I_1 et représente la classe nulle par un représentant strictement positif. Le volume standard et la valeur unité dans ce quotient sont tous deux nuls, et les restrictions des calibrages sont compatibles.

Donnons à ces blocs pour bord la totalité du bloc. Cette partie est fermée et ses traces sur les squelettes sont 1-négligeables. Le bord relatif inclus d'un domaine ouvert y est vide. Adjoignons en somme topologique une droite paralinéaire usuelle, avec son faisceau affine usuel, ses squelettes paralinéaires et son calibrage unitaire. Sur cette composante sans bord désigné, la coordonnée sépare les points. Les fonctions affines s'étendent localement et les domaines locaux, réunions finies d'intervalles et de points, se décrivent par des inégalités affines. Tout squelette compact est contenu dans un intervalle pur de dimension 1. La pente d'une carte affine est localement constante et, pour une pente non nulle, les deux directions sortantes se compensent avec le calibrage transporté. Ces faits donnent la séparation différentielle, les deux conditions de décence, la propriété d'être très riche et l'harmonie. Les bords relatifs des domaines de la droite ont dimension zéro. Les lieux de variation maximale sont paralinéaires fermés dans leur domaine et la partie compacte sur la droite réalise l'image de sa restriction. Les structures se combinent composante par composante. Un compact rencontre un nombre fini de composantes ouvertes et les images compactes et la richesse se vérifient par réunion finie. La dimension tropicale globale corrigée et le niveau sont 1, et l'intérieur est la droite.

Système et limite. Prenons des copies T_j, T'_j, D_j pour $j \geq 1$. Pour $i \geq 0$, posons

$$X_i = \mathbf{R} \sqcup \coprod_{1 \leq j \leq i} T'_j \sqcup \coprod_{j > i} T_j.$$

Pour $i \leq k$, la transition $f_{ik} : X_k \to X_i$ est l'identité sur les composantes inchangées et vaut $\pi_j : T'_j \to T_j$ si $i < j \leq k$. Les transitions sont compatibles, surjectives et propres, car l'image réciproque d'un compact ne rencontre qu'un nombre fini de composantes et est compacte dans chacune. Les domaines, fonctions paralinéaires et fonctions affines se tirent en arrière par continuité sur les blocs et par l'identité sur la droite.

Pour tout domaine $V \subset X_i$ et tout squelette $S \subset V$, chaque point de S a un unique antécédent, sur la droite ou parmi les points isolés. La restriction induite est l'identité sur ces étiquettes, donc un isomorphisme paralinéaire de squelettes qui préserve le calibrage. Réciproquement tout squelette dans $f_{ik}^{-1}(V)$ est formé d'une partie paralinéaire de la droite et de points isolés. Le même ensemble en bas est un squelette de V et son image réciproque est exactement le squelette donné. Les bords désignés sont également préservés par image réciproque.

La limite topologique est

$$X = \mathbf{R} \sqcup \coprod_{j \geq 1} T'_j.$$

En effet, un uplet compatible garde sa composante et celle d'indice j est identifiée à T'_j dès l'étage j. Les coordonnées antérieures en sont les images par π_j. La bijection vers la limite est continue car ses projections le sont. Son inverse est continu sur la droite et sur chaque composante, celles-ci étant les images réciproques de composantes ouvertes et fermées de X_0 et leur topologie étant identifiée à l'étage où elles se stabilisent.

Échec des prescriptions imprimées. La réunion U des moitiés $D_j^+ \sqcup \{\infty_j^+\}$ dans X est ouverte et fermée. À chaque étage i et pour $j > i$, les points $\infty_j^{\pm}$ ont la même projection mais seul ∞_j^+ appartient à U. Donc U n'est pas une image réciproque d'un ensemble d'un seul étage. Les moitiés prises séparément descendent pourtant à leur étage j et G-recouvrent U. Les axiomes des domaines ouverts et de reconnaissance par G-recouvrement échouent.

Sur le domaine X, prenons $u = 0$ sur la droite et les moitiés positives et $u = 1$ sur les moitiés négatives. La droite et les T'_j forment un recouvrement ouvert par des domaines qui descendent à l'étage zéro. Les restrictions de u descendent sur la droite à l'étage zéro et sur chaque T'_j à l'étage j, comme fonctions paralinéaires et affines. Elles se recollent en u, qui ne descend à aucun étage puisque ses valeurs aux $\infty_j^{\pm}$ diffèrent pour $j > i$. Les prescriptions imprimées ne donnent donc ni le G-faisceau paralinéaire ni le faisceau affine ordinaire.

Deux corrections dans des cadres précis. Pour ce système, G-localisons les domaines et fonctions paralinéaires d'étage, et localisons les fonctions affines pour la topologie ordinaire. Sur chaque T'_j, l'identification à l'étage j donne exactement les domaines ouverts et les fonctions localement constantes, et sur la droite on retrouve les structures paralinéaires et affines usuelles. En effet, ces sections et ces morceaux de domaine descendent sur leur composante, tandis que tout morceau descendu s'y restreint à un morceau du même type. Le recollement par composantes donne les domaines localement fermés de ces types, le faisceau paralinéaire et le faisceau affine correspondants. Les squelettes, calibrages et bord sont ceux vérifiés plus haut, avec la droite comme intérieur. On obtient ainsi une structure tropicale de niveau 1 sur cette limite et, dans celle-ci, U est un domaine et u est affine, paralinéaire et lisse.

En général, supposons qu'un sous-ensemble dirigé cofinal J des indices ait toutes ses transitions des isomorphismes tropicaux complets, préservant en particulier domaines, fonctions paralinéaires et affines, squelettes, calibrages et bords. Fixons $i_0 \in J$. Pour $x \in X_{i_0}$ et $j \in J$ avec $j \geq i_0$, le relèvement est $x_j = f_{i_0 j}^{-1}(x)$. À un indice quelconque k, prenons $\ell \in J$ majorant k, i_0 et posons $x_k = f_{k\ell}(x_\ell)$. Un majorant commun dans J prouve l'indépendance du choix et la compatibilité. Ces coordonnées sont continues, ce qui donne l'inverse continu de la projection sur X_{i_0}. Transportons par cet homéomorphisme la structure tropicale complète. Les transitions isomorphes dans J rendent le transport indépendant de l'étage choisi dans J. Toutes les prescriptions à un seul étage se réalisent sur J, avec les données tropicales et axiomes transportés.

Les cylindres ouverts forment une base, car une intersection finie s'écrit à un indice commun qui majore les indices des facteurs. Un ouvert est une réunion de cylindres. La descente d'une fonction lisse depuis un étage reste une condition suffisante dans une construction locale valable. Les deux corrections ci-dessus portent sur le système scindé et sur la stabilisation par isomorphismes. L'application aux modifications propres non stabilisantes relève de la construction générale distincte.

176. Prolongement faible par zéro et différentielles des courants

Texte visé. §7.1.12, p. 159, `courants-trop.tex`, lignes 474–476.

Contre-exemples. Prenons $X = [-\infty, +\infty]$, $U = \mathbf{R}$, $j : U \hookrightarrow X$, dans le modèle tropical de niveau 1 à deux extrémités idéales et paramètres $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$. Les domaines sont les domaines d'intervalle localement fermés qui contiennent un voisinage de chaque extrémité idéale incluse. Les fonctions paralinéaires ont des pentes rationnelles aux points finis et sont constantes près des extrémités idéales incluses. Les fonctions affines sont affines sur les composantes ordinaires à distance des extrémités et constantes sur une composante qui en rencontre une. Les parties squelettiques sont les parties paralinéaires de la droite finie, au calibrage unitaire.

Les témoins finis de recouvrement donnent les axiomes des domaines et du G-faisceau. Une carte sur un domaine compact admet un nombre fini de pièces affines finies et de plateaux constants aux extrémités, donc une image polyédrale compacte. Sur les pièces finies, la coordonnée est fidèle pour les traces et restrictions. Les pièces non constantes, avec un représentant fini de chaque plateau, donnent un squelette compact qui réalise l'image de la carte. Les lieux maximaux de niveau 1 sont des parties paralinéaires fermées dans le domaine, à coordonnées finies. Cette construction donne les axiomes squelettiques et la richesse avec la

dimension sur domaines compacts. Le bord tropical est vide. Des fonctions lisses constantes près des extrémités donnent la séparation différentielle, les descriptions d'intervalle et les prolongements affines donnent la décence, et les squelettes compacts s'agrandissent en intervalles purs compacts. À un point fini les contributions opposées s'annulent dans une carte affine. Aux extrémités idéales les cartes affines sont constantes. Le bord relatif d'un domaine a des porteurs de dimension zéro sur chaque squelette. Le modèle satisfait ainsi les conditions de niveau 1.

Sur U, prenons $T(a\,d't) = \int_{\mathbf{R}} a(t)\,dt$, de bidimension $(1,0)$. Sur tout étage de tests ordinaires fixé sur X, les cartes qui contiennent les extrémités dans leurs intérieurs sont constantes sur des voisinages de celles-ci. Toutes les formes de degré positif de l'étage s'y annulent donc. Leur restriction a un support commun dans un intervalle compact de U. Les semi-normes d'ordre zéro contrôlent l'intégrale sur cet intervalle par les représentations sur les images compactes des cartes. Ceci donne un courant d'ordre zéro et la condition faible de prolongement, test par test. Sur U, $d'T = 0$ par intégration de la dérivée d'un test compact. Pour une fonction lisse b constante près de chaque extrémité, la transposition signée du manuscrit donne

$$d' j_! T(b) = \int_{\mathbf{R}} b'(t)\,dt = b(+\infty) - b(-\infty), \qquad j_! d'T(b) = 0.$$

Choisissons des valeurs d'extrémité distinctes. L'opérateur J donne le cas de d''.

Prenons aussi le courant symétrique $S(a\,d't \wedge d''t) = \int_{\mathbf{R}} t\,a(t)\,dt$. Les mêmes estimations s'appliquent avec $|t|$ borné sur l'intervalle compact de chaque étage. La base $d't \wedge d''t$ est fixée par J. Les premières dérivées de S sur U sont, à un signe près, des courants d'intégration de coefficient constant sur les formes de degré un. Elles satisfont la condition faible, et $d'd''S = 0$ sur U. Sur X, la convention de signes donne

$$d'd'' j_! S(b) = \int_{\mathbf{R}} t\,b''(t)\,dt = b(-\infty) - b(+\infty), \qquad j_! d'd''S(b) = 0.$$

Dans l'intégration par parties, b' est à support compact dans $\mathbf{R}$. Les prolongements des courants considérés sont tous définis.

Construction faible conservée. Sous l'hypothèse de séparation différentielle locale, si le courant scalaire $T \wedge \alpha|_U$ a support compact dans U pour chaque test ambiant compact α, posons $j_! T(\alpha) = (T \wedge \alpha|_U)(1)$. La valeur en 1 se calcule par une coupure compacte égale à un près du support de ce courant scalaire. Pour la continuité, fixons une famille de cartes ordinaires et un compact de support des tests. Recouvrons ce compact par les intérieurs d'un nombre fini de voisinages domaniaux compacts dans les cartes. Une partition lisse finie près du compact et des coupures compactes dans ces intérieurs existent sous l'hypothèse de séparation. Les coefficients ordinaires sur chaque image compacte se prolongent en coefficients lisses ambiants près de cette image. La partition exprime alors tout test de l'étage comme une somme de fonctions lisses multipliant un nombre fini de tests globaux compacts fixes, obtenus à partir des tenseurs de base des cartes et des coupures. La condition faible appliquée à ces tests fixes donne une réunion finie de supports compacts dans U, qui porte tous les courants scalaires de l'étage. Une seule coupure dans U calcule donc le prolongement sur cet étage. La restriction et la multiplication par cette coupure sont continues vers un étage de support compact dans U, avec conservation de l'ordre fini. La topologie finale des tests donne un courant. La même évaluation par coupure donne la linéarité et la compatibilité avec J.

Différentielles sous une hypothèse suffisante. Supposons que $\operatorname{supp} T$ rencontre chaque compact de X en un compact de U. Le support des dérivées est contenu dans celui de T, donc cette condition vaut aussi pour elles. Pour un test ambiant compact, prenons une coupure sur U égale à un près de l'intersection de son support avec celui de T. Dans la dérivée du produit par la coupure, le terme où la coupure est dérivée est porté hors du support de T. L'autre terme

donne par transposition exactement l'identité entre prolongement et dérivée. Ceci vaut pour d' et d'', puis pour $d'd''$ par itération.

177. Restriction des courants en bidimension fixée

Texte visé. Lemme 7.1.13, p. 160, `courants-trop.tex`, lignes 484 et 500.

Contre-exemple aux indices imprimés. Prenons $X = \mathbf{R} \sqcup \{e\}$ au niveau 1, $U = \mathbf{R}$ et $p = q = 1$. La droite porte sa structure tropicale usuelle sans bord et son calibrage unitaire. Le point isolé a ses domaines et fonctions usuels de dimension zéro et pour seul calibrage de niveau 1 la classe nulle du quotient, représentée par 1 pour la stricte positivité. Les axiomes se vérifient par composantes ouvertes et fermées. Le point est squelettique, de variation maximale vide, et détecte à lui seul ses images de cartes. L'intérieur désigné est la droite usuelle, décente, très riche, harmonieuse et localement différentiellement séparée. Le bord $\{e\}$ a trace 1-négligeable, tout comme les bords relatifs des domaines. La dimension de e est zéro, donc satisfait la borne imprimée.

Avec les indices imprimés, $\mathcal{D}^{1,1}(X) = \mathcal{D}_{0,0}(X)$ et contient l'évaluation non nulle δ_e. Dans toute famille couvrante de cartes, le domaine compact singleton donne la continuité à l'ordre zéro. La fonction caractéristique de la composante $\{e\}$ est un test qui la détecte. La restriction de ce courant à U est nulle. Les indices complémentaires donnent donc un noyau.

Correction. Gardons $d_{\text{trop}}(x) < \max(p, q)$ sur $X \setminus U$. La restriction et le prolongement compact par zéro sont des isomorphismes topologiques inverses entre les espaces ordinaires de tests $\mathcal{A}_c^{p,q}(X)$ et $\mathcal{A}_c^{p,q}(U)$. Par dualité l'énoncé porte sur $\mathcal{D}_{p,q}(X)$ et $\mathcal{D}_{p,q}(U)$.

Pour la restriction, fixons une famille de cartes affines ordinaires et un compact K de support des tests. À chaque $x \notin U$, choisissons une carte dont le domaine contient un voisinage ordinaire de x. La borne de dimension donne dans cette carte un voisinage domanial compact de x dont l'image a dimension inférieure à $\max(p, q)$. Les représentants ordinaires de toutes les formes de l'étage y sont nuls, par degré extérieur. Les intérieurs de ces voisinages donnent un ouvert O contenant $X \setminus U$ où l'étage entier s'annule. La restriction a donc un support commun dans le compact $K \setminus O \subset U$, et les semi-normes ordinaires se restreignent sur les cartes. Pour le prolongement, gardons le compact de support de l'étage dans U, transportons les cartes de U et ajoutons la carte nulle sur le complément du compact. Les anciennes semi-normes sont conservées et celles de la carte ajoutée sont nulles. On obtient les deux continuités sur les étages, puis sur les topologies finales à tout ordre, et les deux identités inverses par localité. L'illustration analytique utilise une estimation de dimension distincte.

178. Courants positifs opposés et séparation différentielle locale

Texte visé. Remarque 7.2.3, p. 160, `courants-trop.tex`, lignes 639–651.

Un espace tropical de niveau trois. Fixons $(K, G) = (\mathbf{Q}, \mathbf{R})$. Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Soit M le quotient de $\mathbf{R}_t \times \mathbb{T}^2_z$ par l'action $k \cdot (t, z) = (t + k, A^k z)$ de $\mathbf{Z}$. Il s'obtient par un recollement fermé des bouts d'un cylindre compact, donc M est compact séparé. Les petits ouverts produits, aussi au passage des bouts, donnent une base d'ouverts dénombrables à l'infini et des coordonnées locales (t, z) relevées dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$. Leurs changements de coordonnées sont $(t, z) \mapsto (t + k, A^k z + m)$, avec $k \in \mathbf{Z}$ et $m \in \mathbf{Z}^2$.

Prenons pour domaines les parties paralinéaires de cet atlas affine auxiliaire de dimension trois. Elles sont localement fermées, comprennent les ouverts et sont stables par intersection. Pour la reconnaissance des domaines, au voisinage d'un point, un témoin fini du G-recouvrement permet de se ramener à une réunion finie de domaines qui contiennent ce point. On rétrécit pour que ces domaines y soient fermés et on réunit leurs présentations cellulaires. Pour obtenir

les voisinages domaniaux compacts, coupons ces présentations par des boîtes polyédrales compactes dans les cartes et les ouverts de fermeture relative.

Dans les coordonnées produits, les fonctions affines retenues sont les fonctions qui sont localement, pour la topologie ordinaire du domaine, de la forme $a \cdot z + c$, avec $a \in \mathbf{Q}^2$ et $c \in \mathbf{R}$. Cette classe est invariante par les changements de coordonnées. Prenons pour fonctions paralinéaires les fonctions continues qui ont ces formes G-localement. Un témoin fini par des morceaux fermés près du point assure la continuité du recollement, et son raffinement par les pièces affines en donne la paralinéarité. Restrictions et opérations sur les sections se font par intersections des morceaux. Les fonctions affines forment un faisceau ordinaire sur tout domaine, et leur G-localisation est le G-faisceau paralinéaire, ce qui vérifie l'affinage.

Sur un domaine compact, la compacité et les témoins finis du G-recouvrement permettent de choisir un recouvrement fini par cellules compactes sur lesquelles un uplet f de fonctions paralinéaires s'écrit $Bz + c$, avec B rationnelle. En effet, au voisinage de chaque point on prend un témoin commun aux composantes de f, puis on coupe ses morceaux, fermés près du point, par un voisinage domanial compact. Les images des cellules sont des polyèdres compacts, et leur réunion finie donne l'image compacte de f. Pour la composition avec une fonction paralinéaire sur le sous-espace d'arrivée, on subdivise les pièces affines par les images réciproques des pièces d'affinité de cette fonction. La composition y est de nouveau affine en z. L'image réciproque d'un sous-espace paralinéaire d'arrivée est localement fermée et se décrit sur chaque pièce par des images réciproques affines de cellules. La reconnaissance par G-recouvrement en fait un domaine. Ces vérifications donnent les axiomes paralinéaires malgré l'absence de la coordonnée t parmi les fonctions numériques admises.

Une cellule de l'atlas auxiliaire est transverse si la projection $(t, z) \mapsto z$ est injective sur son enveloppe affine. Elle est alors fidèlement paralinéaire pour le G-faisceau construit. La projection est une carte affine ambiante, identifie la cellule à une cellule de $\mathbf{R}^2$, et transporte les traces de domaines et les restrictions de fonctions ambiantes en traces et fonctions paralinéaires. Prenons pour squelettes élémentaires d'un domaine ses parties fermées qui admettent localement une présentation par un nombre fini de cellules transverses. La transversité se conserve par restriction aux sous-cellules et est invariante par les changements de coordonnées. Les intersections avec des domaines préservent la propriété. Une réunion finie de squelettes élémentaires de domaines fermés est fermée et un raffinement cellulaire commun la présente encore par des sous-cellules transverses. Cela vérifie les axiomes des squelettes élémentaires. Les squelettes généraux obtenus G-localement ont dimension au plus deux.

Pour la richesse, sur chaque cellule compacte C de la présentation précédente, l'application affine $f = Bz + c$ possède des sections affines sur un recouvrement fini de $f(C)$ par polyèdres compacts. En coordonnées affines rationnelles sur les directions, on écrit $f(y, w) = y$. Une fibre compacte non vide en w possède un sommet dont les contraintes actives engendrent la direction des variables w. Les bases de contraintes possibles donnent un nombre fini de sommets affines candidats. Leurs ensembles d'admissibilité polyédraux fermés, intersectés avec $f(C)$, couvrent l'image, et s'il n'y a aucune variable w on prend la base vide. Leurs images par les sections sont des cellules compactes où f est injective sur l'enveloppe affine. Comme f se factorise par z, ces cellules sont transverses. Leur réunion finie, sur toutes les cellules C, est un squelette compact qui réalise l'image de la carte.

La dimension tropicale locale est deux. Les images de cartes compactes ont dimension au plus deux par la présentation finie, tandis que la projection z sur une boîte compacte autour de chaque point atteint deux. La dimension globale, calculée sur les domaines compacts selon n° 103, est donc deux. Au niveau trois, le lieu de variation maximale est vide. Sur chaque squelette, l'idéal de dimension I_3 contient 1, le volume standard est nul et le module de calibrage est nul. Son unique calibrage est strictement positif au sens du quotient, puisque la classe nulle a le représentant positif 1 et le volume nul s'envoie sur l'unité $1 = 0$ du quotient. Les restrictions sont compatibles. En prenant M tout entier comme bord désigné,

les conditions intérieures y sont vacantes. Les traces du bord désigné et des bords relatifs des domaines sont portées par des squelettes de dimension au plus deux et sont donc 3-négligeables.

Posons $X = M \sqcup \mathbf{R}^3$, avec sur $\mathbf{R}^3$ la structure paralinéaire et affine standard, les squelettes paralinéaires et le calibrage unitaire. Les compacts et leurs images se décomposent par composantes, comme les structures, la richesse et les vérifications des axiomes. Le bord de X est M, ouvert et fermé, et l'intérieur est $\mathbf{R}^3$. Les coordonnées standard assurent la séparation différentielle intérieure. Les restrictions affines ont des prolongements locaux, et les domaines se décrivent localement à l'aide d'inégalités affines, ce qui donne les deux conditions de décence. Un squelette compact est contenu dans une boîte de dimension pure trois. Le calibrage constant transporté par les cartes affines de rang trois donne des contributions opposées sur les faces intérieures, et le lieu de niveau trois est vide pour une carte de rang inférieur. Cela donne l'harmonie. Les bords relatifs des domaines de la composante standard ont dimension au plus deux. Avec le calcul sur M, ces faits vérifient les deux conditions de négligeabilité. Le niveau et la dimension tropicale globale corrigée de X valent trois.

Formes ordinaires sur M. Toute forme lisse ordinaire de type $(1,1)$ est, dans un ouvert produit, de la forme $\sum_{i,j} B_{ij}(z)\, d'z_i \wedge d''z_j$. En effet, les cartes affines sont localement affines en z, et la projection z est elle-même une carte affine. Une tranche transverse de dimension deux, qui est un domaine fidèle, détecte tous ces coefficients. Ainsi la matrice est bien définie sur les formes. Sur le revêtement, elle est indépendante de t par connexité de chaque droite verticale et elle est périodique en z. Le recollement impose

$$B(z) = A^{\mathsf{T}} B(Az) A.$$

Les fonctions lisses ordinaires sont de même localement indépendantes de t, d'où l'échec de la séparation différentielle locale le long d'un segment vertical de M.

L'involution J agit sur les $(1,1)$-formes par transposition de B. Une forme positive a une matrice symétrique positive semi-définie, comme on le vérifie sur les tranches de dimension deux. Soient u, v des vecteurs propres de A pour $\lambda_+ > 1$ et $0 < \lambda_- < 1$. Pour $k \geq 0$, la relation de recollement donne

$$u^{\mathsf{T}} B(A^{-k} z) u = \lambda_+^{2k}\, u^{\mathsf{T}} B(z) u, \qquad v^{\mathsf{T}} B(A^{k} z) v = \lambda_-^{-2k}\, v^{\mathsf{T}} B(z) v.$$

Les matrices sont bornées sur le tore compact. Les deux termes diagonaux dans la base u, v sont donc nuls et l'inégalité de Cauchy–Schwarz pour la matrice positive annule leur terme mixte. Toute forme ordinaire positive de type $(1,1)$ sur M est nulle.

Deux courants opposés. La matrice symétrique $Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie $A^{\mathsf{T}} Q A = Q$ et $Q^2 = 5I$. La forme à matrice constante Q descend en une forme ordinaire symétrique ω_Q sur M, qui est non nulle par détection transverse. Prolongeons-la par zéro sur la composante ouverte et fermée $\mathbf{R}^3$. C'est une forme lisse à support compact. Pour une forme test α de type $(1,1)$ sur X, notons B_α sa matrice sur M et posons

$$T(\alpha) = \frac{1}{10} \operatorname{tr}\big(Q B_\alpha(0)\big)$$

aux coordonnées transverses du point représenté par $(0,0)$.

Pour la continuité, fixons un étage de la topologie des tests, c'est-à-dire une famille de cartes affines ordinaires et un compact de support. Une de ces cartes g est définie sur un domaine qui contient un voisinage ordinaire du point choisi. Sur une petite boîte compacte C dans ce voisinage, elle s'écrit $g = Lz + c$, après rétrécissement. Si H est la matrice tangentielle en $g(0,0)$ du coefficient ordinaire de la forme sur $g(C)$, alors $B_\alpha(0) = L_0^{\mathsf{T}} H L_0$, où L_0 est

L exprimée dans la direction de l'enveloppe affine de $g(C)$. Cette formule ne requiert que des vecteurs tangents à l'image compacte. Elle donne une constante C_g telle que $|T(\alpha)| \leq C_g N_{g(C),0}(\alpha_{g(C)})$, pour la semi-norme d'ordre zéro de cet étage. Si le point est hors du compact de support, la valeur est nulle. La propriété finale de la topologie localement convexe donne donc un courant d'ordre zéro.

La symétrie de Q donne $T(J\alpha) = T(\alpha)$. Les tests positifs ordinaires se restreignent à zéro sur M, de sorte que T et $-T$ leur donnent tous deux la valeur zéro. Les deux courants sont donc positifs, mais $T(\omega_Q) = \mathrm{tr}(Q^2)/10 = 1$. La formule agit sur les coefficients des tests. Le support des courants de faisceau requiert la séparation différentielle locale.

Énoncé corrigé et preuve. Supposons de plus que X soit localement différentiellement séparé. Alors, pour les courants ordinaires de bidimension (p,p), la positivité de T et de $-T$ implique $T = 0$.

Soit ω une forme lisse ordinaire symétrique de type (p,p), de support compact S. Près de chaque point de S, choisissons une présentation affine ordinaire de ω, puis un voisinage domanial compact dans cette présentation. Sur l'image compacte P, la forme des coefficients possède un représentant lisse ambiant près de P. Une partition lisse ambiante recolle un nombre fini de représentants locaux. Symétrisons ce représentant par J. Avec $\sigma_p = (-1)^{p(p-1)/2}$, sa matrice (a_{IJ}) dans la convention $\sigma_p\, d'x_I \wedge d''x_J$ est symétrique, et la positivité ordinaire correspond à la semi-définie positivité. Notons Ω_p la forme de matrice identité dans cette convention. Prenons $c > 0$ plus grand que la norme de la matrice sur P. Alors la forme augmentée de $c\Omega_p$ et $c\Omega_p$ sont positives sur P et leur différence est la forme initiale. On tire en arrière sur l'intérieur du voisinage domanial. Pour $p = 0$, le calcul est scalaire. Au-delà de la dimension ambiante, le module est nul.

Pour un point x de cet intérieur, choisissons un voisinage compact K de x dans un ouvert différentiellement séparé contenu dans l'intérieur. Pour chaque point du bord topologique de K, composons une fonction lisse qui le sépare de x avec une fonction lisse scalaire non négative, afin d'obtenir un près de x et zéro près de ce point. Un nombre fini de ces voisinages couvre le bord. Le produit des fonctions est égal à un près de x et nul près du bord. Sa restriction à K se prolonge par zéro en une fonction lisse à support compact dans l'ouvert prescrit.

Choisissons un nombre fini de ces fonctions b_i subordonnées aux présentations positives et égales à un sur des voisinages qui couvrent S. Alors $b = \sum_i b_i \geq 1$ près de S. Soit h une fonction lisse non négative, nulle près de zéro et égale à $1/t$ pour $t \geq 1/2$. Les fonctions $\theta_i = h(b)b_i$ ont leurs supports compacts dans les ouverts correspondants et leur somme vaut un près de S. Multiplions les deux formes positives locales par θ_i, prolongeons par zéro et sommons. On obtient deux formes positives lisses à support compact dont la différence est ω. Pour S vide, les deux formes peuvent être nulles.

Pour un test compact η, T annule la partie antisymétrique $(\eta - J\eta)/2$. La partie symétrique $(\eta + J\eta)/2$ est la différence de deux formes positives compactes. Les deux positivités imposent que T annule chaque terme positif. Ainsi $T(\eta) = 0$, donc $T = 0$.

179. Symétrie du courant testé par des formes positives

Texte visé. Lemme 7.2.5, p. 161.

`courants-trop.tex`, lignes 695–724.

Correction. Supposer T symétrique de bidimension (p,p). La partition de l'unité finie sur le support du test convertit alors l'hypothèse locale en non-négativité sur le cône de tests de la positivité considérée.

Sur $\mathbb{R}^2$, pour $\alpha = \sum a_{ij} d'x_i \wedge d''x_j$, le courant $T(\alpha) = a_{12}(0) - a_{21}(0)$ est d'ordre zéro. L'involution transpose la matrice et donne $JT = -T$. Les formes des trois cônes positifs, multipliées par une coupure scalaire, sont symétriques et donnent donc toutes zéro. Ce courant non nul est antisymétrique, ce qui exclut chacune des trois positivités.

180. Prolongement d'un courant positif sur les tests continus

Texte visé. Proposition 7.2.8, p. 162, `courants-trop.tex`, lignes 793–795.

Sur la droite tropicale usuelle, les translatées à l'infini d'une fonction lisse positive à support compact et d'intégrale 1 tendent vers zéro uniformément sur chaque compact. Le courant positif donné par Lebesgue leur donne toujours la valeur 1. L'estimation imprimée ne donne donc de continuité uniforme que sur les tests de support contenu dans un compact fixé.

Preuve corrigée. Sous l'hypothèse de séparation différentielle locale, pour chaque compact K, choisissons une coupure lisse compacte $\lambda \geq 0$ égale à 1 près de K. La positivité du courant S de bidimension $(0,0)$ donne

$$|S(h)| \leq S(\lambda) \|h\|_{\infty,K}$$

pour les tests lisses h à support dans K. Pour un test continu compact, plaçons son support dans un ouvert relativement compact, puis prenons des approximants lisses à support dans l'adhérence compacte de cet ouvert, qui convergent uniformément. Le théorème d'approximation à support contrôlé donne aussi des approximants non négatifs pour un test non négatif. L'estimation assure l'existence de la limite. Pour deux choix, appliquons-la au compact réunion des supports fixés. Cela donne l'indépendance des choix et la linéarité par le même passage à la limite.

Le prolongement positif définit une mesure de Radon par le théorème de représentation de Riesz. La même approximation donne l'unicité. Inversement, une mesure positive agit à l'ordre zéro sur chaque étage de tests, par la borne $\mu(K)\|h\|_{\infty,K}$ et la majoration de la norme uniforme par les semi-normes de cartes sur un nombre fini de morceaux compacts. La continuité de l'application des mesures vagues vers les courants résulte des évaluations sur les tests lisses compacts.

181. Courant associé à une fonction localement intégrable

Texte visé. Corollaire 7.2.10, p. 163, `courants-trop.tex`, lignes 859–862.

Sur l'intervalle paralinéaire standard $[0,1]$ au niveau 1, prenons l'affinage usuel et les extrémités comme bord tropical. Le poids $m(t) = 1/t$ pour $t > 0$ et $m(0) = 1$ donne un calibrage borélien strictement positif par restriction à toutes les parties squelettiques. Sur l'intérieur, les deux directions dans chaque carte affine ont le même poids au point et des orientations sortantes opposées. L'harmonie est donc satisfaite. Les extrémités et les bords relatifs des domaines ont des traces de dimension zéro. La coordonnée donne la séparation différentielle, les germes affines s'étendent, les domaines se décrivent par des inégalités et les squelettes compacts s'agrandissent en intervalles purs. Les images compactes, les squelettes maximaux et la richesse sont ceux de l'intervalle usuel.

La fonction $u = 1$ est localement intégrable sur les cellules squelettiques, mais l'intégrale contre la forme supérieure unitaire à support compact est infinie. Même avec $u(t) = m(t) = t^{-1/2}$ pour $t > 0$, tous deux égaux à 1 en zéro, les deux tests non pondérés sont finis et l'intégrale pondérée diverge.

Correction. Pour le résultat valable pour toute fonction u localement intégrable, supposer les poids boréliens et localement essentiellement bornés sur les cellules fermées de dimension n. Pour un u fixé, il suffit que le produit de u et du poids soit localement intégrable sur ces cellules. Fixons un étage de cartes ordinaires et un compact de support des tests. Prenons

un nombre fini de morceaux compacts pointés de tropicalisation et une subdivision affine fermée du porteur fort. Sur chaque cellule de dimension n, la variation du produit de u et du poids est finie sur le morceau compact. L'intégrale de test est bornée par cette variation multipliée par une constante fois la semi-norme d'ordre zéro du coefficient de la forme sur l'image compacte de la carte. La somme finie donne la continuité d'ordre zéro sur l'étage, donc dans la topologie finale. Les représentants pour les mesures complétées donnent les mêmes intégrales, par absolue continuité sur les cellules. Pour $u \geq 0$, les cônes de positivité supérieure coïncident et le courant $[u]$ est fortement positif.

182. Convergence vague des mesures positives

Texte visé. Exemple 7.2.13, p. 163, `courants-trop.tex`, lignes 915–921.

Contre-exemple. Sur l'intervalle connexe $[0, 1]$, prenons les parties localement fermées comme domaines, les fonctions localement constantes comme fonctions paralinéaires et affines, avec les paramètres $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$. Les domaines admettent des voisinages compacts relatifs. Dans le recollement poncté, les morceaux passant par le point sont en nombre fini, ce qui donne un voisinage commun de constance. Les compositions et images réciproques exigées se ramènent à des fonctions localement constantes et les images de cartes compactes sont finies. Les ensembles finis sont des squelettes élémentaires, leurs coordonnées fidèles étant des étiquettes réelles distinctes, et satisfont les axiomes de trace et de réunion finie. Tout squelette est localement discret. Les images finies des cartes donnent la richesse. Au niveau un, les lieux maximaux sont vides et le calibrage nul sur les squelettes de dimension zéro se représente par le coefficient strictement positif un. Prenons le bord désigné égal à l'espace entier. L'intérieur est vide et les traces squelettiques sont un-négligeables. Toute fonction lisse scalaire est localement constante, donc constante sur l'intervalle. Son évaluation est continue pour les semi-normes d'ordre zéro des cartes compactes. Les masses δ_0 et δ_1 définissent ainsi le même courant, mais le test continu $t \mapsto t$ distingue leurs intégrales.

Correction. Supposer X localement différentiellement séparé. Pour un test continu compact h, fixons un ouvert relativement compact contenant son support et notons K son adhérence. Une coupure lisse compacte non négative, égale à un sur K, donne par convergence des courants une borne commune des masses positives $\mu_j(K)$ et $\mu(K)$. Approchons uniformément h par des tests lisses portés par ce même K. Pour chaque approximant, la convergence des intégrales vient de la convergence des courants. Pour h moins l'approximant, les deux erreurs sont majorées par la norme uniforme de la différence multipliée par la borne commune. On obtient la convergence vague.

183. Courant d'intégration et poids des cellules supérieures

Texte visé. §7.3.1, p. 164, `courants-trop.tex`, lignes 990–1001.

Contre-exemple. Munissons l'intervalle paralinéaire standard $[0, 1]$, au niveau un, du poids $m(t) = 1/t$ pour $t > 0$ et $m(0) = 1$. Les restrictions aux parties squelettiques sont compatibles et les poids sont boréliens et strictement positifs. Désignons les extrémités comme bord. L'intérieur usuel est très riche, décent et localement différentiellement séparé. Dans une carte affine de rang un, les deux directions d'un point intérieur ont des vecteurs opposés avec le même poids ponctuel, ce qui donne l'harmonie. Une carte constante a un lieu maximal vide. Les traces de bord sont de dimension zéro. La forme supérieure unitaire, lisse et à support compact, a une intégrale infinie.

Correction. Supposer les poids de calibrage boréliens et localement intégrables sur les cellules supérieures fermées. Pour un étage de cartes et un support compact fixés, choisissons un raffinement compact fini adapté aux cartes, puis un porteur fort commun formé des lieux maximaux fermés. Sur une subdivision affine finie, chaque coefficient du test est majoré par sa semi-norme d'ordre zéro de carte multipliée par une constante fixe de changement de

coordonnées. L’intégration de cette borne contre les poids sur les cellules puis la somme finie donnent directement la continuité d’ordre zéro. Au degré supérieur, les trois cônes de positivité coïncident et l’involution est l’identité, ce qui donne la positivité et la symétrie de δ_X.

184. Courant d’intégration de bord et traces du calibrage

Texte visé. §7.3.2, p. 164, `courants-trop.tex`, lignes 1006–1019.

Contre-exemple. Prenons le rectangle paralinéaire standard $[-1,1]\times[0,1]$, au niveau deux, avec son périmètre comme bord. Le poids vaut un sauf sur la base où il vaut $1/|x|$ si $x \neq 0$, et un à l’origine. Les poids boréliens strictement positifs sont compatibles par restriction. L’intérieur a la géométrie et l’harmonie usuelles et des agrandissements purs compacts dans chaque voisinage. Les traces des frontières de domaines et du bord désigné sont de dimension au plus un. La contraction de $d'x \wedge d''x \wedge d''y$ sur la base a pour densité absolue $|x|^{-1}|dx|$. Le côté supérieur a une contribution finie, les côtés verticaux une contribution nulle et la base ne reçoit qu’une contribution incidente. L’intégrale de bord diverge, bien que le poids soit égal à un presque partout pour la mesure de dimension deux.

Correction. Écrire $\langle \delta^{\partial}_X, \alpha\rangle = \int^{\partial}_X \alpha$ et garder l’intégrale de bord à la ligne 1013. Exiger des coefficients appariés boréliens et des traces de poids localement intégrables sur les faces fermées contributrices. Des poids boréliens localement bornés sur les cellules supérieures fermées suffisent. Sur un porteur fort compact commun, chaque contraction orientée et restriction de test est majorée par une semi-norme d’ordre zéro de carte avec un facteur fixe de coordonnées. L’intégration contre les poids de faces et la somme finie donnent le courant d’ordre zéro. Formons d’abord le volume de bord signé, puis restreignons-le aux ouverts ordinaires. L’harmonie annule sa restriction à l’intérieur, ce qui donne l’inclusion de support dans le bord.

185. Source squelettique d’une image directe

Texte visé. §7.3.3, p. 164, `courants-trop.tex`, lignes 1025–1028.

Conditions distinctes. Un intervalle squelettique ouvert de la droite paralinéaire standard muni du calibrage unitaire a une inclusion non propre. Même une inclusion squelettique fermée peut échouer à fournir une source tropicale. Sur la droite paralinéaire, prenons toutes les fonctions paralinéaires comme affines, le niveau deux et la droite entière comme bord. Elle est riche, son intérieur désigné est vide et ses traces sont de dimension au plus un. Le calibrage de niveau deux y est le calibrage nul, représenté par un coefficient strictement positif. La droite entière est un squelette fermé avec son calibrage unitaire de niveau un. Une structure tropicale de niveau un rendant l’inclusion affine devrait rendre $t \mapsto |t-a|$ affine pour chaque a. En tout point intérieur a, les deux directions transportées par cette carte sont sortantes avec des poids positifs, ce qui contredit l’harmonie. Prendre toute la droite comme bord au niveau un violerait la négligeabilité exigée de ses traces.

Correction. Munir la source squelettique d’une structure tropicale admissible de niveau m, vérifier que son inclusion est affine et propre et vérifier l’intégrabilité calibrée définissant ses courants. Le tiré en arrière ordinaire est continu à chaque ordre sur les étages de tests, dont les supports restent dans l’image réciproque compacte du support fixé. Par transposition on obtient les bidimensions (m,m) et $(m-1,m)$. La conservation des cônes de tests duaux par tiré en arrière donne la forte positivité de l’image directe du courant supérieur.

186. Intégrabilité pondérée dans l’appariement tensoriel

Texte visé. §7.3.5, p. 164, `courants-trop.tex`, lignes 1090–1094.

Contre-exemple. Sur l’intervalle tropical standard $[0,1]$ de niveau un, ses extrémités étant le bord, prenons le poids borélien m et le scalaire u égaux à $t^{-1/2}$ pour $t>0$ et à un à l’origine. Le calibrage strictement positif est compatible par restriction et harmonieux à l’intérieur, où les deux directions sont opposées et portent le même poids ponctuel. Les deux facteurs sont intégrables pour la longueur, tandis que le produit $um = 1/t$ hors de zéro ne l’est pas. Pour $\omega = 1$ le test supérieur unitaire a donc un appariement infini.

Correction. Pour tous les scalaires localement intégrables pour les mesures de référence des cellules supérieures, supposer les poids boréliens localement essentiellement bornés. Pour une entrée donnée, il suffit que le produit apparié soit localement intégrable pour les mesures pondérées des cellules supérieures. Dans chaque morceau du porteur compact commun, le coefficient du test est majoré par sa semi-norme d’ordre zéro de carte multipliée par une constante fixe. Intégrer cette borne contre la valeur absolue du produit pondéré puis sommer les morceaux donne la continuité d’ordre zéro. L’absolue continuité des mesures pondérées sur les cellules rend la valeur indépendante du représentant pour la mesure de référence complétée.

187. Recollement ordinaire des appariements d’intégration

Texte visé. §7.3.5, p. 165, `courants-trop.tex`, lignes 1095–1099.

Contre-exemple. Sur la droite tropicale standard de poids unitaire, prenons $u = \omega = 1$. L’intégration sur la droite et l’intégration directe sur le domaine fermé $[0,\infty)$ donnent des germes distincts à zéro. Dans tout voisinage ordinaire de zéro, un test supérieur lisse compact non négatif d’intégrale strictement positive, porté du côté négatif, distingue les deux courants. La fibre en zéro du faisceau image inverse est la fibre ordinaire, puisque tout raffinement de recouvrement poncté a un membre passant par zéro. La restriction du premier courant dans ce faisceau garde donc le premier germe. L’unité d’adjonction utilisée dans le texte est valide. Elle repose sur le recollement ordinaire des représentants d’une famille ponctée finie après rétrécissement. La compatibilité nécessaire du morphisme proposé sur les domaines G échoue déjà dans cet exemple.

Correction. Sur un ouvert ordinaire, pour un support de test compact, choisissons un recouvrement fini par des morceaux de domaines compacts portant des présentations tensorielles dont les produits pondérés sont localement intégrables. Chaque test fixé donne sur ces morceaux des mesures signées finies. Elles coïncident sur les intersections comme mesures, par restriction de la mesure supérieure et par équilibrage du produit tensoriel sur les scalaires lisses. Rendons les morceaux disjoints en retranchant de chacun la réunion de ses prédécesseurs et sommons les intégrales sur ces différences boréliennes. L’égalité des traces et un raffinement commun fini donnent l’indépendance de l’ordre, des présentations et du recouvrement. Les estimations sur les coefficients des tests compacts donnent l’ordre zéro. La restriction aux ouverts ordinaires commute à cet appariement et fournit l’application vers $\mathscr{D}_{n-p,n-q}$ là où le faisceau ordinaire des courants est défini.

188. Traces scalaires pour l’appariement de bord

Texte visé. §7.3.5, p. 165, `courants-trop.tex`, lignes 1137–1138.

Obstructions. Sur l’intervalle tropical standard de poids unitaire, l’indicatrice de l’extrémité gauche et zéro définissent la même classe pour la mesure supérieure de référence. Leurs appariements de bord avec $d''t$ diffèrent, car la contribution orientée de cette extrémité est non nulle. Sur le rectangle standard $[-1,1]\times[0,1]$ de poids unitaire, donnons au scalaire la

valeur $1/|x|$ sur la base pour $x \neq 0$, et zéro ailleurs. Il est encore nul pour la mesure supérieure de référence. Son intégrale absolue sur la face inférieure pour le test $d'x \wedge d''x \wedge d''y$ est infinie.

Correction. Sur un porteur fixé, spécifier des traces scalaires boréliennes localement intégrables pour les variations pondérées des faces fermées contributrices. Comparer les représentants pour les mesures de ces faces. Après subdivision compacte finie, chaque contribution est majorée par la semi-norme d'ordre zéro du test, multipliée par un facteur fixe de coordonnées et par l'intégrale absolue de la trace pour la variation pondérée. La somme finie donne un appariement d'ordre zéro. Sur un ouvert ordinaire, restreindre le volume de bord ambiant déjà formé, puis employer les traces sur ce porteur. Cet énoncé donne les appariements sur porteur fixé et sur les ouverts ordinaires correspondants.

189. Ensembles exceptionnels pour la détection squelettique

Texte visé. Proposition 7.3.6(a), p. 165. `courants-trop.tex`, lignes 1205–1211.

Contre-exemple. Sur l'intervalle tropical usuel $[0,1]$ de niveau un, avec poids unitaire et extrémités au bord, prenons la forme supérieure dont le coefficient est l'indicatrice de $\mathbf{Q} \cap (0,1)$. Son courant est nul, puisque l'ensemble indiqué est de mesure de Lebesgue nulle. Sur le squelette constitué par tout l'intervalle, les points où la forme est non nulle sont denses dans l'intérieur. Ils ne sont contenus dans aucun sous-espace paralinéaire de dimension zéro, qui est discret en chacun de ses points. Avec le signe opposé, les mêmes points contredisent la version imprimée pour les cônes de positivité.

Correction. Sous les hypothèses de coefficients appariés boréliens et de variation appariée localement finie, prendre comme ensemble exceptionnel un ensemble nul pour la mesure de Lebesgue complétée de dimension n sur les cellules squelettiques supérieures. Tester l'ensemble des points où la propriété échoue. Sur un morceau affine compact, des tests scalaires lisses compacts détectent chaque coefficient à l'aide d'une base complémentaire finie, ou d'une famille dénombrable dense du cône dual approprié en présence de positivité. Pour la positivité du courant, appliquer aussi le test de nullité à $J\omega - \omega$ pour obtenir la symétrie presque partout. Les poids strictement positifs donnent la même notion de « presque partout » que la mesure de référence. Réciproquement, l'intégration sur un raffinement compact fini transmet ces propriétés au courant. n° 190 corrige séparément l'emploi d'un ensemble défini par des voisinages dans la preuve.

190. Ensemble exceptionnel défini point par point

Texte visé. Preuve de la proposition 7.3.6, p. 165.

`courants-trop.tex`, lignes 1232–1234.

Correction. Pour les coefficients boréliens, prendre l'ensemble des points où la condition voulue sur les coefficients ou la positivité échoue. Sur chaque cellule, tester les coefficients contre une base finie de formes complémentaires, ou contre une famille dénombrable dense dans le cône de formes tests positives approprié. Les tests scalaires lisses à support compact établissent la nullité ou la positivité presque partout sur cette cellule. La réunion des ensembles exceptionnels de ces tests reste de mesure nulle. Cette correction porte sur l'étape de mesure cellule par cellule.

191. Tests compacts et poids des feuilles affines

Texte visé. Proposition 7.3.6, p. 166, `courants-trop.tex`, lignes 1247–1278.

Deux copies disjointes de l'intervalle tropical compact de poids unitaire peuvent avoir la même image par leurs coordonnées. Le tiré en arrière d'un test porté dans l'intérieur de cette

image donne alors deux contributions, même si les bords ont tous pour images les extrémités. L’injectivité sur une cellule choisie ne donne donc pas à elle seule la formule à une feuille.

Correction. Prenons un raffinement compact poncté commun des coordonnées fidèles et des coordonnées qui tropicalisent la forme. Écartons les traces de bord de mesure supérieure nulle. Sur une cellule squelettique de dimension n, l’intérieur relatif permet de choisir un voisinage ordinaire évitant les autres cellules fermées du porteur et les faces propres. Une coupure lisse compacte non négative dans ce voisinage vaut un près du point. Utilisons les coordonnées affines injectives de la cellule pour le test complémentaire et multiplions le tiré en arrière par la coupure, puis prolongeons par zéro sur l’espace. Le produit est porté par le porteur fort de la carte commune et seule la cellule choisie contribue. L’appariement sur un voisinage plus petit détecte alors les coefficients avec le véritable poids positif de la cellule.

On peut aussi garder la carte affine conjointe et subdiviser son image compacte en cellules adaptées. Testons près d’un point intérieur d’une cellule cible, avec une coupure ordinaire ambiante. Les feuilles supérieures qui contribuent ont le même coefficient apparié dans les coordonnées conjointes. Sommons leurs poids transportés multipliés par les coupures. Cette somme est strictement positive là où la coupure de la feuille choisie l’est. La variation localement finie et l’approximation lisse à support contrôlé donnent la même détection presque partout. Ces deux preuves utilisent les traces de bord sur les porteurs.

192. Masse totale d’une forme supérieure positive

Texte visé. Corollaire 7.3.7, p. 166, `courants-trop.tex`, lignes 1326–1329.

Correction. Supposer les coefficients appariés boréliens et la variation supérieure localement finie. Des poids de calibrage boréliens localement intégrables sur les cellules supérieures fermées suffisent pour les coefficients continus de l’énoncé. Le support compact donne une mesure positive finie. Si sa masse totale vaut zéro, son intégrale contre tout test scalaire lisse compact est nulle. Le courant est donc nul. La détection à coefficients continus sur un porteur fort pur donne alors $\omega = 0$. Toute forme positive non nulle a ainsi une masse strictement positive.

Lorsque seule une mesure borélienne positive de masse éventuellement infinie est définie, la détection sur les cellules supérieures, avec des poids strictement positifs, donne encore une masse strictement positive au sens étendu. La finitude exige l’hypothèse supplémentaire. Sur l’intervalle tropical compact standard $[0,1]$, avec ses extrémités au bord, le poids $1/t$ pour $t>0$ et un en zéro est borélien et harmonieux à l’intérieur. La forme supérieure unitaire a une masse infinie.

193. Convergence dominée des courants associés aux scalaires

Texte visé. Lemme 7.3.14, p. 168, `courants-trop.tex`, lignes 1642–1665.

Contre-exemple. Sur l’intervalle tropical standard $[0,1]$, avec ses extrémités au bord, posons $U = X$ et prenons le poids $m(t) = t^{-1/2}$ pour $t>0$, prolongé par un en zéro. Le calibrage est borélien, strictement positif, compatible par restriction et harmonieux dans l’intérieur, où les directions opposées ont le même poids ponctuel. Les fonctions $u_j = \sqrt{j}\,\mathbf{1}_{(0,1/j]}$ tendent vers zéro partout et sont dominées par $v = m$, qui est intégrable pour la longueur. Les u_j sont bornées pour chaque j et le poids est intégrable, donc leurs courants existent. Le test supérieur unitaire donne pourtant

$$\sqrt{j}\int_0^{1/j} t^{-1/2}\,dt = 2$$

pour tout j.

Correction. Demander que v soit intégrable pour la variation de chaque mesure de test supérieur lisse compact α_{Rad}. Des poids boréliens localement essentiellement bornés suffisent si v est localement intégrable pour les mesures de référence. Plus généralement l'intégrabilité locale pondérée du dominateur sur les cellules supérieures donne les estimations d'ordre zéro sur les étages de cartes, en multipliant ses intégrales par les bornes des coefficients des tests. L'hypothèse de rang place chaque support de test supérieur dans U. Le théorème de restriction, avec les indices complémentaires appropriés, ramène l'évaluation à cet ouvert. Avec les représentants pour les mesures complétées, la convergence dominée contre $|\alpha_{\mathrm{Rad}}|$ donne $\langle [u_j], \alpha\rangle \to \langle [u], \alpha\rangle$ pour tout test, soit la convergence simple des courants.

194. Positivité de formes à coefficients tropicaux continus

Texte visé. Lemme 7.4.1, p. 169.

`courants-trop.tex`, lignes 1711–1741.

Correction. Exiger la continuité tropicale des coefficients. Sur chaque cellule d'une subdivision commune à la forme et au domaine, la positivité est acquise sur les morceaux d'intérieur de dimension pleine. La continuité des coefficients et la fermeture du cône positif étendent la propriété aux points restants.

Sur $X = \mathbb{R}$ et $V = \{0\}$, la forme borélienne $-\mathbf{1}_{\{0\}} d'x \wedge d''x$ s'annule sur $X \setminus V$ et sa restriction tangentielle à V est nulle. Mais son coefficient à l'origine est négatif dans la carte entière.

195. Positivité des mesures de courants et traces sur les domaines G

Texte visé. Proposition 7.4.5, p. 171, `courants-trop.tex`, lignes 1911–1928.

Contre-exemple. Sur le plan tropical standard de poids unitaire, le courant $T(\beta) = \beta_{11}(0)$ est positif, symétrique et d'ordre zéro. La positivité vient du coefficient diagonal d'une matrice positive et l'évaluation est bornée par la semi-norme d'ordre zéro d'une carte compacte autour de l'origine. Sur le domaine fermé $V = \{x = 0\}$, la forme lisse ambiante $-\rho\, d'x \wedge d''x$, avec ρ lisse compacte non négative et égale à un près de zéro, se restreint tangentiellement à la forme nulle. La mesure ambiante associée a pourtant pour trace $-\delta_0$ sur V. Le prolongement ambiant nul donne la mesure nulle.

Correction. Écrire que T a bidimension (p, p). Sur un ouvert ordinaire, pour une forme lisse ordinaire positive ω, évaluons $T(u\omega)$ sur les scalaires lisses compacts u non négatifs. Une coupure lisse compacte égale à un près d'un support de tests fixé donne une borne de ce fonctionnel positif par la norme uniforme. L'approximation à support contrôlé le prolonge à une mesure de Radon positive. En degré de test zéro, sur un domaine G, on peut multiplier la trace effective de la mesure de Radon par le scalaire continu intrinsèque. En degré supérieur, il faut une construction indépendante de l'appariement de trace, compatible avec les restrictions et positive. Un résultat de tangence qui vérifie ces propriétés suffit.

196. Estimation positive après symétrisation

Texte visé. Corollaire 7.4.6, p. 172, `courants-trop.tex`, lignes 1987–1990.

Sur le carré affine, $d'x \wedge d''y - d'y \wedge d''x$ antisymétrique conserve sa partie antisymétrique après addition de tout multiple du tenseur euclidien symétrique. La somme n'appartient donc pas au cône des formes positives.

Correction. Le courant symétrique a le même appariement avec un test α qu'avec $(\alpha + J\alpha)/2$. Sur une cellule affine compacte fixée, majorons les deux signes de cette partie symétrique par un multiple de la semi-norme d'ordre zéro fois la référence positive euclidienne η^p. Sur les cellules de dimension inférieure à p, les deux tenseurs s'annulent. Tirons en arrière et

multiplions par les termes non négatifs d’une partition lisse compacte finie adaptée aux cartes. L’évaluation des majorants par le courant donne l’estimation d’ordre zéro sur l’étage ordinaire initial.

Sur un étage G, supposons déjà construit un appariement de trace compatible et positif, qui annule la partie antisymétrique. Recouvrons le support fixé par des morceaux compacts de cartes. L’inclusion-exclusion ramène la masse à celles des intersections compactes. Sur chacune, la même comparaison majore la valeur absolue par la semi-norme d’ordre zéro des coefficients multipliée par une constante et par la masse finie de la référence positive. Ceci vaut notamment pour l’action compacte analytique avec ses hypothèses de tangence vérifiées.

197. Produit d’un courant par une forme G-lisse

Texte visé. §§7.4.7–7.4.9, p. 172, `courants-trop.tex`, lignes 2011–2038.

Obstruction. Sur le plan tropical standard, prenons le courant atomique positif $T(\beta) = \beta_{11}(0)$. Sur les tests G-lisses compacts de type $(1,1)$, deux fonctionnels prennent le coefficient à l’origine du tiré en arrière par chacune des demi-droites $t \mapsto (\pm t, 0)$, $t \geq 0$. Une famille ponctée de morceaux compacts contient un morceau portant un segment initial de la demi-droite considérée. Les coordonnées paralinéaires y sont affines après rétrécissement. Les évaluations sont donc linéaires, positives et bornées par les semi-normes d’ordre zéro des cartes sur chaque étage. Sur les tests lisses ordinaires elles coïncident, car les deux signes se compensent dans les deux blocs extérieurs. Sur le demi-plan droit, prenons $\rho\, d'x \wedge d''x$, avec ρ lisse compacte non négative égale à un près de l’origine. Sur le demi-plan gauche, prenons zéro. Le recouvrement fermé donne une forme G-lisse, car la restriction tangentielle du terme normal sur l’axe commun est nulle. Les deux fonctionnels donnent respectivement un et zéro.

Correction. Pour un multiplicateur lisse ordinaire fixé, l’action sur les produits tests est continue à l’ordre du courant par raffinement compact commun des cartes. Un multiplicateur diagonal fortement positif donne un courant positif par la règle du produit des cônes. Pour un multiplicateur G-lisse, exiger une action compatible déjà vérifiée sur les produits tests compacts de degré complémentaire. La positivité du produit demande la positivité et la symétrie de cette action. Pour étendre par différence locale de courants positifs, demander aussi l’additivité en le courant. Deux écritures de la même différence donnent alors la même évaluation en comparant les sommes positives croisées. L’action compacte pour les courants positifs fermés analytiques satisfait ces propriétés sous ses hypothèses propres de cartes et de tangence.

198. Cellules intrinsèques des porteurs squelettiques

Texte visé. Proposition 7.5.7, p. 174, `courants-trop.tex`, lignes 2391–2393.

Exemple. Sur le plan tropical standard de niveau deux, le courant d’intégration sur l’axe horizontal muni du poids unitaire est squelettique de dimension un. Les cartes $f = g = x$ et $h = (x, x)$ sont affines injectives sur cet axe, mais leurs lieux de rang deux ambiant sont vides. Les cellules définies par le plein rang ambiant ne peuvent donc recouvrir le porteur, bien que celui-ci ait des cellules intrinsèques de dimension un.

Correction. Subdiviser localement le porteur fermé pur commun en cellules affines intrinsèques compactes de dimension p sur lesquelles f et h sont affines injectives. Adapter la subdivision aux deux supports et aux calibrages prolongés par zéro, constants sur les cellules. Dans un ouvert isolant un intérieur de cellule, tester par le tiré en arrière suivant f d’une forme supérieure constante, multiplié par une coupure lisse compacte non négative d’intégrale strictement positive. Les deux descriptions réduites donnent le même facteur d’intégration avec leurs coefficients constants. Leur égalité identifie ces coefficients, y compris pour des calibrages signés.

199. Isolement d'une cellule dans le porteur réduit

Texte visé. Proposition 7.5.7, pp. 174–175.

`courants-trop.tex`, lignes 2399–2409.

Contre-exemple. Dans le plan tropical standard, prenons la somme des courants d'intégration de poids unitaire sur les droites horizontales de hauteurs zéro et un. Pour la carte $f = x$ et la cellule $C = [0,1] \times \{0\}$, le rectangle

$$V = (0,1) \times (-1/4, 5/4)$$

vérifie $V \cap C = C^\circ$ et rencontre l'autre droite. Un test $\rho\, d'x \wedge d''x$, avec ρ lisse compacte non négative dans V et positive sur un intervalle de chacune des deux droites, donne deux contributions positives.

Correction. Dans la comparaison de rang f, posons $P = P_f \cup P_h^{(f)}$. Pour une cellule compacte adaptée C dont l'intérieur relatif est ouvert dans P, choisissons l'ouvert ordinaire V tel que $V \cap P = C^\circ$. On peut aussi isoler dans P un voisinage ordinaire plus petit autour du support compact du test dans cet intérieur. La description locale pour les tests de f ne voit alors que cette cellule. Le poids de la contribution de P_f y vaut zéro si cette contribution est absente.

200. Tests ordinaires communs après réduction de rang

Texte visé. Proposition 7.5.7, p. 175, `courants-trop.tex`, lignes 2411–2417.

Contre-exemple. Dans le plan tropical standard, prenons le courant d'intégration sur les deux axes de poids unitaire, avec $f = x$ et $h = (x, y)$. Seul l'axe horizontal subsiste dans le porteur réduit pour f. L'ouvert $(-1,1)^2$ isole l'intérieur de la cellule horizontale $[-1,1] \times \{0\}$ dans ce porteur et rencontre aussi l'axe vertical. Une coupure lisse compacte non négative dans l'ouvert, positive sur un intervalle vertical, multipliée par $d'y \wedge d''y$, donne une évaluation positive. La cellule horizontale seule donne zéro sur ce test de la carte h.

Correction. Comparer les descriptions sur les tests ordinaires compacts communs $\rho f^* \alpha$, avec α constante de type (p,p) de restriction non nulle à l'image de la cellule isolée. Comme $h = (f, g)$, le test s'écrit aussi $\rho h^* q^* \alpha$ pour la projection q sur les coordonnées de f. Sur les cellules de rang f inférieur à p, le tiré en arrière est nul en degré supérieur. Les deux évaluations se réduisent donc à la cellule isolée. Par l'isomorphisme affine de $h(C)$ avec $f(C)$, transportons les poids dans le même repère. Choisissons le test pour que le facteur d'intégration dans ce repère soit non nul. L'égalité des évaluations identifie les deux coefficients constants, même signés. L'égalité sur les cellules donne l'égalité des porteurs calibrés.

201. Bornes des courants sur un découpage commun

Texte visé. Preuve du corollaire 7.5.12, p. 179.

`courants-trop.tex`, lignes 2788–2798.

Correction. Sur un découpage commun de $P_f^S \cup P_f^T$, comparer les poids dans un même repère de volume et prolonger chaque poids par zéro sur les cellules absentes de son support. Pour l'infimum et le supremum, prendre les minima et maxima scalaires, puis garder la partie p-calibrée pure. Dans la construction du supremum, les deux poids sont indexés par f. Les restrictions et l'élimination des cellules contractées par les projections de cartes commutent avec ces opérations. La proposition 7.5.11 construit alors les courants et le lemme 7.5.10 donne les propriétés universelles dans l'ordre des courants.

202. Construction directe de l’action squelettique sur les domaines

Texte visé. §7.6, p. 180, `courants-trop.tex`, lignes 2861–2866.

Correction. Sur l’espace G-tropical affiné, décent et localement différentiellement séparé, construire directement l’action d’un courant squelettique sur les tests G-lisses compacts. Les courants positifs ordinaires en général n’ont pas l’action de trace qu’exigerait l’argument imprimé par différence de courants positifs.

Restreignons les porteurs calibrés canoniques locaux aux domaines effectifs. Sur une carte conjointe compacte, subdivisons en cellules adaptées aux cartes de test. Les cellules sur lesquelles le degré requis chute en rang contribuent pour zéro. Les cellules retenues donnent, après appariement, des mesures signées de variation finie sur les morceaux compacts. Leurs traces sur les intersections effectives coïncident par la comparaison des porteurs calibrés. Un recouvrement poncté par un nombre fini de domaines compacts du support, puis l’inclusion-exclusion sur leurs intersections, donnent la valeur. Un raffinement commun et l’égalité des traces donnent l’indépendance du recouvrement. Ce calcul rend l’action compatible avec les tests ordinaires. Sur un étage de support compact fixé, les bornes des coefficients par les semi-normes de cartes et la variation finie donnent la continuité d’ordre zéro.

203. Fermeture relative des porteurs dans la reconstruction

Texte visé. Remarque 7.6.5, p. 183, `courants-trop.tex`, lignes 3125–3128.

Contre-exemple. Sur la droite tropicale affine usuelle de niveau un, sans bord, prenons $p = 0$ et $S = \{1/j : j \geq 1\}$. Pour chaque carte G-tropicale f sur un domaine V, prenons $P_f = S \cap V$ avec les poids ponctuels unitaires. Chaque point est isolé dans le porteur par un voisinage ordinaire, ce qui donne une trace squelettique pure sur le domaine. Les restrictions gardent exactement les points de l’intersection, avec leurs poids. Chaque carte a plein rang sur une cellule de dimension zéro, de sorte que la condition de factorisation affine est satisfaite aussi. Pour la carte constante sur la droite, le porteur déclaré omet pourtant sa limite zéro. Les porteurs canoniques ordinaires sont fermés. De plus, une fonction lisse compacte non négative, égale à un près de zéro, donnerait une somme divergente.

Correction. Exiger que chaque P_f soit fermé dans le domaine effectif de f. Sur un ouvert ordinaire, la trace pure est l’intersection ordinaire. On applique alors la reconstruction ordinaire avec ses porteurs fermés. Par décence, les coordonnées affines d’une carte G s’étendent localement à une carte ordinaire. Comparons les deux familles sur le domaine effectif commun par la règle des traces pures. L’égalité locale détermine la description sur le domaine et donne l’unicité. La construction directe donne déjà des porteurs relativement fermés.

204. Recollement squelettique sur les intersections effectives

Texte visé. Lemme 7.6.7, p. 184, `courants-trop.tex`, lignes 3332–3363.

Correction. Pour une carte f sur un domaine D et un membre V_i du G-recouvrement, notons $D_i = D \cap V_i$. Employons le porteur canonique $P^{T_i}_{f|_{D_i}}$, puis sa trace pure sur $D_i \cap D_j$. Les courants étant compatibles sur les intersections effectives, ces traces calibrées coïncident. Le faisceau des porteurs purs fermés donne le porteur P_f, fermé dans D.

Une face de dimension inférieure de l’intersection brute peut disparaître dans la trace pure. Ainsi la trace pure du porteur de dimension un de la droite sur le domaine $\{0\}$ est vide. Pour vérifier le rang, subdivisons chaque cellule compacte de dimension p de P_f sur un raffinement poncté fini du recouvrement, adapté aux morceaux affines. Chaque sous-cellule de dimension p appartient à la trace pure locale qui la porte. La carte y a rang p. La même subdivision

compare les cellules calibrées dans les restrictions pures et les factorisations affines. Le théorème inverse avec fermeture relative donne alors l'unique courant, et ses restrictions ont les porteurs prescrits de chaque T_i.

205. Support compact et bidegré du test

Texte visé. Proposition 7.6.9, p. 185.

`courants-trop.tex`, lignes 3548–3555.

Correction. Exiger que $\rho \wedge \omega$ soit à support compact contenu dans F. Dans la formulation à bidegrés fixés, prendre ρ de type $(r, 0)$ lorsque ω est de type $(p-r, p)$. Le produit de type (p, p) est ainsi un test de l'action G du courant squelettique. Dans la preuve, remplacer aussi (r, p) par $(r, 0)$ à la ligne 3582.

206. Raffinement de l'atlas et fermeture du porteur

Texte visé. Preuve de la proposition 7.6.9, p. 186.

`courants-trop.tex`, lignes 3611–3618.

Correction. Avec les conditions de support et de bidegré de n° 205, les deux cas de la proposition sont valables. Dans le cas (ii), raffiner un recouvrement ordinaire ouvert près de F par des domaines compacts localement finis dans le voisinage paracompact U. Découper ensuite chacun d'eux par les domaines de l'atlas qui le recouvrent en nombre fini. Les morceaux couvrent au sens de la G-topologie un voisinage de F.

Aux intersections finies, concaténer les cartes restreintes. À la ligne 3593, renvoyer à la formule 7.6.8 pour ces domaines. Appliquer cette formule et l'inclusion-exclusion aux calibrages, prolongés par zéro sur des subdivisions communes. Le support pur obtenu est fermé dans U et squelettique dans X. Si un ouvert V vérifie $F \subset V \subset \overline{V}^{X} \subset U$, choisir les domaines compacts initiaux dans V. La famille raffinée est alors localement finie dans X et le support pur y est fermé.

207. Hypothèses de Stokes pour le courant d'une G-forme

Texte visé. §7.7.2, p. 187, `courants-trop.tex`, lignes 3778–3790.

Contre-exemple. Sur la droite tropicale affine sans bord, prenons le calibrage e^t fois le calibrage unitaire. L'harmonie tient à l'annulation des deux vecteurs incidents, affectés du même poids ponctuel. Pour $\omega = 1$ et $\alpha = u\, d''t$ avec u lisse compacte non négative et non nulle, la dérivée de ω et le terme de bord sont nuls. Pourtant

$$b'[1](\alpha) = \int_{\mathbf{R}} e^t u'(t)\, dt = -\int_{\mathbf{R}} e^t u(t)\, dt \neq 0.$$

Correction. Demander des coefficients tropicalement de classe C^1 et un calibrage ambiant G-localement constant près du support compact du test. Pour ω de type (p, q) et un test ordinaire compact α de type $(n-p-1, n-q)$, le produit est de type $(n-1, n)$. Sur une subdivision commune finie en domaines compacts de cartes G, Leibniz puis Stokes calibré donnent

$$[\omega]^{\partial}(\alpha) = [d'_G\omega](\alpha) + (-1)^{p+q} b'[\omega](\alpha).$$

On retrouve le signe $(-1)^{p+q+1}$ en isolant $[d'_G\omega]$. Le bord désigné vide annule le terme de bord pour une forme ordinaire. Une G-forme peut garder un terme d'interface. Par exemple, sur la droite de poids unitaire, $d''_G|t|$ a une G-dérivée nulle sur les deux demi-droites et une contribution de bord $-2u(0)$ au test scalaire u.

208. Support compact et termes de Leibniz

Texte visé. Exemple 7.7.10, p. 189, `courants-trop.tex`, lignes 3979–3982.

Contre-exemple. Sur $\mathbf{R}^3$ affine de poids unitaire, prenons la carte identité, le courant d'intégration et $p = 3$, $q = 1$. Posons $\vartheta = d'z + x\,d'y$, $\Omega'' = d''x \wedge d''y \wedge d''z$, $\rho = \vartheta$ et $\omega = (\vartheta + \psi d'x) \wedge \Omega''$, avec ψ lisse compacte non nulle. Le produit $\eta = \rho \wedge \omega$ est non nul et à support compact. Hors du support de ψ, les termes $d'\rho \wedge \omega$ et $\rho \wedge d'\omega$ sont égaux à la même forme-volume constante non nulle. Leurs intégrales absolues sont infinies, alors que le signe de Leibniz les fait s'annuler hors du support compact.

Correction. Pour les facteurs G-lisses, couvrons le support compact de $d'_G\eta$ par un recouvrement poncté fini de domaines compacts dans le domaine effectif de la carte. Sur chaque intersection non vide les deux termes de Leibniz restreints sont des tests compacts. Le facteur f-tropical garde le second degré p, donc l'action squelettique directe donne leurs deux intégrales locales. Réunissons les termes avec le signe de Leibniz sur l'intersection avant l'inclusion-exclusion. On obtient l'intégrale de $d'_G\eta$ sur le porteur canonique, fermé dans le domaine. Stokes avec le calibrage G-localement constant du porteur donne l'intégrale de bord de η. La transposition signée vaut pour les tests lisses compacts ordinaires sur les ouverts ordinaires.

209. Image calibrée d'une application harmonique agréable

Texte visé. Corollaire 7.8.6, p. 193.

`courants-trop.tex`, lignes 4298–4302.

Correction. Supposer que u est une application G-tropicale harmonique agréable pour définir le polyèdre Π_u et son calibrage par image directe. Une version locale requiert que l'image directe calibrée correspondante soit définie. Pour l'harmonie des facettes, ajouter la constance G-locale du calibrage ambiant conformément à n° 23.

210. Stabilité par décroissance au cran stationnaire

Texte visé. Lemme 8.1.4, démonstration, p. 196.

`bt-trop.tex`, lignes 99–108.

Correction. Soit α un cran à partir duquel la hiérarchie est constante. Sur un ouvert U, toute limite simple d'une suite décroissante de sections de $\mathrm{Psh}_{X,\alpha}(U)$ appartient par construction à $\mathrm{Psh}_{X,\alpha+1}(U) = \mathrm{Psh}_{X,\alpha}(U)$, y compris si la limite prend la valeur $-\infty$. Le cran stationnaire contient donc les fonctions psh lisses et possède la stabilité par limites décroissantes de la définition. La minimalité de Psh_X donne l'inclusion recherchée.

211. Stationnarité de la hiérarchie psh

Texte visé. Remarque 8.1.6, p. 196.

`bt-trop.tex`, lignes 137–147.

Correction. Dans le cadre tropical de l'article, le lemme 8.1.4 établit que la hiérarchie ordinale des faisceaux de fonctions psh est stationnaire à partir d'un certain cran. Le choix d'un cran précis reste une question distincte.

212. Domaine commun dans la récurrence de composition

Texte visé. Proposition 8.2.1 et corollaire 8.2.2, preuves aux crans successeurs, pp. 198–200.

`bt-trop.tex`, lignes 318–428.

Correction. Démontrer d’abord la conservation de chaque cran pour une fonction extérieure lisse, convexe et croissante en chaque variable sur une boîte inférieure $B_b = \prod_i (-\infty, b_i)$. Au cran zéro, la règle de chaîne corrigée donne la positivité. À un cran limite, les entrées en nombre fini relèvent localement d’un même cran antérieur. Au cran successeur, les prédécesseurs sont réels puisqu’ils majorent les limites finies. Un rang commun des suites décroissantes satisfait les inégalités strictes $v_{i,j}(x) < b_i$ au point choisi. La semi-continuité supérieure les conserve sur un même voisinage, et la décroissance les conserve pour les rangs suivants. Les composées au cran précédent décroissent donc vers la composée voulue.

Pour le domaine convexe ouvert Ω de l’énoncé, poser $D = \Omega - \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ et

$$h(v) = \inf\{g(y) : y \in \Omega,\ y \geq v\} \qquad (v \in D).$$

Un point admissible donne une majoration, et la tangente affine en un point de Ω, à pentes non négatives, minore $g(y)$ par sa valeur en v pour $y \geq v$. Dans le cas de convergence uniforme du corollaire, employer la tangente d’un approximant lisse à distance uniforme au plus 1 de g, diminuée de 1. La combinaison convexe des points admissibles donne la convexité de h, et l’inclusion des ensembles admissibles donne sa croissance. Sur Ω, on a $h = g$ par croissance de g le long des segments admissibles. Le prolongement convexe fini est continu sur l’ouvert convexe D.

Près du point fixé, choisir $u(x) < b < c$ coordonnée par coordonnée avec $c \in \Omega$. La boîte B_b épaissie d’une boule assez petite reste dans D. Pour un noyau lisse fixe ρ, pair, non négatif, d’intégrale un et supporté dans la boule unité, poser $h_\varepsilon(v) = \int h(v + \varepsilon z)\rho(z)\,dz$. Ces fonctions sont lisses, convexes et croissantes en chaque variable sur B_b. Pour chaque argument, leur dépendance en ε est paire et convexe. Elles décroissent donc vers h quand $\varepsilon \downarrow 0$, avec convergence localement uniforme. Pour des tuples prédécesseurs $v_j \downarrow u$ dans cette boîte et $\varepsilon_j \downarrow 0$, la diagonale $h_{\varepsilon_j}(v_j)$ appartient au cran précédent par le cas des boîtes. Elle décroît par les deux monotonies et converge simplement vers $g(u)$ par convergence uniforme près de chaque valeur limite. Cela prouve le passage successeur.

Pour le corollaire, la limite décroissante des composées $g_k(u)$ au cran α appartient au cran $\alpha + 1$. En cas de convergence uniforme des fonctions extérieures, la diagonale donne le cran α aux successeurs positifs. Au cran zéro la limite appartient au cran 1, et aux crans limites on applique ces conclusions à un cran antérieur commun. On obtient ainsi l’appartenance au cran $\sup(\alpha, 1)$.

213. Évaluation du gradient dans la règle de chaîne

Texte visé. Proposition 8.2.1, cas lisse, p. 199.

`bt-trop.tex`, lignes 336–345.

Correction. Pour $v = (u_1, \dots, u_n)$ et $u = g(v)$, la formule lisse est

$$d'd''u = \sum_{i,j} (\partial_i \partial_j g)(v)\, d'u_i \wedge d''u_j + \sum_j (\partial_j g)(v)\, d'd''u_j.$$

Les dérivées premières sont évaluées au même n-uplet v dans la formule et dans l’argument de positivité. La convexité de g donne la positivité du premier terme, et sa croissance en chaque variable donne des coefficients non négatifs pour le second.

214. Maximum de fonctions psh à valeurs étendues

Texte visé. Corollaire 8.2.3, p. 200, `bt-trop.tex`, lignes 438–445.

Preuve corrigée. Le couple $(-\infty, 0)$ appartient déjà au rang un, par les constantes lisses décroissantes $-j$ pour la première coordonnée. La composition convexe à domaine dans $\mathbf{R}^n$ ne s'applique donc pas directement à tous les tuples admis. Pour $a > 0$, définissons

$$M_a(t) = a^{-1} \log \sum_{i=1}^{n} e^{a t_i}, \qquad e^{a(-\infty)} = 0, \quad \log 0 = -\infty.$$

La formule commute aux limites décroissantes coordonnées par coordonnées, y compris lorsque la somme tend vers zéro. Pour a fixé, la composition convexe lisse donne le rang zéro, puis la récurrence sur les rangs successeurs et limites donne la conservation de chaque rang.

Pour $b > a$, si une coordonnée est finie, normalisons $(e^{t_i})_i$ pour que la somme des puissances a vaille un. Les termes normalisés sont dans $[0, 1]$ et la somme de leurs puissances b est au plus un. Cela donne $M_b \leq M_a$, avec égalité lorsque toutes les coordonnées valent $-\infty$. L'écart au maximum fini est au plus $(\log n)/a$. Au rang zéro, une suite de paramètres croissante vers l'infini donne une suite décroissante de compositions lisses. Au rang successeur, choisissons sur un même voisinage ordinaire les suites décroissantes de rang précédent pour les n coordonnées. Appliquons M_{a_j} au j-ième tuple avec $a_j \uparrow \infty$. Cette diagonale décroît au rang précédent et tend vers le maximum. Si toutes les coordonnées limites valent $-\infty$, les maxima des tuples tendent vers $-\infty$ et les erreurs restent bornées. Au rang limite non nul, le tuple fini admet localement un rang commun inférieur. On obtient ainsi la borne $\sup(\alpha, 1)$ de l'énoncé.

215. Domaine et cran de la composition convexe continue

Texte visé. Corollaire 8.2.4, p. 200.

`bt-trop.tex`, lignes 448–477.

Correction. Supposer que $v = (u_1, \dots, u_n)$ prend ses valeurs dans Ω. Près de chaque point, travailler dans un voisinage convexe relativement compact de $v(x)$ dans Ω. La convolution sur ce voisinage, en le réduisant au besoin, approche uniformément g par des fonctions lisses convexes et croissantes en chaque variable.

Si les u_i appartiennent à $\mathrm{CPsh}_{X,\alpha}$, la composée appartient à $\mathrm{CPsh}_{X,\sup(1,\alpha)}$ par récurrence dans la hiérarchie continue. Au cran 0, les compositions avec les approximants de g sont lisses psh et convergent uniformément sur le voisinage choisi. À un cran successeur, approcher simultanément les entrées au cran précédent, puis combiner leurs approximants et ceux de g par une diagonale localement uniforme. Lorsque le cran précédent est 0, les composées de cette diagonale sont lisses psh. À un cran limite, les entrées en nombre fini relèvent localement d'un même cran antérieur. On utilise ainsi le faisceau CPsh de la définition 8.1.7.

216. Conclusion du passage aux limites décroissantes

Texte visé. Proposition 8.3.1(a), fin de la démonstration, p. 201.

`bt-trop.tex`, lignes 535–554.

Correction. Soit $\mathscr{P}$ le sous-faisceau des fonctions localement intégrables dont le hessien courant est positif. Sous l'hypothèse de calibration ambiante G-localement constante, l'identité de Stokes en assure la positivité pour les fonctions lisses psh. Pour une suite décroissante de sections u_j de $\mathscr{P}$ de limite localement intégrable u, $u_1^+ + u^-$ fournit un majorant intégrable sur chaque support test compact. Pour des approximants psh, la partie positive est même majorée par une constante sur ce support, par semi-continuité supérieure de u_1. La convergence

dominée donne $[u_j] \to [u]$ et la positivité du hessien passe à la limite. La proposition 8.1.12 donne ainsi $\mathrm{L}^1\mathrm{Psh}_X \subseteq \mathscr{P}$, ce qui conclut la preuve de (a).

217. Hessienne distributionnelle et représentant convexe

Texte visé. Proposition 8.3.2, pp. 201–202.

`bt-trop.tex`, lignes 567–638.

Contre-exemple. Sur $(-1,1)$, donnons à u la valeur un en zéro et zéro ailleurs. Son courant est nul et sa hessienne distributionnelle aussi, malgré la violation de l'inégalité convexe au milieu. Toutes ses convolées sont nulles sur leur domaine. Cette fonction est semi-continue supérieurement.

Correction. Conserver l'équivalence des trois propriétés ponctuelles (i), (ii) et (iv). Pour u localement intégrable, la positivité de $d'd''[u]$ caractérise l'existence d'un unique représentant convexe fini égal à u presque partout. Sur des boules relativement compactes les convolées sont convexes et convergent dans L^1_{loc}. Les bornes intérieures des fonctions convexes en fonction de leurs normes L^1 donnent bornes et équicontinuité sur des boules plus petites. Une sous-suite y converge uniformément vers le représentant convexe. Les représentants se recollent, car deux fonctions continues égales presque partout coïncident. La réciproque suit de la positivité de la hessienne d'une fonction convexe. Si u est supposée continue et réelle, elle est elle-même ce représentant.

218. Fonctions psh à valeurs étendues

Texte visé. Proposition 8.3.2, p. 201, `bt-trop.tex`, lignes 578–580.

Correction. L'égalité avec le faisceau des fonctions localement convexes vaut pour les fonctions psh réelles. Sur chaque composante connexe, une fonction psh à valeurs étendues est soit finie et localement convexe, soit identiquement $-\infty$. Les constantes lisses $-j$ décroissent vers $-\infty$, qui appartient donc au faisceau psh. Pour une limite décroissante sur un ouvert convexe, l'inégalité de convexité propage une valeur $-\infty$ en un point à tout segment issu de ce point, à l'extrémité opposée près. Prolongeons le segment un peu au-delà du point à atteindre dans l'ouvert. Cette dichotomie locale se recolle par connexité.

219. Régularité du seuil de puissance à l'origine

Texte visé. §8.4.2, p. 203, `bt-trop.tex`, lignes 980–987.

Correction. Pour $a > 0$, $t \mapsto \max(-t,0)^a$ est de classe C^m à travers zéro pour tout entier $m < a$, soit de classe $C^{\lceil a\rceil-1}$. Au rang entier a, la dérivée d'ordre a saute en zéro, puisque sur le côté négatif elle vaut $(-1)^a a!$ et sur l'autre côté elle est nulle. Pour a non entier, la dérivée suivante n'est pas bornée près de zéro. Les calculs différentiels sur $\{\rho < 0\}$ gardent leur régularité intérieure et se font avec les coupures compactes de la preuve.

220. Facteur au dernier indice dans les dérivées de la forme de contrôle

Texte visé. §8.4.2, p. 203, `bt-trop.tex`, lignes 989–1012.

Correction. Posons $r = -\rho > 0$, $H = d'd''\rho$, $A = d'\rho \wedge d''\rho$, $b = k + a$ et $m = n - k$. Avec $\varepsilon_k = 2$ pour $k < n$ et $\varepsilon_n = 1$, les deux formules sont

$$d''\beta_k = -\varepsilon_k b r^{b-1} d''\rho \wedge H^m, \qquad d'd''\beta_k = \varepsilon_k b(-r^{b-1}H^{m+1} + (b-1)r^{b-2}A \wedge H^m).$$

Pour $k<n$, le terme $br^{b-1}A\wedge H^{m-1}$ donne une seconde contribution à $d''\beta_k$, égale à celle du premier terme. Pour $k=n$ il est absent. La majoration en valeur signée par $2(k+a)\beta_{k-1}$ reste valable pour $k\geq 1$.

221. Calibrage de l'inégalité pondérée de Chern–Levine–Nirenberg

Texte visé. Proposition 8.4.3, énoncé p. 203 (page imprimée et PDF), bt-trop.tex, lignes 1014–1022. La démonstration figure aux pp. 204–205.

Contre-exemple. Sur la droite tropicale affine sans bord, prenons $n=k=1$, $a=3$, $\rho=x^2-1$, $U=(-1,1)$, $V=-1$ et $u(x)=\sqrt{x^2+10^{-6}}$. Au point 0, les densités des deux membres par rapport au calibrage unitaire sont respectivement 1000 et $2C(1,3)\|u\|_U<1000$. Leur différence est donc strictement positive sur un voisinage de 0. Soit χ une fonction lisse positive ou nulle, d'intégrale strictement positive et de support compact dans ce voisinage. Le poids de calibrage $1+N\chi$ est strictement positif et compatible avec les restrictions. En tout point de subdivision, les deux vecteurs sortants d'une carte affine portent le même poids et se compensent. Avec ce calibrage, la différence des intégrales est strictement positive dès que N est assez grand.

Énoncé corrigé. Dans le cadre de 8.4.2, supposons que le calibrage ambiant soit G-localement constant sur $U=\{\rho<0\}$ et que l'espace tropical X de niveau n soit sans bord. Pour $a\geq 3$, $0\leq k\leq n$, V lisse psh négative sur U et $u_1,\dots,u_k$ lisses psh sur X, on conserve l'inégalité et la constante imprimées

$$\int_U |V|\,\beta_k\wedge\bigwedge_{j=1}^{k} d'd''u_j\leq C(k,a)\left(\prod_{j=1}^{k}\|u_j\|_U\right)\int_U|V|\,\beta_0,$$

$$C(k,a)=(4e)^k\frac{k+a}{a}\prod_{j=1}^{k}(a+j+1).$$

Correction de la preuve. Remplaçons ρ_- dans les poids β_k par $r_\eta=(-\rho-\eta)_+$, avec $\eta>0$. Leur support est contenu dans le compact $\{\rho\leq-\eta\}\subset U$. Pour $k\geq 1$, les poids à différencier sont de classe $\mathscr{C}^2$ après prolongement par zéro (n° 219). On peut appliquer Green et Stokes avec le calibrage G-localement constant et localiser V par une fonction lisse égale à un près de ce support.

Posons $s=k+a$ et $A=d'\rho\wedge d''\rho$. Le facteur dans les dérivées des poids vaut 2 pour $k<n$ et 1 pour $k=n$ (n° 220). La polarisation donne le terme mixte symétrique $d'u\wedge d''\rho+d'\rho\wedge d''u$ (n° 222). Après regroupement, le coefficient de $r_\eta^{s-2}A\wedge(d'd''\rho)^{n-k}$ vaut $2s(s+1)$ pour $k<n$ et s pour $k=n$ (n° 223). Dans les deux cas, le terme regroupé est majoré par $2s(s+1)/(s-1)$ fois le poids tronqué de rang $k-1$. Avec $M=\|u_k\|_U>0$, la substitution $v=\exp(Bu_k)$ et $B=1/(2M)$ absorbent le terme d'énergie et donnent le facteur de récurrence $4e\,s(s+1)M/(s-1)$. Le produit des facteurs numériques redonne la constante ci-dessus. Si une norme est nulle, le hessien correspondant est nul sur U. Les poids positifs tronqués croissent vers les poids initiaux lorsque $\eta\downarrow 0$, ce qui donne l'inégalité par convergence monotone.

222. Termes mixtes dans la polarisation

Texte visé. Proposition 8.4.3, p. 204, `bt-trop.tex`, lignes 1072–1077.

Correction. Le terme mixte de la polarisation est $d'u\wedge d''v+d'v\wedge d''u$. En effet,

$$\begin{aligned}(d'u-hd'v)\wedge(d''u-hd''v)=d'u\wedge d''u+h^2d'v\wedge d''v\\ -h(d'u\wedge d''v+d'v\wedge d''u).\end{aligned}$$

C’est cette somme symétrique qui intervient dans l’inégalité du carré employée dans la preuve.

223. Coefficient du terme de gradient dans l’estimation

Texte visé. Proposition 8.4.3, p. 205, `bt-trop.tex`, lignes 1086–1096.

Correction. Posons $b = k + a$, $r = -\rho$ et prenons ε_k comme dans n° 220. Dans la polarisation avec $h = \varepsilon_k b u_k / r$, le carré donne un coefficient $(\varepsilon_k b)^2$ et le terme différentié retranche $\varepsilon_k b(b-1)$. Le coefficient total du terme en $d'\rho \wedge d''\rho$ est donc

$$\varepsilon_k b\big((\varepsilon_k - 1)b + 1\big).$$

Il vaut $2b(b+1)$ pour $k < n$ et b pour $k = n$. Pour $b > 1$, les deux cas sont couverts par la même borne avec $2b(b+1)/(b-1)$ fois le coefficient de référence $b-1$. L’estimation finale conserve sa constante.

224. Positivité du produit avec un courant fixé

Texte visé. Lemme 8.5.5, p. 207 (page imprimée et PDF), bt-trop.tex, lignes 1248–1260.

La preuve par limites uniformes donne la classe CPsh_X de 8.1.7, alors que l’énoncé porte sur toute fonction psh continue. L’inclusion générale de ces fonctions dans CPsh_X reste ouverte au sens de n° 25.

Correction de la preuve. Fixons un courant ordinaire positif fermé T de bidimension suffisante, dans le cadre du calcul des mesures de coefficients sur les ouverts ordinaires (§ 7.2, n° 13 et n° 14). À chaque forme test ordinaire ω à support compact correspond une mesure signée finie μ_ω^T, définie par $\mu_\omega^T(\varphi) = \langle T, \varphi\omega\rangle$ sur les scalaires lisses. L’intégration d’un multiplicateur borélien localement borné contre ces mesures définit le produit ordinaire.

Pour une fonction psh localement bornée u, posons $D_u T = d'd''(uT)$. Raisonnons par récurrence sur le rang de u dans la construction de Psh_X de 8.1.1. Au rang initial, $D_u T = d'd''u \wedge T$ est positif par la formule de Leibniz pour le courant fermé et la positivité de la forme hessienne (n° 560).

Au successeur, écrivons localement $u_j \downarrow u$ sur un même ouvert ordinaire U, avec u_j au rang précédent. Les inégalités $u \le u_j \le u_1$, la borne inférieure locale de u et la semi-continuité supérieure de u_1 donnent une borne absolue commune sur chaque compact. Pour chaque test ω à support compact dans U, la convergence dominée pour la mesure du courant fixé donne

$$\big|\langle (u_j - u)T|_U, \omega\rangle\big| \le \int_U |u_j - u|\, d|\mu_\omega^{T|_U}| \longrightarrow 0.$$

Les $D_{u_j}(T|_U)$ sont positifs par récurrence. La continuité faible de $d'd''$ et la fermeture faible du cône positif donnent la positivité de $D_u(T|_U)$. À un ordinal limite, l’appartenance est localement acquise à un rang antérieur. La localité sur les ouverts ordinaires achève la récurrence. Les identités différentielles donnent $d' D_u T = d'' D_u T = 0$.

Le lemme vaut donc pour les fonctions psh continues et, dans le même cadre ordinaire, pour les fonctions psh localement bornées.

225. Formule de projection et mesures de coefficients

Texte visé. Proposition 8.5.6, p. 207 (page imprimée et PDF), bt-trop.tex, lignes 1272–1278.

La réduction aux fonctions lisses suivie du passage aux limites uniformes traite la classe CPsh_X. L'énoncé demande la formule pour toute fonction psh continue. Les mesures de coefficients donnent directement l'identité pour le multiplicateur continu choisi.

Correction de la preuve. Soit $j\colon Y \to X$ un morphisme topologiquement propre d'espaces tropicaux et S un courant ordinaire positif fermé sur Y. Le tiré en arrière préserve la positivité des tests et commute avec les deux différentielles. Le courant j_*S est donc positif et fermé.

Plaçons-nous dans le cadre où les mesures de coefficients ordinaires sont disponibles pour S et j_*S sur les ouverts considérés. Cela vaut par exemple lorsque X et Y sont sans bord, ou lorsque X est sans bord et que Y est localement différentiellement séparé sur les voisinages ordinaires nécessaires à la multiplication. On travaille dans les bidimensions où les opérations sont définies.

Soit ω une forme test ordinaire à support compact sur X. La propreté assure que $j^*\omega$ est à support compact sur Y. Pour tout scalaire lisse b à support compact sur X, la définition de l'image directe donne

$$\mu_{\omega}^{j_*S}(b) = \langle S, (b\circ j) j^*\omega\rangle = \mu^{S}_{j^*\omega}(b\circ j).$$

Les mesures signées sont finies et à support compact. Les scalaires lisses à support compact les déterminent par approximation sur les compacts avec une fonction de coupure. On a donc $\mu_{\omega}^{j_*S} = j_*\mu^{S}_{j^*\omega}$. En intégrant une fonction continue u, on obtient $u\, j_*S = j_*((u\circ j)S)$ sur les tests ordinaires. Les différentielles des courants commutent avec l'image directe propre, d'où

$$d'd''(u\, j_*S) = j_*\big(d'd''((u\circ j)S)\big).$$

Pour u psh continue, son tiré en arrière $u\circ j$ est psh continue. Le lemme 8.5.5 corrigé (n° 224) donne la positivité et la fermeture des produits ordinaires correspondants. La formule est énoncée pour ces potentiels et leurs produits scalaires.

226. Potentiels admissibles dans la définition de Bedford–Taylor

Texte visé. Définition 8.6.2, p. 208 (page imprimée et PDF), bt-trop.tex, lignes 1312–1315.

La définition compare les courants $d'd''(uT|_U)$ et $d'd''(vT|_U)$ lorsque $d'd''[u] = d'd''[v]$. L'existence des courants ambiants $[u]$ et $[v]$ et celle des produits scalaires $uT|_U$ et $vT|_U$ relèvent de conditions d'intégrabilité distinctes.

Exemple. Dans l'étoile tropicale sans bord corrigée de 6.7.3, à au moins deux branches (n° 169 et n° 170), prenons un ouvert ordinaire qui contient l'extrémité idéale b d'une branche et évite le centre. En coordonnée finie t, posons $u(t) = t$ et $u(b) = -\infty$. Soit χ une régularisation convexe lisse de la partie positive, à dérivée comprise entre 0 et 1, nulle assez loin à gauche et égale à l'identité assez loin à droite. Les fonctions $-m + \chi(t+m)$, prolongées par $-m$ près de b, sont lisses psh et décroissent vers u. Toute forme test ordinaire de degré maximal est nulle près de b, où les coordonnées affines ordinaires sont localement constantes. Les intégrales ambiantes sur les supports compacts des tests définissent donc $[u]$. Avec $v = u$, les hessiens ambiants sont égaux. En revanche, le courant ponctuel positif fermé δ_b charge le pôle de u, et le produit $u\delta_b$ n'est pas défini comme courant à valeurs finies. La difficulté apparaît au stade du produit scalaire, en bidimension zéro.

Définition corrigée. Sur les ouverts ordinaires U, fixons la classe $\mathcal{P}_c(U)$ des fonctions psh continues à valeurs réelles finies dont le courant ambiant $[u]$ est défini. Un courant ordinaire positif fermé T est de Bedford–Taylor relativement à cette classe si, pour tout U et tous $u, v \in \mathcal{P}_c(U)$,

$$d'd''[u] = d'd''[v] \quad\Longrightarrow\quad d'd''(uT|_U) = d'd''(vT|_U).$$

La continuité assure l'existence des deux produits par le calcul ordinaire des mesures de coefficients (§ 7.2). Pour une classe plus large de potentiels, il faut exiger séparément, pour

chacun des deux, l'existence du courant ambiant et l'admissibilité du produit avec $T|_U$. Pour cette seconde condition, il suffit que le potentiel soit absolument intégrable par rapport à $|\mu_\omega^{T|_U}|$ pour toute forme test ordinaire ω à support compact. L'intégration donne alors le produit en traitant les parties positive et négative du potentiel par le critère des courants positifs. La stabilité faible utilisée en 8.6.6 et 8.6.8 est établie avec la classe fixe $\mathcal{P}_c$.

227. Multiplicateur localement constant d'un courant de Bedford–Taylor

Texte visé. Corollaire 8.6.7, p. 208, `bt-trop.tex`, lignes 1373–1380.

Contre-exemple. Sur la droite tropicale de poids unitaire, le courant d'intégration est de Bedford–Taylor. Pour $u = e^x$, l'évaluation de $d'(u\delta_{\mathbf{R}})$ sur $\varphi\, d''x$ vaut $\int e^x\varphi(x)\,dx > 0$ si φ est un test non négatif et non nul. Le défaut de fermeture se produit donc déjà pour un multiplicateur lisse strictement positif et convexe.

Correction. Supprimer le corollaire ou supposer le multiplicateur non négatif et localement constant. Sur chaque ouvert où il est constant, la multiplication est scalaire et préserve la positivité, la fermeture et l'identité de Bedford–Taylor. Ces propriétés se vérifient localement.

228. Stabilité de la propriété de Bedford–Taylor

Texte visé. Proposition 8.6.8, énoncé p. 208 et démonstration p. 209 (pages imprimées et PDF), bt-trop.tex, lignes 1396–1398.

La stabilité par limites uniformes utilisée dans la démonstration donne la classe CPsh_X de 8.1.7. L'énoncé porte sur toute fonction psh continue. L'implication générale $\mathscr{C}^0_X \cap \mathrm{Psh}_X \subseteq \mathrm{CPsh}_X$ reste ouverte au sens de n° 25.

Correction de la preuve. Soit T un courant ordinaire positif fermé de Bedford–Taylor au sens corrigé de 8.6.2 (n° 226), avec la classe fixe de fonctions tests psh continues à valeurs réelles finies dont les courants ambiants sont définis. Pour une fonction psh localement bornée u, posons $D_u T = d'd''(uT)$. Raisonnons par récurrence sur le rang de u dans le faisceau Psh_X de 8.1.1, sur les ouverts ordinaires.

Au rang initial, u est lisse psh et $D_u T = (d'd''u) \wedge T$. La forme hessienne est lisse, positive et fermée. La proposition 8.6.5 donne la propriété de Bedford–Taylor.

Au successeur, écrivons localement $u_j \downarrow u$ sur un même ouvert ordinaire U, avec u_j au rang précédent. Les inégalités $u \le u_j \le u_1$, la borne inférieure locale de u et la semi-continuité supérieure de u_1 donnent une borne absolue commune sur chaque compact de U. En particulier, les termes u_j sont localement bornés. Pour chaque forme test ordinaire ω de support compact dans U, le courant $T|_U$ et sa mesure de coefficients restent fixes. La convergence dominée donne

$$\left|\langle (u_j - u)T|_U, \omega\rangle\right| \le \int_U |u_j - u|\, d|\mu_\omega^{T|_U}| \longrightarrow 0.$$

Par continuité faible de $d'd''$, les courants $D_{u_j}(T|_U)$ convergent faiblement vers $D_u(T|_U)$. Ils sont positifs fermés et de Bedford–Taylor par récurrence. La limite est positive fermée. Pour chacun des deux potentiels tests continus fixés dans l'identité de Bedford–Taylor, le lemme 8.5.1 donne la convergence du produit avec ces courants variables. On peut donc passer à la limite dans l'identité, comme en 8.6.6.

À un ordinal limite, l'appartenance au faisceau est localement acquise à un rang antérieur. La localité ordinaire (8.6.3) achève la récurrence. La conclusion de 8.6.8 vaut pour toute fonction psh continue et, plus généralement, pour tout multiplicateur psh localement borné avec la classe de potentiels tests continus de n° 226.

229. Indice du dernier facteur dans la suite

Texte visé. Proposition 8.7.2, p. 209.

`bt-trop.tex`, lignes 1479–1491.

Correction. La suite de courants à considérer est

$$u_0^k\, d'd'' u_1^k \wedge \cdots \wedge d'd'' u_q^k \wedge T_k.$$

Le dernier potentiel porte l'indice de suite k, comme les autres facteurs. Avec les potentiels continus psh et les hypothèses de convergence de l'énoncé, la récurrence utilise ce même indice, et le lemme 8.5.1 fait passer les multiplications continues à la limite.

230. Décomposition commune des potentiels dans la continuité

Texte visé. Proposition 8.7.3, p. 210, `bt-trop.tex`, lignes 1514–1547.

Preuve corrigée. Écrivons localement $f_j = a_j - b_j$ avec a_j, b_j continues psh. Sur des boîtes compactes à l'intérieur des domaines de convexité, la convergence locale uniforme des v_i^k donne une borne commune M_i de leurs pentes sur des boîtes plus petites. Les fonctions

$$H_i^k(s,t) = v_i^k(s-t) + M_i \sum_j (s_j + t_j)$$

sont convexes et croissantes en chaque variable sur les boîtes utilisées. Par composition convexe et approximation uniforme, $p_i^k = H_i^k(a,b)$ est continue psh. Pour $q_i = M_i \sum_j (a_j + b_j)$, on a $u_i^k = p_i^k - q_i$, avec q_i fixe et p_i^k localement uniformément convergente. Cette composition utilise le faisceau construit par fermeture uniforme.

Développons le produit en une somme multilinéaire finie. Chaque terme, avec son coefficient continu u_0^k, relève du théorème de convergence pour potentiels continus psh, avec les courants positifs fermés T_k. La somme donne la convergence annoncée. Dans le produit approchant, lire u_q^k.

231. Dernier facteur dans la variante en carte harmonique

Texte visé. Proposition 8.7.3, p. 210.

`bt-trop.tex`, lignes 1514–1528.

Correction. Le dernier facteur de la suite est $d'd'' u_q^k$. Pour la convergence en carte harmonique, décomposer sur un voisinage chaque $u_i^k = p_i^k - q_i$, pour $i \geq 1$, avec $p_i^k, q_i \in \mathrm{CPsh}_X$, q_i fixe et p_i^k convergeant localement uniformément. Cette décomposition utilise les coordonnées de la carte écrites comme différences de fonctions psh continues et une borne commune des pentes des fonctions convexes sur un compact contenant l'image locale dans son intérieur. Le développement multilinéaire donne des produits ordinaires à potentiels psh continus auxquels s'applique 8.7.2. On conserve le coefficient continu u_0^k. Le résultat de positivité issu de la règle de chaîne harmonique dans le cas squelettique exige les hypothèses supplémentaires de ce résultat.

232. Symétrie du produit pour les potentiels continus

Texte visé. Proposition 8.7.4, p. 210.

`bt-trop.tex`, lignes 1549–1574.

Correction. Prendre les u_j dans CPsh_X avec un courant ordinaire positif fermé de base. Pour deux facteurs, fixer le second potentiel v. Lorsque u est lisse psh, la fermeture et la règle de Leibniz donnent

$$d'd''\big(u\,d'd''(vT)\big) = d'd''\big(v\,d'd''(uT)\big).$$

Les potentiels u pour lesquels cette identité vaut forment un sous-faisceau stable par limites localement uniformes, par continuité du produit. Il contient donc CPsh_X. Les transpositions adjacentes donnent l'égalité pour toute permutation des facteurs.

233. Classe des potentiels dans la formule de projection itérée

Texte visé. Proposition 8.7.5, p. 210.

`bt-trop.tex`, lignes 1577–1589.

Correction. Pour le morphisme propre $j : Y \to X$ et le courant positif fermé S sur Y, prendre les u_i dans CPsh_X. Les j^*u_i appartiennent à la classe correspondante sur Y. On obtient

$$\bigwedge_{i=1}^{p} d'd''u_i \wedge j_*S = j_*\left(\bigwedge_{i=1}^{p} d'd''(j^*u_i) \wedge S\right)$$

par itération de la proposition 8.5.6 dans les degrés disponibles. Une classe singulière demanderait sa propre preuve d'admissibilité.

234. Courant de base du produit multilinéaire dpsh

Texte visé. §8.8.5, pp. 211–212.

`bt-trop.tex`, lignes 1674–1697.

Correction. Conserver le courant positif fermé T de bidegré (q,q) dans la définition du produit, en degré disponible. Écrire

$$(u^0,\dots,u^p) \longmapsto u^0\,d'd''u^1 \wedge \cdots \wedge d'd''u^p \wedge T.$$

Pour u^0 dpsh, garder le même facteur dans les deux membres de l'identité

$$d'd''\big(u^0\,d'd''u^1 \wedge \cdots \wedge d'd''u^p \wedge T\big) = d'd''u^0 \wedge d'd''u^1 \wedge \cdots \wedge d'd''u^p \wedge T.$$

La construction et les propriétés qui suivent s'entendent pour ce courant de base fixé. La condition d'unicité du multiplicateur continu relève de n° 30.

235. Signe de la forme dans la preuve de support

Texte visé. Remarque 8.8.6, cas lisse, p. 212.

`bt-trop.tex`, lignes 1713–1745.

Correction. Pour une forme test finale arbitraire ω, la forme lisse de degré maximal

$$f^*(d'd''a^1 \wedge \cdots \wedge d'd''a^p \wedge \omega)$$

peut donner une mesure signée. L'argument de support utilise sa tropicalisation par la carte f, qui porte la mesure sur le support fort squelettique $\Sigma_f^{(n)}$ considéré. Sous les hypothèses de la construction différentielle calibrée, cette inclusion passe aux limites localement uniformes pour les potentiels convexes, puis aux différences par multilinéarité.

236. Signe du calibrage dans le calcul conique

Texte visé. §8.9.2, signe de la mesure hessienne, p. 213.

`bt-trop.tex`, lignes 1818–1841.

Correction. Pour conclure à la positivité de la mesure hessienne, supposer le calibrage non négatif sur les cellules. Le hessien lisse de la fonction convexe fournit une mesure positive pour un poids non négatif. Lorsque le critère de masse strictement positive est appliqué à une cellule de dimension n, prendre un poids strictement positif sur cette cellule. Les hypothèses de finitude globale et de concentration relèvent respectivement de n° 237 et n° 241.

237. Finitude de la masse sur les cônes

Texte visé. §8.9.2, définition des masses des cellules, p. 213.

`bt-trop.tex`, lignes 1818–1840.

Correction. Pour définir les masses globales λ_j, supposer une subdivision conique finie et des poids de calibrage constants sur les cellules. Après translation du sommet, le théorème de masse conique non pondérée donne la finitude sur chaque cellule de dimension n. La multiplication par le poids constant conserve cette finitude. Les cellules de dimension inférieure donnent zéro. Pour des poids variables, la définition globale exige explicitement l'intégrabilité de chaque densité dans l'intégrale correspondante.

238. Échelle du lissage du maximum actif

Texte visé. §8.9.2, définition de la fonction lissée, p. 213.

`bt-trop.tex`, lignes 1825–1830.

Correction. Pour $I \neq \emptyset$ et $\varepsilon > 0$, prendre

$$g_\varepsilon(x) = \varepsilon \log \sum_{i \in I} \exp(x_i/\varepsilon).$$

En factorisant l'exponentielle du maximum actif dans la somme, on obtient

$$0 \leq g_\varepsilon(x) - \max_{i \in I} x_i \leq \varepsilon \log |I|.$$

Cette borne prouve la convergence uniforme vers le maximum actif. La relation $g_\varepsilon(x) = \varepsilon g_1(x/\varepsilon)$ donne l'échelle du hessien après dilatation.

239. Nombre de coordonnées du maximum ambiant

Texte visé. §8.9.2, identification du maximum local, p. 213.

`bt-trop.tex`, lignes 1831–1833.

Correction. Dans $\mathbb{R}^m$, écrire $g(x) = \max_{1 \leq i \leq m} x_i$. Ce maximum ambiant coïncide avec $\max_{i \in I} x_i$ dans le voisinage du sommet donné par les inégalités strictes de n° 240. L'indice n continue à désigner le degré du hessien itéré et la borne de dimension des cônes.

240. Voisinage où le maximum est pris sur les indices actifs

Texte visé. §8.9.2, voisinage du sommet, p. 213.

`bt-trop.tex`, lignes 1831–1833.

Correction. Prendre le voisinage ouvert

$$N = \{x \in \mathbb{R}^m : \ x_j < \max_{i \in I} x_i \text{ pour tout } j \notin I\}.$$

Au sommet ξ, chaque coordonnée inactive est strictement inférieure au maximum actif, donc $\xi \in N$. Sur N, le maximum des m coordonnées est exactement le maximum actif. L'estimation uniforme du lissage dans n° 238 s'applique sur ce voisinage.

241. Poids du calibrage dans la limite au sommet

Texte visé. §8.9.2, coefficient de concentration, p. 213.

`bt-trop.tex`, lignes 1838–1850.

Correction. Avec un poids constant sur chaque cellule conique, le coefficient de concentration est la masse globale du hessien pour $\varepsilon = 1$, dans les coordonnées translatées au sommet. Pour un poids variable a_j continu en ξ et borné sur le support du test compact ψ, écrire ν_j pour la mesure hessienne non pondérée, de masse finie sur le cône translaté $C_j - \xi$. La dilatation donne l'intégrande $\psi(\xi + \varepsilon z)a_j(\xi + \varepsilon z)$ contre ν_j. Il est borné et converge vers $\psi(\xi)a_j(\xi)$. La limite vaut donc

$$\psi(\xi)a_j(\xi)\nu_j(C_j - \xi).$$

La même preuve s'applique à des tests supportés dans un voisinage du sommet où le poids est borné.

242. Rang donnant une masse strictement positive

Texte visé. §8.9.2, critère de masse de cellule, p. 213.

`bt-trop.tex`, lignes 1841–1845.

Correction. Sur une cellule C_j de dimension n et de poids constant strictement positif, fixer $i_0 \in I$. La condition $\lambda_j > 0$ équivaut au rang n de l'application des différences $(x_i - x_{i_0})_{i \in I}$ sur l'espace directeur de la cellule. C'est l'injectivité sur cet espace. Les cellules de dimension inférieure à n et celles de poids nul donnent une masse nulle. Pour des poids non négatifs, la masse totale est donc nulle exactement lorsque le rang est inférieur à n sur chaque cellule de dimension n de poids strictement positif.

243. Évaluation du test au sommet du cône

Texte visé. §8.9.2 et proposition 8.9.4, limites de mesures, pp. 213, 215.

`bt-trop.tex`, lignes 1846–1983.

Correction. Dans les limites coniques des lignes 1849 et 1870, les valeurs correctes sont respectivement $\lambda_j\psi(\xi)$ et $\lambda_C\psi(\xi)$. La dilatation est centrée au sommet ξ. Pour employer une formule centrée à l'origine, transporter le test avec le cône, de sorte que sa valeur à l'origine soit $\psi(\xi)$.

Dans le changement de variables de la proposition 8.9.4, $\xi = f(x)$ et $\psi \circ f|_C = \varphi|_C$. Aux lignes 1982–1983, la limite est donc $\lambda_D\psi(\xi) = \lambda_D\varphi(x)$.

244. Tests ambiants pour la masse au voisinage d'un point squelettique

Texte visé. Proposition 8.9.4, démonstration, p. 215.

`bt-trop.tex`, lignes 1958–1989.

Correction. Soit V le voisinage relatif dans $\Sigma_f^{(n)}$ formé des cellules incidentes à x. Choisir un voisinage ouvert ambiant U de x avec $U \cap \Sigma_f^{(n)} \subseteq V$. Prendre comme tests les fonctions continues à support compact dans U, prolongées par zéro sur X. Les mesures des approximants et la mesure limite sont portées par $\Sigma_f^{(n)}$. Le calcul se ramène donc aux cellules dans V, tandis que les tests ambiants déterminent la mesure sur U, y compris si le squelette est d'intérieur vide.

245. Signe du calibrage d'une facette

Texte visé. Théorème 8.10.3, pp. 218–219.

`bt-trop.tex`, lignes 2247–2338.

Correction. Avec les conventions d'orientation du calcul, écrire

$$\mu_D = -\left(\sum_{C \supset D} a_C \lambda_C\right) f^*[\nu_D, \varepsilon_D].$$

Le signe moins provient de l'intégrale de bord initiale dans l'évaluation de $d'd''(uT)$. Dans la dernière intégrale, employer $\rho\omega$ comme test. Sur la droite de poids unitaire avec $u = |x|$, la coordonnée sortante de chacune des deux demi-droites a sa valeur zéro au sommet et $u = -s$ sur $s \leq 0$. On a $a_C = -1$ des deux côtés et $\lambda_C = 1$. La formule corrigée donne $+2$, en accord avec $d'd''[|x|] = 2\delta_0$.

246. Vecteurs transversaux du test harmonique

Texte visé. Proposition 8.11.1, bt-trop.tex, lignes 2526–2532, pp. 221–222 (pages imprimées et PDF). La contraction qui utilise ce choix est aux lignes 2545–2556, p. 222.

La normalisation fixe le produit extérieur calibré. On peut encore ajouter au vecteur transversal un vecteur tangent à la face. Cela peut modifier la dérivée de la coordonnée harmonique.

Exemple. Sur le plan affine à calibrage unité, prenons le courant d'intégration T, qui est squelettique, positif et fermé. Il est de Bedford–Taylor sur la classe admissible, puisque $aT = [a]$. Les deux demi-plans sont incidents à $D = \{y = 0\}$. Choisissons la projection $h(x, y) = x$, la coordonnée $v = h$ et le test $d'x \wedge d''x$. Dans le demi-plan supérieur et dans l'inférieur, les représentants sortants $(1, -1)$ et $(0, 1)$ conservent respectivement les calibrages et les normalisations par $-y$ et y. Leurs dérivées sous v ont pour somme 1, alors que $d''x \wedge d'x \wedge d''x = 0$. La contraction imprimée exige donc un choix supplémentaire du représentant.

Correction de la preuve. Plaçons-nous sans bord et à calibrage ambiant G-localement constant. Près d'un point de l'intérieur relatif de D, notons H_D son espace tangent et h la projection du test $h^*\gamma$, avec $L = dh|_{H_D}$ inversible. Écrivons le calibrage d'une p-cellule incidente C sous la forme $\mu_C = \lambda_C[e_C^0 \wedge m_D, \varepsilon_C]$, où e_C^0 est un vecteur transversal sortant de référence et λ_C le poids signé constant sur C. Prenons

$$e_C = e_C^0 - L^{-1} dh(e_C^0).$$

La différence est tangente à D. Le sens sortant, le produit extérieur par le vecteur de face m_D et la normalisation $d\phi_C(e_C) = 1$ sont conservés. On a $dh(e_C) = 0$. Les deux blocs de

$h^{*}\gamma$ s’annulent à l’insertion de e_C. La contraction retient donc $dv|_C(e_C)$, multiplié par le même facteur tangentiel et par le poids signé de la cellule.

Écrivons chaque coordonnée harmonique v de la carte jointe u comme différence locale de deux potentiels psh continus admissibles de même hessienne ambiante. La propriété de Bedford–Taylor donne $d'd''(vT) = 0$. Pour les coordonnées affines ajoutées, cette identité résulte de la règle de Leibniz. Appliquons la formule de bord corrigée de 8.10.2 au test symétrique $\rho\, h^{*}\gamma$. La coupure $\rho \geq 0$ est à support compact, évite les autres faces et est strictement positive près du point marqué sur D. Choisissons une densité tangentielle de signe constant et non nulle sur cette trace. On obtient

$$\sum_{C \supset D} \lambda_C \, dv|_C(e_C) = 0.$$

Appliquer cette annulation à toutes les coordonnées de u en sommant sur **toutes** les cellules incidentes. Prendre ensuite le produit extérieur avec le vecteur de face commun $u_{*}m_D$, en gardant le même ordre extérieur dans tous les termes. Les cellules où $du|_C$ est de rang inférieur à p donnent un terme nul. Il reste la somme de vecteurs calibrés requise dans la formule de bord.

247. Récurrence avec le courant squelettique initial

Texte visé. Corollaire 8.11.2, p. 222, `bt-trop.tex`, lignes 2564–2601.

Le produit intermédiaire peut perdre la propriété squelettique. Sur le plan de poids unitaire, le produit du courant d’intégration avec la hessienne de $(x^2 + y^2)/2$ est de bidimension $(1, 1)$, avec une densité lisse non nulle et support tout le plan.

Preuve corrigée. Au lieu de changer de courant dans la récurrence, gardons T sur le lieu sans bord à calibrage ambiant G-localement constant, avec l’action squelettique directe. Pour chaque coordonnée harmonique h, l’identité de Bedford–Taylor pour ses deux parties psh donne $d'd''(hT_j) = 0$ pour chaque terme d’une décomposition locale de T en différence de courants de Bedford–Taylor. Par linéarité, $d'd''(hT) = 0$. Le calcul de Stokes sur le porteur de T, avec ses coefficients signés λ_C, donne alors le flux nul $\sum_C \lambda_C \partial_{e_C} h = 0$ aux facettes. Il fournit les deux identités différentielles pour les G-formes tropicalisées par des cartes harmoniques.

Avec $\beta = \bigwedge_{i<d} d'_G d''_G u_i$, la récurrence et les deux identités, appliquées à $u_d\beta$ pour le même courant T, donnent

$$d'd''\big(u_d(T \wedge \beta)\big) = T \wedge d'_G d''_G(u_d\beta) = T \wedge d'_G d''_G u_d \wedge \beta.$$

Les deux dérivées G de β sont nulles. On obtient l’identité des produits à l’étape d.

248. Translation dans la preuve d’intégrabilité

Texte visé. Théorème 8.12.1, p. 223 (page imprimée et PDF), bt-trop.tex, lignes 2707–2709. La même estimation intervient dans les passages à la limite jusqu’à la ligne 2721.

L’estimation pondérée de 8.4.3 s’applique à un potentiel lisse psh négatif. Rien n’impose ce signe aux approximants V_p. Sur la droite affine à calibrage unité, posons $\rho(t) = t^2 - 1$. Prenons $U = (-1, 1)$ et $u_{1,\ell} = V_p = 1$. Le membre de gauche de l’inégalité imprimée est nul. Le membre de droite est strictement négatif, car $\int_U \beta_0 = 128/35 > 0$ pour $a = 3$.

Correction de la preuve. Dans le cadre sans bord, choisissons $U = \{\rho < 0\}$ de fermeture compacte dans un ouvert commun d’approximation où le calibrage ambiant est G-localement constant. Les approximants psh lisses $u_{i,\ell}$ convergent uniformément sur $\overline{U}$ et $V_p \downarrow V$ sur cet ouvert. Fixons $M > \sup_{\overline{U}} V_1$. Tous les $V_p - M$ sont psh lisses et négatifs sur U.

Pour ℓ et p fixés, appliquer la version à poids d'intérieur de l'estimation corrigée de 8.4.3 (n° 221) au potentiel $V_p - M$. Les poids sont construits à partir de $(-\rho - \varepsilon)_+$, à support compact dans U, et le facteur sur les deux membres est $M - V_p$. Lorsque ε décroît vers zéro, les poids positifs croissent vers les poids complets. La convergence monotone donne l'inégalité pondérée sur U pour ces deux indices fixés.

Pour p fixé, le prolongement par zéro de $\beta_n(M - V_p)$ est une fonction test continue à support compact. Comme les $u_{i,\ell}$ convergent localement uniformément, les produits mixtes convergent faiblement quand ℓ tend vers l'infini. Les normes uniformes sur U convergent également. Ensuite $M - V_p \uparrow M - V$. Par convergence monotone sur les deux membres, on obtient, avec $\mu = d'd''u_1 \wedge \cdots \wedge d'd''u_n$,

$$\int_U \beta_n (M - V)\, d\mu \leq C(n,3) \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_U \int_U (M - V)\, \beta_0.$$

Le dernier terme est fini, car β_0 a une densité bornée sur $\overline{U}$ et V est localement intégrable pour la mesure ambiante. Sur chaque compact de U, β_n possède un minimum strictement positif et μ est finie. Comme $|V| \leq |M| + M - V$, on obtient l'intégrabilité locale de V pour μ. En dimension zéro, la conclusion est l'hypothèse d'intégrabilité pour le courant de base calibré.

249. Domaine de l'application extérieure

Texte visé. Lemme 9.1.6, p. 227 (page imprimée et PDF), intertrop.tex, lignes 179–183.

Dans le domaine élémentaire $W = (f,g)^{-1}(R)$ de $U \times V$, la carte u s'écrit $h \circ (f,g)$, où h est donnée sur la seule partie paralinéaire fermée R. L'expression $h(f(U) \times g(V))$ peut donc être indéfinie. Par exemple, avec les cartes identités des deux intervalles unité, R peut être un triangle fermé propre du carré.

Correction de la preuve. Sur les domaines compacts U et V des deux facteurs, l'image de W par (f,g) est exactement

$$R \cap \big(f(U) \times g(V)\big).$$

En effet, tout point (s,t) de cette intersection se relève en un point (x,y) de $U \times V$ en relevant séparément s par f et t par g. Le couple ainsi obtenu appartient à W puisque (s,t) est dans R. On a donc

$$u(W) = h\big(R \cap (f(U) \times g(V))\big).$$

L'intersection est un polyèdre compact de dimension au plus $m + n$, car $\dim f(U) \leq m$ et $\dim g(V) \leq n$. Subdivisons-la en un nombre fini de cellules sur lesquelles h est affine. L'image de chaque cellule a une dimension au plus égale à celle de la cellule, et leur réunion donne la borne voulue pour $u(W)$. Un recouvrement fini par domaines élémentaires compacts donne la même borne pour l'image de tout domaine compact de la carte initiale. On utilise ainsi la définition de la dimension tropicale globale par les domaines de cartes compacts (n° 103).

250. Dimension maximale au point marqué

Texte visé. Lemme 9.1.6, p. 228 (page imprimée et PDF), intertrop.tex, lignes 242–248.

La dimension globale de l'image $h(W_i)$ ne garantit pas la dimension tropicale de $h|_{W_i}$ au point marqué. Sur la droite affine, prenons $h(x) = \max(0,x)$ sur $[-1,2]$ et les parties fermées $W_1 = [-1,0] \cup [1,2]$ et $W_2 = [0,1]$. La dimension de $h(W_1)$ est un, mais $h|_{W_1}$ est constante au voisinage relatif de 0. Sur W_2, sa dimension tropicale en 0 est un. Le second facteur peut être un point.

Correction de la preuve. Posons $z = (\xi, \eta)$ et $r = m + n$. Dans le recouvrement pointé fini par domaines élémentaires fermés, choisissons un W_i contenant z tel que

$$\dim_{\mathrm{trop},z}(h|_{W_i}) = r.$$

Un tel choix existe si $\dim_{\mathrm{trop},z}(h) = r$. Écartons d'abord les pièces fermées qui ne contiennent pas z en réduisant le voisinage de z. Si chaque pièce incidente avait une dimension locale strictement inférieure à r, on pourrait y prendre un voisinage domanial compact relatif de z dont l'image est de dimension strictement inférieure à r. Leur réunion finie est un voisinage domanial compact de z dans le domaine de h. Son image a encore une dimension strictement inférieure à r, ce qui contredit la dimension tropicale de h en z.

Dans le produit des domaines des cartes f_i, g_i, les voisinages domaniaux compacts produits sont cofinaux parmi les voisinages du point. Les dimensions des images des deux facteurs s'ajoutent sur ces produits. La restriction à W_i et la composition avec l'application affine ϕ_i ne peuvent augmenter la dimension. Comme les niveaux des facteurs bornent leurs dimensions par m et n, le choix de W_i force les deux cartes à atteindre ces dimensions en ξ et η. La partie $(\Sigma_{f_i}^{(m)} \times \Sigma_{g_i}^{(n)}) \cap W_i$ contient donc le point marqué. La dimension maximale de $h|_{W_i}$ vaut en ce point et s'applique à tout voisinage domanial compact de z dans W_i dans la suite de la preuve.

251. Voisinage compact dans un produit

Texte visé. Lemme 9.1.6, p. 228 (page imprimée et PDF), intertrop.tex, lignes 263–266.

Le domaine compact

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$$

est un voisinage domanial de tout point de son intérieur. Au point $q = (1/2, 1/2)$, un produit $A \times B$ contenu dans Z et contenant q vérifie $A, B \subset (-\infty, 1/2]$. Il suffit de fixer tour à tour l'autre coordonnée à $1/2$ dans l'inégalité $x + y \leq 1$. La réunion des produits qui contiennent q manque donc les points voisins sur l'arête oblique dont l'une des coordonnées est supérieure à $1/2$. Ces produits ne constituent pas un G-recouvrement de Z.

Correction de la preuve. Soit Z un voisinage domanial compact du point marqué $z = (\xi, \eta)$ dans le produit ambiant. Par la topologie produit et les bases de voisinages domaniaux compacts des facteurs, choisissons un seul voisinage produit $K \times L \subset Z$ de z, en travaillant relativement aux domaines des cartes f, g de la pièce incidente retenue. Sur cette pièce, la dimension tropicale de h vaut $m + n$ en z. L'image de sa trace sur $K \times L$ est

$$\phi\big((f(K) \times g(L)) \cap R\big)$$

et a donc dimension $m + n$.

Dans des décompositions cellulaires finies des deux images, choisissons deux cellules C, D dont le produit, après intersection avec R et application de ϕ, donne une image de dimension $m + n$. Les dimensions de C et de D sont respectivement m et n, et ϕ est injective sur leur sous-espace affine produit. Comme $(C \times D) \cap R$ est de dimension $m+n$, il contient un produit $C' \times D'$ de sous-cellules compactes de mêmes dimensions. La proposition 5.2.5(c) donne un relèvement de chaque point de C' et de D' dans les lieux de variation maximale de $f|_K$ et de $g|_L$ respectivement. Ces lieux sont contenus dans les squelettes maximaux des cartes initiales. Les relèvements indépendants des deux coordonnées appartiennent au squelette produit découpé par R. L'image de $Z \cap \Sigma$ contient donc l'image de $C' \times D'$ par ϕ, de dimension $m + n$. Cela suffit pour chaque voisinage du point marqué.

252. Richesse de l’espace produit ambiant

Texte visé. § 9.1.8, intertrop.tex, lignes 351–352, p. 229 (page imprimée et PDF). La preuve de richesse se poursuit p. 230.

Le passage à $\mathrm{Int}(X)$ et $\mathrm{Int}(Y)$ suffit pour les propriétés de l’intérieur énumérées au point (i). La richesse exigée par la définition 6.6.2 porte aussi sur l’espace ambiant $X \times Y$. Pour cette assertion, conserver les deux facteurs entiers, qui sont riches.

La distinction se voit sur la réunion disjointe de la droite affine et d’un point isolé déclaré au bord. Dans cet espace chordé de niveau un, les parties squelettiques sont celles de la droite. Son intérieur est très riche et harmonieux, mais la carte constante définie sur le domaine compact réduit au point isolé a une image non vide qu’aucune partie squelettique de ce domaine n’atteint. Cet exemple isole l’exigence de richesse de l’espace ambiant.

Soit h une carte G-tropicale sur un domaine compact W du produit. Prenons un recouvrement fini par des domaines élémentaires compacts $W_i \subset U_i \times V_i$ dans W. Pour chacun, les domaines facteurs U_i, V_i sont compacts, f_i, g_i sont G-tropicales et $W_i = (f_i, g_i)^{-1}(R_i)$ avec $R_i \subset f_i(U_i) \times g_i(V_i)$, et $h|_{W_i} = \varphi_i \circ (f_i, g_i)|_{W_i}$. La richesse de X et Y fournit des parties squelettiques compactes $S_i \subset U_i$ et $T_i \subset V_i$ telles que

$$f_i(S_i) = f_i(U_i), \qquad g_i(T_i) = g_i(V_i).$$

Toute paire de coordonnées de R_i se relève séparément dans S_i et dans T_i. La paire relevée appartient encore à W_i. Ainsi $(S_i \times T_i) \cap W_i$ a la même image par h que W_i. Cette trace paralinéaire intrinsèque est squelettique et compacte. La réunion finie de ces traces est une partie squelettique compacte de W dont l’image est $h(W)$.

Pour montrer que l’intérieur du produit est très riche, appliquer d’abord le même argument aux facteurs intérieurs. Le passage à une partie squelettique pure contenant un compact squelettique est traité séparément aux lignes 455–469.

253. Agrandissement squelettique pur d’un compact

Texte visé. § 9.1.8, intertrop.tex, lignes 459–461, p. 230 (page imprimée et PDF).

La réduction à une partie squelettique élémentaire fournit un argument G-local. Pour montrer que l’intérieur du produit est très riche, il faut obtenir une seule partie squelettique pure de dimension $m + n$ contenant toute la partie squelettique compacte K donnée.

Autour de chaque point de K, prendre les présentations élémentaires de produit dont les traces couvrent un voisinage relatif dans K. Rétrécir les domaines de présentation de façon qu’ils soient relativement fermés et prendre les traces dans un voisinage compact. Par compacité, un nombre fini de ces traces compactes couvre K. Les projections de chacune sont compactes dans les parties squelettiques des facteurs, pour leur topologie paralinéaire intrinsèque. On les contient dans des parties squelettiques compactes des facteurs, puis on agrandit celles-ci en parties pures de dimensions m et n puisque les facteurs intérieurs sont très riches.

Dans chaque agrandissement pur, découper autour de chaque point du compact les cellules incidentes de dimension maximale pour obtenir un voisinage compact et pur. Un nombre fini de ces voisinages couvre le compact. Leur réunion est encore compacte et pure. Pour chaque trace initiale, le produit des deux agrandissements compacts est donc une partie squelettique compacte et pure de dimension $m+n$ qui la contient. La réunion finie de ces produits compacts, qui sont fermés, est squelettique, compacte et pure de dimension $m + n$. Elle contient K.

254. Discordance du produit après une application affine

Texte visé. § 9.1.8, intertrop.tex, ligne 486, p. 231 (page imprimée et PDF).

Écrivons localement $h = \varphi \circ (f, g)$, avec f, g des cartes tropicales des facteurs et φ affine. Le calcul pour (f, g) s'effectue sur des cellules produits adaptées aux cartes et aux calibrages. Une face de codimension un est le produit d'une face de codimension un d'un facteur avec une cellule de dimension maximale de l'autre. Sa discordance est, au signe d'orientation commun près, le produit extérieur de la discordance du premier de ces facteurs et du multivecteur calibré de l'autre. Elle est donc nulle.

Posons $r = m + n$. Le squelette maximal $\Sigma_h^{(r)}$ est la réunion des r-cellules produit fermées sur l'espace tangent desquelles $d\varphi$ est de rang r, avec leurs faces. Le long d'une face de codimension un de ce complexe, appliquer

$$\bigwedge^{r} d\varphi$$

à la somme signée sur **toutes** les cellules incidentes du produit avant de retirer les cellules contractées. La contribution de chaque cellule contractée a une image nulle. Les termes restants sont exactement ceux de la discordance pour h, avec la même orientation de la face. Sur les faces introduites à l'intérieur d'une cellule par subdivision, les deux orientations induites sont opposées et les contributions se compensent. Le calcul est ponctuel et vaut pour des calibrages variables compatibles. Pour $r = 0$, il n'y a aucun test en codimension un.

Par exemple, prenons l'éventail équilibré des trois rayons de directions $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(-1, -1)$, de poids unité, et multiplions-le par une droite de coordonnée t. Sous $(x, y, t) \mapsto (x, t)$, le multivecteur supérieur du rayon vertical devient nul. Les deux autres images sont opposées. C'est le transport de la somme signée complète qui donne cette annulation.

255. Bords hérités lors de la réduction à un rectangle compact

Texte visé. § 9.1.9, intertrop.tex, lignes 542–548, p. 231 (page imprimée et PDF).

Soient $Z = X \times Y$, un rectangle $Q = K \times L$ de domaines compacts et un domaine élémentaire compact $W_0 \subset Q$ intervenant dans la réduction. Écrivons $b_A(D) = D \setminus \mathrm{Int}_A(D)$ pour le bord topologique relatif d'un domaine dans A. Le passage de Z à Q change le bord. Par exemple, le carré unité entier a un bord relatif vide dans lui-même et ses quatre côtés comme bord dans le plan.

L'intérieur de W_0 dans Z est l'intersection de son intérieur dans Q avec l'intérieur de Q dans Z. On a donc

$$b_Z(W_0) = b_Q(W_0) \cup (W_0 \cap b_Z(Q)).$$

Le calcul cellulaire sur les cartes de Q traite le premier terme. Pour le second, utiliser

$$b_Z(Q) = (b_X(K) \times L) \cup (K \times b_Y(L)).$$

Ajouter la trace du bord désigné B_Z de l'espace produit. Les termes provenant de $b_Z(Q)$ et de B_Z sont ainsi contenus dans les produits faisant intervenir les bords hérités de K et de L. Par les axiomes des facteurs, les traces de ces bords sur les parties squelettiques correspondantes sont négligeables dans leurs niveaux respectifs. Sur la partie squelettique produit, les porteurs paralinéaires correspondants ont donc dimension strictement inférieure à $m + n$.

Pour un domaine W localement fermé, utiliser les traces squelettiques pointées et les recouvrements finis près des points de la trace. Dans chaque carte paralinéaire intrinsèque du squelette, le lemme de localité des parties négligeables (2.1.14) permet de réunir les porteurs locaux.

256. Transport de la découpe dans les coordonnées jointes

Texte visé. § 9.1.9, intertrop.tex, lignes 569–571, p. 232 (page imprimée et PDF).

Soit $Q = K \times L$ le rectangle compact de la réduction. Le domaine W_0 y est défini par $(f, g)^{-1}(R)$, où $R = (f, g)(W_0)$ est la découpe paralinéaire compacte dans les anciennes coordonnées. Après avoir ajouté des cartes fidèles sur les traces squelettiques, écrire $F = (f, f')$, $G = (g, g')$, $H = (F, G)$ et $P = F(K) \times G(L)$. Si π désigne la projection vers les anciennes coordonnées, remplacer R par

$$R' = P \cap \pi^{-1}(R).$$

On a alors $W_0 = H^{-1}(R')$ dans Q et $H(W_0) = R'$, puisque $H(Q) = P$. Cette formule conserve les relations entre les deux facteurs. Par exemple, si les anciennes coordonnées sont x, y sur un carré unité, la condition $x = y$ définit la diagonale. Les deux projections de cette découpe ont pour produit tout le carré.

Prendre une subdivision cellulaire finie couvrant P et compatible avec R' et avec l'image fidèle de $\Sigma \times \mathrm{T}$. La borne $\dim P \leq m+n$ garantit que l'intérieur relatif de toute cellule de dimension $m + n$ dans la trace considérée est ouvert dans P. Si la cellule est contenue dans R', l'image réciproque de cet intérieur est ouverte dans Q et contenue dans W_0. Sur la trace squelettique, le bord topologique relatif dans Q est donc porté par les cellules de dimension strictement inférieure à $m + n$.

257. Coupures lisses sur les supports projetés

Texte visé. § 9.2.2, intertrop.tex, lignes 705–710, p. 233 (page imprimée et PDF). Le même choix de partitions intervient au § 9.2.4, lignes 798–801, p. 234.

La preuve choisit des partitions de l'unité lisses ordinaires au voisinage des deux projections de M. Elle utilise ensuite la compacité de leurs supports aux lignes 719–720. Les axiomes d'un espace tropical assurent la séparation différentielle locale sur son intérieur. Au bord désigné, ces coupures peuvent manquer.

Prenons le plan paralinéaire usuel $X = \mathbb{R}^2$ de niveau deux, à calibrage unité, avec bord désigné $B = \{y = 0\}$. Sur un domaine D de X, gardons les sections localement affines usuelles qui sont localement constantes aux points de $B \cap \mathrm{Int}_X(D)$. En découpant les cellules affines par les deux demi-plans fermés, on retrouve G-localement les sections paralinéaires usuelles. Les domaines et les parties squelettiques sont donc inchangés. Hors de B, l'affinage est celui du plan usuel. Les deux demi-plans ouverts sont décents, localement différentiellement séparés, très riches et harmonieux. Les traces des bords sont de dimension inférieure à deux.

Toute fonction lisse ordinaire sur X est localement constante près de chaque point de B, car les coordonnées de ses cartes ordinaires le sont. Elle est donc constante sur la droite connexe B et s'y annule si son support est compact. Pour Y réduit à un point et $M = \{(0, 0)\} \times Y$, les fonctions lisses à support compact sur le premier facteur ne peuvent sommer à un au voisinage de $p_1(M)$. Cet exemple met en échec le choix de partition dans la preuve.

Correction de la preuve. Sur chaque facteur, supposer donnée une famille finie de coupures lisses ordinaires, positives et à support compact. Leur somme vaut un près du compact projeté. Chaque support est contenu dans l'intérieur du domaine de la carte correspondante. Le § 6.2.8 fournit ces coupures sur un voisinage ordinaire localement différentiellement séparé. On les prolonge par zéro. Les compacts dans les intérieurs des facteurs satisfont à cette condition.

Les rectangles compacts de support doivent rester dans les domaines effectifs des cartes. Pour le coefficient mixte, choisir une coupure à support compact dans l'ouvert de définition de son représentant, ou prolonger d'abord ce dernier depuis un voisinage de l'image numérique compacte.

On obtient la décomposition et la densité sous cette condition sur les supports. Cet argument laisse le cas des compacts rencontrant un bord désigné sans conclusion générale.

258. Convergence dans un espace de cartes et de support fixé

Texte visé. Corollaire 9.2.4, intertrop.tex, lignes 815–819, p. 234 (page imprimée et PDF).

Pour un terme localisé par les deux coupures fixes, travailler sur un rectangle de domaines compacts contenant un voisinage de leurs supports dans les domaines ordinaires des cartes. Sur un voisinage de l'image numérique de ce rectangle, choisir un représentant lisse du coefficient joint. En le multipliant par une coupure égale à un près de l'image compacte, puis en le prolongeant par zéro, obtenir un représentant lisse à support compact dans l'espace numérique.

Convoluer ce représentant avec des gaussiennes dont la variance tend vers zéro. Sur un pavé compact contenant l'image, on obtient une convergence uniforme pour chaque ordre de dérivation. Pour chaque variance positive, la convolution a un prolongement entier. Ses polynômes de Taylor approchent la fonction et ses dérivées jusqu'à tout ordre fixé sur ce pavé. On choisit une suite diagonale de polynômes qui converge à tous les ordres finis.

Prendre l'image réciproque des polynômes par les cartes des facteurs. Choisir un raffinement ordinaire fini près du support compact. Y inclure les coordonnées des deux facteurs et celles qui représentent les multiplicateurs lisses fixes. Sur les images compactes de ces cartes, la règle de chaîne affine et la règle de Leibniz transfèrent la convergence de toutes les dérivées d'ordre fixé. Ajouter la carte constante sur le complémentaire ouvert du support compact, où toutes les expressions localisées sont nulles. La convergence a ainsi lieu dans un même espace à cartes et support fixés, dont l'inclusion dans l'espace final des formes à support compact est continue. Les sommes finies et les produits extérieurs par les formes fixes des facteurs préservent cette convergence, avec les coupures de n° 257.

259. Signe de transposition dans le degré du test

Texte visé. §9.2.9, p. 236, `intertrop.tex`, lignes 1046–1051.

Correction. Si (p, q) désigne le bidegré du test, employer le signe $(-1)^{p+q}$. Le courant avant dérivation a bidimension totale $p + q + 1$. Le signe de transposition de §7.7.2 est donc $(-1)^{(p+q+1)+1} = (-1)^{p+q}$. Sur la droite, avec le courant de la fonction x et le test $c(x)d''x$ à support compact, la dérivée donne $\int c$, tandis que le signe imprimé donne $\int xc' = -\int c$.

260. Estimation sur l'image compacte du paramètre

Texte visé. Proposition 9.3.4, intertrop.tex, lignes 1294–1297, p. 239 (page imprimée et PDF). Le choix du compact du premier facteur se fait aux lignes 1205–1216, p. 238.

Dans ces estimations, les domaines d'essai W_i du courant sont dans X, tandis que la carte g est définie sur un domaine V de Y. Il faut employer une seule image compacte du paramètre, $Q = g(W)$ pour un domaine compact $W \subset V$.

Soit f la carte de domaine U dans le premier facteur. Choisir un domaine compact $K \subset \mathrm{Int}_X U$ dont l'intérieur contient le support de ρ, et poser $P = f(K)$. Près de ce support, joindre les coordonnées de f aux cartes qui tropicalisent le multiplicateur fixe ρ. Compléter ce jeu par la carte constante sur l'ouvert $X \setminus K$. Pour une forme numérique α, noter α_z sa tranche au paramètre z. Après prolongement par zéro, les formes $\rho f^* \alpha_z$ appartiennent au même espace ordinaire à cartes et support fixés. Le terme à la ligne 1288 comporte donc l'image réciproque f^*.

Sur cet espace, le courant S est borné par un nombre fini de semi-normes d'ordre au plus r. Les quotients différentiels en paramètre convergent dans le même espace. Pour $T_\alpha(z) = \langle S, \rho f^* \alpha_z \rangle$, la restriction affine et la multiplication fixe donnent, pour chaque ordre k,

$$\|T_\alpha|_Q\|_{C^k(Q)} \leq C_k \|\alpha|_{P\times Q}\|_{C^{k+r}(P\times Q)}.$$

Les normes portent sur les coefficients et leurs dérivées tangentielles dans les cellules du produit compact effectif. L'estimation donne la continuité pour les semi-normes de la carte g. La construction scalaire de n° 261 fournit la régularité lisse ordinaire sur tout Y.

261. Intégration scalaire sans partition au bord

Texte visé. Corollaire 9.3.5, intertrop.tex, lignes 1340–1347, p. 239 (page imprimée et PDF). La partition est aussi utilisée dans la preuve du théorème 9.3.6(a), lignes 1393–1409, p. 240.

La partition lisse compacte sur la projection du support peut manquer. Dans l'exemple de n° 257, toute fonction lisse ordinaire à support compact s'annule sur la droite connexe désignée comme bord. Un singleton sur cette droite, pris avec un paramètre réduit à un point, suffit à mettre en échec le choix de partition.

Fixer un domaine compact W de la carte de paramètre g et poser $Q = g(W)$ et $K = p_1(M \cap (X \times W))$, où M est le support fermé autorisé, propre au-dessus de Y. Prendre un raffinement fini de cartes ordinaires du premier facteur dont les intérieurs recouvrent K et dont les produits avec g raffinent le jeu de départ. Si un multiplicateur fixe ρ intervient, y joindre les cartes qui le tropicalisent. Sur $X \setminus K$, ajouter la carte constante, où les tranches sont nulles. Toutes les tranches de $\rho\gamma$ sur W appartiennent ainsi au même espace ordinaire à cartes et support fixés.

Sur cet espace, la continuité de S donne une borne par une constante fois le maximum d'un nombre fini de normes C^r sur des images compactes de cartes P_i. Le courant se factorise par l'application qui associe à une tranche le tuple de ces représentants. Prolonger par Hahn–Banach réel la forme linéaire bornée de l'image au produit fini, avec la même borne. Fixer ce prolongement L pour l'espace et le domaine test choisis.

Sur chaque $P_i \times Q$, prendre un représentant numérique lisse du coefficient produit et le prolonger au voisinage de ce compact. Les tranches numériques de ces représentants varient de façon lisse pour la norme fixe C^r. Leur tuple, appliqué à L, donne donc une fonction lisse au voisinage de Q. Au paramètre effectif y, ce tuple représente la tranche de $\rho\gamma$, d'où la valeur $S_*(\rho\gamma)(y)$. Dériver dans les directions tangentes aux cellules de Q donne une borne à l'ordre k par les semi-normes intrinsèques d'ordre $r + k$ sur les produits $P_i \times Q$.

Le support du résultat est contenu dans le fermé $p_2(M)$. Pour M compact, le raffinement fini donne un espace d'arrivée fixé, complété par la carte constante hors de $p_2(M)$. Pour M propre au-dessus de Y, appliquer les mêmes bornes sur des domaines compacts dont les intérieurs recouvrent Y, et faire couvrir chacun de ces domaines par ses cartes de paramètre. Les topologies finales donnent les deux continuités du théorème 9.3.6. Les conclusions scalaires gardent leurs hypothèses de support.

262. Support propre dans le changement de base

Texte visé. Théorème 9.3.8, partie (b), intertrop.tex, lignes 1476–1478, p. 241 (page imprimée et PDF).

Soit $v : Y \to Y'$ un morphisme d'espaces tropicaux. Dans l'identité

$$S_*((\mathrm{id}_X \times v)^* \omega) = v^* S_*(\omega),$$

supposer que ω est de degré $(p, q; p', q')$ sur $X \times Y'$ et que son support fermé est propre au-dessus de Y'.

En effet, pour un compact $C \subset Y$, soit A la partie du support de ω au-dessus de $v(C)$. L'ensemble A est compact. Le produit fibré $C \times_{Y'} A$ est fermé dans le produit compact $C \times A$, puisque Y' est séparé. Au-dessus de C, le support de l'image réciproque de ω est une partie fermée de ce produit fibré. Il est donc compact. Pour un générateur $\gamma \wedge p_2^*\beta$, la tranche du premier facteur au paramètre y est la tranche de γ au paramètre $v(y)$ et le facteur extérieur est tiré en arrière par v. Cela donne l'identité sur ces générateurs. La prescription intrinsèque de n° 263 donne la construction pour les formes générales dans ce domaine de support.

La compacité de chaque tranche seule est insuffisante. Sur les droites ordinaires, prendre une fonction lisse χ à support compact et d'intégrale un. Le coefficient $\chi(x - 1/t)$ pour $t > 0$, prolongé par zéro pour $t \leq 0$, est lisse sur le produit. Près de chaque point au-dessus de $t = 0$, il est nul, puisque le support s'éloigne à l'infini. Chaque tranche a un support compact, mais son intégrale vaut un pour $t > 0$ et zéro pour $t \leq 0$. Le support du coefficient au-dessus de $[0, 1]$ n'est pas compact.

263. Prescription intrinsèque de l'application fibre

Texte visé. Théorème 9.3.8, partie (a), intertrop.tex, lignes 1496–1506, p. 241 (page imprimée et PDF).

La compacité sur $X \times W$ ne suffit pas pour appliquer le corollaire 9.2.3 aux voisinages d'un bord désigné. La preuve de génération emploie les coupures ordinaires compactes de n° 257. Il faut distinguer la construction par les coefficients intrinsèques et la caractérisation par les seuls générateurs imprimés.

Fixer un compact du paramètre, son image Q dans une carte ordinaire et le support propre de la forme. Comme en n° 261, choisir un espace ordinaire à cartes et support fixés pour les tranches du premier facteur. Le courant se factorise par un tuple fini de représentants sur des images compactes P_i, puis par un prolongement borné L d'ordre fini r. Décomposer des représentants du produit sur $P_i \times Q$ dans une base extérieure du paramètre. Appliquer L aux tuples des coefficients du premier facteur. On obtient des coefficients lisses au voisinage de Q.

Sur une cellule effective du paramètre, contracter d'abord dans les deux copies extérieures de son espace tangent. Le tuple obtenu à chaque paramètre représente une véritable forme d'essai du premier facteur. La valeur donnée par L est donc celle de S sur cette forme. Cette prescription intrinsèque assure l'indépendance des choix, par détection sur les cellules squelettiques compactes, et le recollement sur les ouverts ordinaires. Elle détermine l'unique application qui la satisfait. Elle donne le changement de base propre, par l'image réciproque des facteurs du paramètre. Les estimations tangentielles d'ordre k par les semi-normes du produit d'ordre $r + k$ donnent les deux continuités, pour le support compact et le support propre.

Si des coupures compactes ordinaires existent sur la première projection du support au-dessus d'un voisinage compact du paramètre, choisir une carte commune de paramètre en joignant les coordonnées des cartes de produit. La partition sur le premier facteur et la base de cette carte donnent localement des sommes finies de $\gamma \wedge p_2^*\beta$. Dans ce cas, la règle imprimée sur ces générateurs détermine la même application. L'unicité par la seule règle imprimée demeure sans preuve générale pour les compacts rencontrant un bord désigné arbitraire.

264. Symétrie graduée du produit extérieur de courants

Texte visé. Corollaire 9.4.5, p. 244, `intertrop.tex`, lignes 1737–1751.

Correction. Pour S et T de bidimensions respectives (p, q) et (r, s), et l'échange τ des deux facteurs, écrire

$$\langle S \boxtimes T, \omega \rangle = (-1)^{(p+q)(r+s)} \langle T \boxtimes S, \tau^* \omega \rangle.$$

Dans le test séparé qui définit le produit, les blocs de degrés totaux $p+q$ et $r+s$ apparaissent en ordre inverse après tiré en arrière. Leur permutation donne le signe. Les courants positifs de bidimensions diagonales ont des degrés totaux pairs.

265. Signe du produit extérieur des courants de formes

Texte visé. Exemple 9.4.6, pp. 244–245.

`intertrop.tex`, lignes 1801–1834.

Correction. Si les formes homogènes ω, η ont les degrés totaux c, d, écrire

$$[\omega] \boxtimes [\eta] = (-1)^{cd}[p_1^*\omega \wedge p_2^*\eta].$$

Sur un test séparé, la composante complémentaire dans le premier facteur a degré total $2m-c$, où m est le niveau du premier espace. La forme η la traverse pour regrouper les facteurs, d'où le signe $(-1)^{d(2m-c)} = (-1)^{cd}$. Procéder par composantes homogènes pour des formes générales. Les degrés diagonaux donnent le signe positif.

266. Dérivées dans chacun des facteurs du produit extérieur

Texte visé. Proposition 9.4.8, p. 246, `intertrop.tex`, lignes 1893–1919.

Correction. Écrivons $a = p+q$ et $b = r+s$ pour les bidimensions totales de S et de T. Pour $d = d'$ ou d'', on a

$$d_X(S \boxtimes T) = (-1)^b (dS) \boxtimes T, \qquad d_Y(S \boxtimes T) = S \boxtimes (dT).$$

Dans le premier terme, le signe de transposition $(-1)^{a+b+1}$ rapporté à celui de dS, $(-1)^{a+1}$, donne $(-1)^b$. Dans le second, le passage de la dérivée à travers le premier bloc de degré a multiplie le signe par $(-1)^a$, puis la comparaison avec le signe de dT donne $+1$. Le produit de deux courants fermés est fermé.

267. Produit tensoriel et positivité faible

Texte visé. Proposition 9.4.9, intertrop.tex, lignes 1922–1925, p. 246, et ligne 1957, p. 247 (pages imprimées et PDF).

La proposition affirme que le produit tensoriel de deux courants faiblement positifs est faiblement positif. Prenons deux espaces affines $\mathbf{R}^4$ à calibrage unité. Pour chaque paire d'indices croissante I, notons I^c sa complémentaire et ε_I le signe de (I, I^c). Posons $H_{IJ} = \varepsilon_I \mathbf{1}_{J=I^c}$ dans la base à six éléments des puissances extérieures secondes.

Définissons S et T par l'évaluation à l'origine des matrices de coefficients des formes de type $(2,2)$, dans la base normalisée $-d'x_I \wedge J(d'x_J)$, suivie de l'appariement avec H et $-H$. Ces courants symétriques sont d'ordre zéro. Les essais fortement positifs sont engendrés par les matrices uu^{t} pour u décomposable. Le nombre $u^{\mathrm{t}}Hu$ est alors nul, car c'est le coefficient de $u \wedge u$. Les deux courants sont donc faiblement positifs.

Sur le produit, posons

$$\lambda = \bigwedge_{i=1}^{4} (d'x_i + d'y_i), \qquad \omega = \chi\, \lambda \wedge J\lambda,$$

où χ est une fonction lisse non négative, à support compact, égale à un au point $(0,0)$. La forme ω est fortement positive. La composante de λ de degré deux dans chaque facteur a pour

coefficients ε_I sur (I, I^c). Le réordonnement des deux blocs médians, chacun de degré deux, donne un signe positif. On obtient

$$\langle S \boxtimes T, \omega \rangle = \sum_{I,J} \varepsilon_I \varepsilon_J H_{IJ}(-H_{I^c,J^c}) = -6.$$

Le produit de deux courants positifs reste positif, et celui de deux courants fortement positifs reste fortement positif. Le produit d'un courant faiblement positif et d'un courant fortement positif est faiblement positif, dans l'un ou l'autre ordre. Sur une cellule du second facteur, contracter les deux créneaux avec le même vecteur extérieur conserve les matrices positives. Si le vecteur est décomposable, cette contraction conserve aussi la positivité faible et les carrés décomposables. Les trois cas suivent par dualité, avec la construction intrinsèque des formes par intégration sur les fibres pour les facteurs sans bord du §9.4.

268. Positivité des intersections avec un graphe

Texte visé. Assertion après la remarque 9.5.3, intertrop.tex, lignes 2057–2058, p. 248 (page imprimée et PDF).

Le texte attribue à l'intersection avec un graphe paralinéaire la permanence de la classe de Bedford–Taylor. Prenons le produit affine ordinaire $\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_t$, sans bord et à calibrage unité. Le courant d'intégration $S = [1]$ est positif, fermé, squelettique et de Bedford–Taylor, puisque pour tout potentiel admissible a, on a $aS = [a]$.

Pour $f(x) = -|x|$, le potentiel du graphe est $u(x,t) = \max(-|x|, t)$. Il est continu et localement dpsh. Sur $|x| < 1/2$, $-3 < t < -1$, il vaut $-|x|$. Le courant $d'd''(uS)$ y porte la mesure $-2\delta_0$ dans les deux directions de x, avec intégration ordinaire en t. Choisissons des fonctions lisses non négatives ϕ, ψ à supports compacts dans les intervalles indiqués, avec $\phi(0) = 1$ et $\int \psi = 1$. Alors

$$\langle d'd''(uS),\ \phi(x)\psi(t)\, d't \wedge d''t \rangle = -2.$$

L'essai est fortement positif. Le courant du graphe est fermé, mais il n'est pas positif, condition requise dans la définition d'un courant de Bedford–Taylor.

Pour une base de Bedford–Taylor et des potentiels du graphe continus psh admissibles, chaque étape du produit conserve la positivité, la fermeture et la classe de Bedford–Taylor. Pour des potentiels continus dpsh admissibles, les décomposer localement en différences de potentiels continus psh et développer le produit dans l'ordre donné. On obtient localement une combinaison linéaire finie de courants de Bedford–Taylor. La fermeture subsiste et l'appartenance à la classe demande une preuve de positivité. Le cas harmonique de n° 36 utilise une base squelettique de Bedford–Taylor, le calibrage requis et l'itération des maxima exacts.

269. Continuité des produits de potentiels du graphe

Texte visé. Assertion après la remarque 9.5.3, intertrop.tex, lignes 2060–2062, p. 248 (page imprimée et PDF).

Le texte affirme la continuité faible de l'intersection lorsque l'application paralinéaire converge localement uniformément. Sur le produit affine ordinaire $\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}^2_{s,t}$, sans bord et à calibrage unité, gardons le courant d'intégration $S = [1]$ fixe. Il est positif, fermé, squelettique et de Bedford–Taylor. Posons $h_k(x) = \operatorname{dist}(x, k^{-1}\mathbf{Z})$ et $f_k = (h_k, h_k)$. On a $0 \le h_k \le 1/(2k)$ et $|h_k'| = 1$ presque partout. Les potentiels, extérieur puis intérieur, sont $\max(h_k, s)$ et $\max(h_k, t)$, continus et localement dpsh.

Prenons l'essai compact $\varphi(x)\psi(s)\zeta(t)\,d't\wedge d''t$, avec facteurs lisses non négatifs, $\int\varphi>0$, $\psi(s)=1+s$ près de zéro et ζ portée dans $(-3,-1)$ avec $\int\zeta=1$. Sur ce support, l'étape intérieure donne la mesure des sauts de pente dh'_k dans les directions de x. À l'étape extérieure, seules subsistent les deux directions de s dans l'application de $d'd''$ à l'essai. La dérivée seconde en s du maximum est la masse unité en $s=h_k(x)$. Pour k assez grand, le résultat testé vaut donc

$$\int\varphi(1+h_k)\,dh'_k=\int h_k\varphi''-\int\varphi(h'_k)^2-\int h_kh'_k\varphi'\longrightarrow-\int\varphi<0.$$

Pour l'application limite nulle, le potentiel intérieur vaut zéro près du support et l'appariement est nul.

Pour des potentiels continus dpsh admissibles fixés, leurs décompositions locales fixées en différences de potentiels continus psh ramènent la convergence faible des bases positives fermées à celle des produits positifs. Lorsque les potentiels varient, la convergence subsiste pour les itérations positives admissibles avec convergence localement uniforme, ou pour des décompositions locales dont les termes continus psh convergent localement uniformément. À une seule étape, la convergence localement uniforme et le contrôle d'ordre zéro des bases positives suffisent.

270. Signe de l'expansion par blocs complémentaires

Texte visé. Proposition 9.6.4, p. 252, `intertrop.tex`, lignes 2393–2406.

Correction. Dans l'ordre imprimé, complément du premier facteur puis bloc sélectionné du second, le coefficient est ε_{IJ}. En posant $k=|I|+|J|$, les termes sélectionnés avec signe moins donnent $(-1)^k$. La permutation des blocs de tailles k et $2n-k$ donne aussi $(-1)^k$. Les deux signes se compensent. Dans l'ordre ultérieur, bloc sélectionné en premier, le facteur supplémentaire $(-1)^k$ est approprié. L'intégration de fibre ne retient que $|I|=|J|$.

271. Argument du noyau avant le passage à la limite

Texte visé. Proposition 9.6.4, pp. 252–253.

`intertrop.tex`, lignes 2401–2438.

Correction. Conserver l'argument $f_i\circ p-q_i$ dans les identités au paramètre fini, ou choisir μ''_ε pair. Les deux orientations de l'argument donnent la même masse de Dirac à la limite, tandis qu'un noyau dissymétrique donne en général deux densités différentes pour un paramètre fixé.

272. Densité du noyau dans les intégrales de fibre

Texte visé. Proposition 9.6.4, p. 252, `intertrop.tex`, lignes 2410–2415.

Correction. Dans les deux intégrandes sous p_*, remettre le facteur

$$\rho_\varepsilon=\prod_i\mu''_\varepsilon(f_i\circ p-q_i).$$

Il dépend des coordonnées de fibre. La formule de projection permet de sortir les facteurs tirés de la base, mais l'intégration doit toujours porter sur la densité du noyau. Même pour $f=0$ et une fibre de dimension un, $\int\mu''_\varepsilon(-t)\theta(t)\,dt$ diffère en général de $\int\theta(t)\,dt$.

273. Courant ambiant fermé et image réciproque

Texte visé. Définition 9.6.8, intertrop.tex, lignes 2663–2669, p. 254 (page imprimée et PDF).

L'opération $f^!T = \delta_X \cap_f T$ exige que le courant d'intégration ambiant soit fermé. Sur la droite affine ordinaire sans bord, prenons le calibrage positif $w(x)|e_x|$, où $w(x) = 2 + x^2$. Les traces aux sommets de toute subdivision coïncident et les vecteurs sortants s'annulent. Pourtant

$$\langle d'\delta_X, \phi\, d''x\rangle = -\int w\phi' = \int 2x\phi$$

est strictement positif pour une bosse lisse non négative non nulle à support compact dans $x > 0$.

Prenons la carte harmonique constante $f = 0$ vers $\mathbf{R}_t$ et le courant positif fermé $T = [d't \wedge d''t]$. Si l'on applique formellement l'étape du maximum au tenseur, on obtient

$$d'd''\big(w(x)t_+\, d't \wedge d''t\big) = 2t_+\, d'x \wedge d''x \wedge d't \wedge d''t.$$

Ce support n'est pas propre sur la base. Pour un essai scalaire compact $\phi \geq 0$ non nul sur la base, les accouplements avec des coupures compactes non négatives en t, égales à un sur $[0, N]$, sont minorés par $N^2 \int \phi$. L'image directe propre est donc indisponible et ces accouplements divergent.

Pour une carte affine, utiliser un courant ambiant ordinaire effectivement positif et fermé. Pour le cas harmonique vérifié, prendre un espace tropical décent, sans bord, à calibrage G-localement constant, avec des courants d'intégration ordinaires positifs fermés et squelettiques sur la base et son produit avec la cible affine à calibrage unité. Sur le produit, $a\delta = [a]$ donne la propriété de Bedford–Taylor. L'itération squelettique des maxima exacts donne un courant B positif, fermé, squelettique et porté par le graphe. Pour une forme cible lisse positive fermée β, l'intersection sur le tenseur avec $[\beta]$ vaut $B \wedge q_Y^*\beta$ par Leibniz, où q_Y est la projection vers la cible. Pour T quelconque positif fermé, la convolution positive dans la cible, puis la continuité faible des produits à potentiels dpsh admissibles fixés, par décomposition locale en potentiels psh, donnent la limite positive fermée sur le graphe. La première projection y est propre. On obtient le courant ordinaire de bidegré (q, q), nul si q dépasse la dimension de la base. Les identités de la proposition 9.6.9 relèvent de leurs propres preuves.

274. Calibrages signés et intersection transverse

Texte visé. Proposition 9.7.2, intertrop.tex, lignes 2749–2754, p. 255 (page imprimée et PDF).

Le produit $S \cap T$ est défini aux lignes 2732–2733 pour des courants positifs fermés. La proposition 9.7.2 permet des vecteurs-volume arbitraires. Leurs droites de déterminants absolus permettent des coefficients négatifs. Dans le plan affine ordinaire, prenons les axes transverses $V = \mathbf{R}e_1$ et $W = \mathbf{R}e_2$, avec $\mu_V = -|e_1|$ et $\mu_W = |e_2|$. Le courant $[V, \mu_V]$ est fermé mais teste négativement une forme compacte fortement positive de type $(1, 1)$ dont l'intégrale tangentielle sur V est strictement positive. Le produit positif affiché n'est donc pas défini pour cette paire.

Avec deux vecteurs-volume constants non négatifs, la construction affine par le graphe diagonal donne

$$[V, \mu_V] \cap [W, \mu_W] = [V \cap W, \mu_V \cap \mu_W].$$

Sur $V \times W$, appliquer la restriction par hyperplan aux coordonnées de l'application surjective $(v, w) \mapsto w - v$. Chaque coordonnée est non nulle sur le noyau des précédentes. La suite exacte normalise le volume sur le noyau commun par le volume standard de la cible. La première projection identifie ce noyau et son volume avec $V \cap W$ et $\mu_V \cap \mu_W$.

Sur cette famille de courants linéaires à vecteur-volume constant, on peut aussi définir un prolongement bilinéaire signé. Choisir des générateurs positifs des deux droites de volumes, écrire chaque vecteur donné comme un multiple réel de son générateur, puis multiplier l’intersection positive par le produit des deux scalaires. L’homogénéité positive rend le résultat indépendant des générateurs. La même multiplication des scalaires dans la suite exacte donne la formule affichée.

275. Intégration ambiante et calibrages squelettiques

Texte visé. Paragraphe 9.7.4, intertrop.tex, lignes 2829–2835, p. 256 (page imprimée et PDF).

Le texte associe un courant squelettique ambiant à tout sous-espace paralinéaire purement de dimension p muni d’un p-calibrage. Il le dit fermé lorsque le calibrage est harmonieux. Sur la droite entière, prenons le calibrage positif $(2+\sin x)|e_x|$. Sur une subdivision en intervalles unité, les poids évalués aux sommets coïncident et les vecteurs sortants pondérés s’annulent. Le courant est positif et

$$\langle d'[P,\mu_P],\,\phi\,d''x\rangle = -\int_{\mathbf{R}} (2+\sin x)\phi'(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}} \cos x\,\phi(x)\,dx > 0$$

pour une bosse lisse non négative non nulle à support compact près de zéro. Une représentation squelettique localement finie imposerait une densité constante dans l’intérieur d’une cellule de dimension un, alors que les essais dans la carte identité y déterminent la densité $2+\sin x$. La fermeture et la squeletticité font donc défaut.

Prenons ensuite le demi-axe paralinéaire ouvert $P=(0,\infty)$. Le calibrage unité y est harmonieux. Dans la droite ambiante, le courant associé a pour dérivée

$$\langle d'[P,\mu_0],\phi\,d''x\rangle = -\int_0^{\infty} \phi'(x)\,dx = \phi(0).$$

Avec le calibrage positif $x^{-1}|e_x|$ sur le même ouvert, l’intégration est localement finie sur P, mais un essai ambiant compact de bidegré $(1,1)$ dont le coefficient est strictement positif près de zéro donne une intégrale divergente.

Pour définir le courant d’ordre zéro ambiant, exiger l’intégrabilité locale ambiante des coefficients calibrés en valeur absolue. Un calibrage non négatif donne alors la positivité. Un cadre suffisant pour la squeletticité est un porteur paralinéaire fermé, purement de dimension p, avec décomposition cellulaire localement finie dans l’ambiant et calibrage G-localement constant. La fermeture suit de l’annulation des sommes pondérées aux faces de codimension un dans l’ambiant, y compris aux faces exposées, par Stokes à calibrage constant sur chaque cellule. Pour un calibrage signé, la même condition donne un courant signé fermé. L’intersection diagonale positive exige deux courants positifs fermés.

276. Degré du générateur dans l’exemple de corps gradué

Texte visé. § 10.1.2, p. 261, `redgrad.tex`, lignes 24–28.

Correction. Pour graduer $k[t,t^{-1}]$ en posant $\deg(t)=r$, prendre $r>0$ et $r\neq 1$. Les r^i sont distincts et chaque élément homogène non nul est un monôme at^i, donc une unité. Si $r=1$, tout élément est homogène. Le polynôme $1+t$ est non inversible, car les exposants extrêmes d’un produit de deux polynômes de Laurent sont les sommes des exposants extrêmes des facteurs, et les unités sont donc des monômes.

277. Définition d'une base homogène

Texte visé. § 10.1.4, p. 262, `redgrad.tex`, lignes 53–57.

Correction. Pour une famille homogène (m_i), utiliser l'application A-linéaire graduée

$$\bigoplus_i A[\deg(m_i)] \longrightarrow M, \qquad (a_i)_i \longmapsto \sum_i a_i m_i$$

avec des coefficients quelconques à support fini. La liberté, la génération et la propriété de base correspondent respectivement à l'injectivité, à la surjectivité et à la bijectivité. Ces critères s'expriment aussi degré par degré, puisque chaque élément est une somme finie de composantes homogènes.

Pour $A = M = k[t, t^{-1}]$ avec $\deg(t) = 2$, le générateur 1 ne peut atteindre $1 + t$ à l'aide d'un seul coefficient homogène. Deux générateurs homogènes non nuls ont déjà une relation homogène dans ce module de rang un.

278. Groupe des degrés du sous-corps intermédiaire

Texte visé. § 10.1.9, p. 264.

`redgrad.tex`, lignes 177–216.

Correction. Pour $M = L^1 \otimes_{K^1} K$, la décomposition en composantes homogènes donne $|M^\times| = |K^\times|$. Dans les deux quotients de groupes de degrés aux lignes 194 et 213, le numérateur est $|L^\times|$. Le quotient de la formule de degré de transcendance est ainsi $|L^\times|/|K^\times|$.

Exemple. Pour $K = k$ trivialement gradué et $L = k[t, t^{-1}]$ avec $|t| = 2$, on a $M = k$, tandis que $|L^\times| = 2^{\mathbb{Z}}$. L'égalité de groupes utilisée dans la preuve concerne M.

279. Coefficients des monômes dans le sous-corps intermédiaire

Texte visé. § 10.1.9, p. 264.

`redgrad.tex`, lignes 214–217.

Correction. Dans la comparaison des deux monômes, choisir $\mu_1, \mu_2 \in M^\times$. Leur degré appartient à $|M^\times| = |K^\times|$. L'égalité des degrés des deux termes donnerait une relation entre les classes des $|\beta_j|$ dans le quotient rationalisé et forcerait l'égalité des multi-indices. Une relation polynomiale sur M entre les β_j serait donc une somme de termes non nuls de degrés distincts, ce qui est impossible.

Contre-exemple avec des coefficients dans $L^\times$. Pour $\beta \neq 0$, les choix $\mu_1 = \beta$, $\mu_2 = 1$, $J_1 = 0$, $J_2 = 1$ donnent le même monôme β.

280. Quotient homogène de degré un

Texte visé. Preuve du lemme 10.1.10, p. 265.

`redgrad.tex`, lignes 283–295.

Correction. Écrire l'élément de degré 1 comme un **quotient**

$$\lambda = \frac{\sum_p a_p T_\ell^p}{\sum_p b_p T_\ell^p},$$

où le dénominateur est non nul et les deux polynômes sont homogènes de même degré. Si le degré de T_ℓ a ordre n modulo le groupe de degrés du corps de coefficients, tous les exposants

des termes non nuls ont la même classe modulo n. Cela permet de mettre le même facteur T_ℓ^d en évidence en haut et en bas.

281. Degrés des coefficients après réduction du quotient

Texte visé. Preuve du lemme 10.1.10, p. 265.

`redgrad.tex`, lignes 295–305.

Correction. Après avoir extrait le facteur T_ℓ^d, les termes non nuls des deux polynômes ont le même degré $|\alpha_p| r_\ell^{np} = |c|$ ou $|\beta_p| r_\ell^{np} = |c|$. Choisir a homogène de degré r_ℓ^n. En remplaçant T_ℓ^n par $a(T_\ell^n/a)$ et en divisant par c, les coefficients deviennent $\alpha_p a^p/c$ et $\beta_p a^p/c$, tous de degré 1. Le quotient appartient donc à $\breve{L}^1(T_\ell^n/a)$.

282. Spectralité locale des schémas gradués

Texte visé. § 10.2.1, p. 266.

`redgrad.tex`, lignes 366–379.

Correction. Tout spectre affine gradué est spectral, et tout schéma gradué est localement spectral. Dans le cas affine, les ouverts homogènes $D(f)$ sont quasi-compacts, forment une base stable par intersections finies et les fermés irréductibles ont un point générique. Un recouvrement par des $D(f_i)$ force l'idéal homogène engendré par les f_i à être l'idéal unité, d'où un sous-recouvrement fini.

Contre-exemple. La réunion disjointe d'une infinité de copies de $\operatorname{Spec} k$, avec k trivialement gradué, est un schéma gradué. Le recouvrement par les points ouverts n'a aucun sous-recouvrement fini. Cet espace n'est pas spectral.

283. Anneau local de la multiplicité générique

Texte visé. § 10.2.1, p. 267.

`redgrad.tex`, lignes 382–385.

Correction. Pour la composante irréductible X_i du schéma noethérien gradué X, de point générique η_i, prendre

$$\operatorname{length}_{\mathscr{O}_{X,\eta_i}}(\mathscr{O}_{X,\eta_i}).$$

L'anneau local artinien de X en η_i conserve l'épaisseur nilpotente.

Exemple. Pour $X = \operatorname{Spec} k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ trivialement gradué, la composante munie de sa structure réduite a longueur 1. L'anneau local de X a longueur 2, par la suite $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2) \supset (\varepsilon) \supset 0$.

284. Critère valuatif de propreté graduée

Texte visé. Paragraphe 10.2.3, redgrad.tex, lignes 431–436, p. 267 (page imprimée et PDF).

Le texte affirme qu'un morphisme de type fini satisfaisant aux tests valuatifs gradués d'existence et d'unicité est propre. Soit A l'anneau trivialement gradué des suites à valeurs dans un corps k qui sont constantes à partir d'un certain rang. Le spectre $Y = \operatorname{Spec} A$ a pour points les évaluations aux indices n et l'évaluation ∞ à la valeur finale. Tous ces points sont fermés. Les ouverts $D(e_n) = \{n\}$, où e_n est l'idempotent de la n-ième coordonnée, ont pour réunion un ouvert dense U qui omet ∞ et n'est pas quasi-compact.

Recollons deux copies de Y le long de U. Le morphisme vers Y donné par l'identité sur chaque carte est de type fini et universellement fermé. Après tout changement de base, l'image d'un

fermé est la réunion de ses deux images fermées sur les cartes. Pour tout anneau gradué de valuation, le morphisme de base a pour image un seul point de Y, puisque son noyau est premier et que tous les premiers de A sont maximaux. Au-dessus de U les deux cartes coïncident. Au-dessus de ∞, l'irréductibilité du spectre gradué de l'anneau de valuation force tout relevé à utiliser la carte choisie par le point générique. Cette carte fournit un unique relevé. Sur le produit des deux cartes distinctes, la diagonale a pour image U, qui n'est ni fermé ni quasi-compact.

Pour un morphisme de type fini, la propreté équivaut à la quasi-séparation jointe à l'existence et à l'unicité des relevés valuatifs gradués. Elle équivaut aussi à la séparation jointe à l'existence de ces relevés.

La quasi-séparation rend la diagonale quasi-compacte, et l'unicité valuative rend son image stable par spécialisation, donc fermée. Après tout changement de base, pour une spécialisation issue de l'image d'un fermé, on prend un anneau gradué de valuation dans le corps résiduel gradué d'un point du fermé au-dessus du point générisant. Cet anneau domine l'anneau local de l'adhérence réduite du point générisant sur la base. Le relevé donne une spécialisation dans le fermé, de sorte que son image est stable par spécialisation. La quasi-compacité fournie par le type fini rend alors cette image fermée. Réciproquement, la fermeture universelle donne un point au-dessus du point fermé dans l'adhérence du relevé générique. L'anneau local de l'adhérence réduite en ce point est un sous-anneau du corps des fractions gradué qui domine l'anneau de valuation, donc lui est égal. La séparation donne l'unicité. L'espace projectif gradué satisfait au critère corrigé. Sa diagonale est fermée sur les produits de cartes et le choix d'une coordonnée homogène de valeur maximale donne le relevé valuatif.

285. Degrés des coefficients du Hom gradué

Texte visé. § 10.2.4, p. 268.

`redgrad.tex`, lignes 480–493.

Correction. Pour des bases locales de E et F de degrés s_j et r_i, respectivement, lire

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(E,F)|_U \simeq \bigoplus_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \mathscr{O}_U[r_i/s_j].$$

Dans un morphisme de degré interne ρ, le coefficient d'indice (i,j) a degré $\rho s_j/r_i$. Sur un corps trivialement gradué, un morphisme non nul $k[2]\to k[3]$ a ainsi degré $3/2$.

286. Descente de l'engendrement par les sections globales

Texte visé. Preuve du § 10.2.4, p. 268.

`redgrad.tex`, lignes 503–512.

Contre-exemple à l'identité des sections. Pour $X=\coprod_{n\ge 0}\operatorname{Spec} k$, $D=\mathscr{O}_X$ et $L=k(t)$, l'image de $k^{\mathbb{N}}\otimes_k L$ dans $L^{\mathbb{N}}$ omet $(t^n)_n$. Les coordonnées d'une somme finie de tenseurs appartiennent à un même sous-espace de dimension finie sur k.

Correction de la preuve. Pour l'extension de corps gradués L/K, poser $p : X_L \to X$. Sur les ouverts affines, $p_*p^*D = D\otimes_K L$ au niveau des faisceaux. Une base homogène de L sur K donne par projection des sections globales homogènes de D à partir des coefficients d'une section homogène de p^*D. Sur chaque ouvert affine trivialisant, un nombre fini de coefficients intervient. Pour $x\in X$, choisir un point au-dessus de x et une section qui y engendre p^*D. Au moins un coefficient est non nul dans la fibre en x, donc cette section de D engendre D au voisinage de x. L'argument porte sur les extensions de corps gradués.

287. Corps résiduel dans les facteurs de composition

Texte visé. Preuve du lemme 10.3.1(e), pp. 269–270.

`redgrad.tex`, lignes 607–627.

Correction. Dans la preuve de (e), pour un idéal premier minimal $\mathfrak{p}$, les facteurs de composition de l'anneau local artinien $A_{\mathfrak{p}}$ sont isomorphes à $\kappa(\mathfrak{p}) = \operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p})$. Pour une suite de composition croissante, écrire les facteurs I_{j+1}/I_j, puis tensoriser avec K sur K^1. La platitude donne les facteurs simples gradués $\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{K^1} K$, isomorphes au corps résiduel gradué. La longueur est donc conservée.

Exemple. Pour $A = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ et $\mathfrak{p} = (\varepsilon)$, les deux facteurs sont k, alors que $A_{\mathfrak{p}}$ a longueur 2 et possède un nilpotent non nul.

288. Irréductibilité après déploiement

Texte visé. Preuve du lemme 10.3.5(a), p. 271.

`redgrad.tex`, lignes 760–774.

Contre-exemple à la réduction par recouvrement. Deux points disjoints forment un espace réductible recouvert par deux ouverts irréductibles.

Correction. Si X est irréductible et $\operatorname{Spec} A \subseteq X$ est un ouvert affine non vide, le quotient A/N par le nilradical est intègre. Après extension transcendante, $(A/N)_\rho$ est un localisé d'un anneau de polynômes sur A/N, donc est intègre. Le prolongement de N reste le nilradical, d'où l'irréductibilité de chaque image réciproque affine. Deux ouverts affines non vides de X se rencontrent. Leurs images réciproques se rencontrent par surjectivité, et la réunion de toutes ces images réciproques est irréductible. Réciproquement, la surjectivité donne l'irréductibilité de X depuis celle de X_ρ. L'identification avec X_ρ^1 est un homéomorphisme. La réduction se vérifie localement par extension polynomiale, localisation et injectivité de l'extension des scalaires.

289. Décalages dans les facteurs de multiplicité générique

Texte visé. Preuve du lemme 10.3.5(b), p. 272.

`redgrad.tex`, lignes 784–794.

Correction. Calculer la multiplicité au point générique η sur l'anneau local du schéma d'origine. Les facteurs simples gradués y sont des $\kappa(\eta)[\rho_j]$ avec des décalages propres à chaque facteur. Par localisation homogène, étendre le nombre fini d'identifications à un même voisinage affine. On obtient des quotients $(A/N)[\rho_j]$ dans la filtration. L'extension plate conserve les quotients décalés, qui restent de longueur 1 au nouveau point générique. L'équivalence avec le modèle de degré 1 conserve ensuite la longueur.

Exemple. Pour $A = k[\varepsilon/r]/(\varepsilon^2)$ avec k trivialement gradué et $r \neq 1$, les facteurs sont k et $k[r]$. Le second facteur n'a aucun élément non nul de degré 1.

290. Déploiement du fibré en droites

Texte visé. § 10.3.7, p. 272.

`redgrad.tex`, lignes 843–857.

Correction. Choisir un polyrayon fini qui inclut les degrés des coordonnées projectives et ceux nécessaires au déploiement de X et du fibré E. Pour l'extension L correspondante, l'immersion

de degré 1 est

$$(X_L)^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{L^1}.$$

On applique ensuite le choix des puissances engendrées de n° 291 et la descente par extension de corps.

Exemple. Pour $K = k$ trivialement gradué, $X = \mathbb{P}^0_k$ et $E = k[2]$, le rayon projectif 1 ne suffit pas. Le corps $k(T/1)$ n'apporte aucun scalaire de degré 2 permettant de normaliser le générateur.

291. Sections globales des puissances et des twists

Texte visé. § 10.3.7, pp. 272–273.

`redgrad.tex`, lignes 857–860.

Correction. Sur le schéma ordinaire déployé, choisir $m > 0$ assez grand pour que $(D^1_r)^{\otimes m}$ et $(D^1_r)^{\otimes m} \otimes (E^1_r)^\vee$ soient engendrés par leurs sections globales. La très-amplitude donne l'engendrement des puissances positives de D^1_r. Pour le deuxième fibré, appliquer le théorème d'engendrement des faisceaux cohérents après un twist assez grand, sur une clôture projective. Cette propriété redescend ensuite comme dans le texte, dont la conclusion se poursuit p. 273.

Contre-exemple à l'implication imprimée. Sur une courbe elliptique projective lisse sur un corps algébriquement clos, prendre $D = \mathscr{O}(3P)$, $E = \mathscr{O}(2P)$ et $m = 1$. Le fibré $D \otimes E^\vee = \mathscr{O}(P)$ est ample, mais sa section génératrice de l'espace des sections s'annule en P.

292. Composantes d'une hypersurface près du lieu à découper

Texte visé. Preuve du lemme 10.4.4, p. 274.

`redgrad.tex`, lignes 967–982.

Contre-exemple. Pour $Y = \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{A}^2_k$ et $f = xy$, les deux axes de $V(f)$ contiennent Y. Tout ouvert qui contient Y rencontre les deux axes. La restriction proposée ne garde donc pas une seule composante.

Correction. Pour un schéma ordinaire, choisir ensemble les paramètres à l'anneau local du point générique de Y, puis retirer les autres composantes du lieu de leurs zéros. À la ligne 981, l'ouvert V de Z s'écrit $V = U \cap Z$. Dans le cas gradué général, utiliser la famille finie de générateurs homogènes de n° 42.

293. Dimension pure dans la formule de projection graduée

Texte visé. Proposition 10.4.8(d), p. 275, et sa preuve, p. 277 (pages imprimées et PDF). Dans redgrad.tex, lignes 1056–1059 et ligne 1105.

Soit k un corps trivialement gradué, $X = \mathbf{P}^1_k$ et $Y = \mathbf{P}^1_k \amalg \operatorname{Spec} k$. Sur la première composante, le morphisme $f : Y \to X$ est l'identité. Sur la seconde, c'est l'inclusion d'un point k-rationnel de X. Le morphisme est fini, propre et de degré générique 1. Pourtant, Y n'est pas de dimension pure. Pour $D_1 = \mathscr{O}_X(1)$, l'intégrale sur Y affichée dans la proposition sort du cadre de la définition 10.4.7. Au sens d'un morphisme fini au-dessus d'un ouvert dense, on peut aussi prendre $\mathbf{P}^1_k \amalg \mathbf{P}^2_k$ en envoyant la seconde composante sur ce même point.

Dans (d), supposer de plus que Y est purement de dimension n et prendre pour d le degré générique du cycle fondamental $f_*[Y]$ sur X. Les composantes dominantes contribuent par leurs degrés génériques, pondérés par leurs multiplicités génériques. Les composantes verticales de dimension n ont une image de dimension inférieure et leur contribution à $f_*[Y]$ est nulle. Ainsi $f_*[Y] = d[X]$, et la formule de projection ordinaire s'applique après un

déploiement rationnel commun et le passage au cas strict. Il suffit en particulier que Y soit intègre et que f soit dominant et génériquement fini.

À la ligne 1105, calculer le degré générique comme le rang homogène de l'algèbre générique finie. Le déploiement rationnel commun tensorise cette algèbre sur le corps générique gradué du but et préserve ce rang. Dans la comparaison stricte en degré 1, ce rang est le degré ordinaire utilisé dans la formule.

294. Propreté requise pour le nombre d'intersection

Texte visé. Remarque 10.4.9, p. 277.

`redgrad.tex`, lignes 1118–1129.

Correction. Dans la remarque, supposer X propre et de type fini sur K, et purement de dimension n, comme dans la définition qui précède. Les décalages gradués se trivialisent après une extension dont le groupe des degrés contient les r_i. L'invariance par extension des scalaires donne alors

$$\int_X c_1(D_1)\cdots c_1(D_n) = \int_X c_1(D_1[r_1])\cdots c_1(D_n[r_n]).$$

Exemple. Sur $\mathbb{A}^1_k$, le diviseur principal de T est le point 0, de degré 1. Le degré usuel des points ne fournit donc pas le degré d'intersection sur ce schéma non propre.

295. Fibre générique de la famille de spécialisation

Texte visé. § 10.4.11, p. 277.

`redgrad.tex`, lignes 1142–1162.

Correction. Pour $L = K(T/r)$, soit $p : X \times_K \mathbb{A}^r_K \to \mathbb{A}^r_K$ la projection. Sa fibre générique est X_L. Si $Y \subseteq X_L$ est le sous-schéma fermé intègre considéré et Y' son adhérence réduite, la fibre générique de la **restriction** $p|_{Y'}$ est Y. C'est cette famille qui intervient dans l'argument de conservation du nombre.

Exemple. Pour $X = \mathbb{P}^1_K$ et Y le point 0 sur X_L, la fibre générique de p est une droite projective et celle de $p|_{Y'}$ est un point.

296. Hypothèse sur le degré dans l'exemple de Laurent

Texte visé. Exemple 10.5.2, p. 279.

`redgrad.tex`, lignes 1231–1240.

Correction. Supposer $r > 0$ et $r \neq 1$. Alors les degrés r^i sont distincts et chaque élément homogène non nul de $k[t,t^{-1}]$ est un monôme inversible at^i. Une valuation triviale sur k est déterminée à équivalence près par la position de $v(t)$ par rapport à 1. On obtient les trois points et les ouverts décrits.

Pour $r = 1$, le polynôme homogène non nul $1 + t$ n'est pas inversible dans l'anneau de Laurent. Cet anneau n'est alors pas un corps gradué.

297. Degrés du faisceau sur l'espace de valuations

Texte visé. § 10.5.4, p. 279.

`redgrad.tex`, lignes 1266–1298.

Correction. Sous l'hypothèse de torsion, conserver l'homéomorphisme de restriction et l'identification du faisceau de degré 1. Pour le faisceau gradué $\mathscr{O}$, la multiplication donne

$$\mathscr{O}^1 \otimes_{K^1} K \simeq \bigoplus_{r \in |K^\times|} \mathscr{O}^r.$$

En degré $r \in |K^\times|$, la division par une unité homogène de K de ce degré donne une section de degré 1. On obtient tout $\mathscr{O}$ si les groupes $|L^\times|$ et $|K^\times|$ sont égaux.

Contre-exemple à l'égalité sous la seule torsion. Poser $K = k[s, s^{-1}]$, $|s| = 4$, et $L = k[t, t^{-1}]$, $|t| = 2$, avec $s = t^2$. L'espace de valuations est un singleton et son anneau est L. Le membre tensoriel vaut K et ne contient pas la composante kt de degré 2.

298. Raffinement constructible des choix de maxima

Texte visé. Preuve du théorème 10.5.7(2), pp. 282–283.

`redgrad.tex`, lignes 1537–1550.

Correction. Dans chaque $\mathscr{U}_j$, choisir simultanément, pour chaque couple (k, ℓ), un indice $J_{k\ell}$ de coefficient non nul au numérateur et un indice $J'_{k\ell}$ de coefficient non nul au dénominateur. Intersecter $\mathscr{U}_j$ avec toutes les conditions

$$v(c_{jk\ell,I}) \le v(c_{jk\ell,J_{k\ell}}), \qquad v(d_{jk\ell,I}) \le v(d_{jk\ell,J'_{k\ell}}).$$

Ces intersections constructibles finies recouvrent $\mathscr{U}_j$ puisque chaque famille de coefficients possède un maximum. Sur chaque morceau, tous les rapports de maxima sont les valeurs de $c_{jk\ell,J_{k\ell}}/d_{jk\ell,J'_{k\ell}}$ à la fois. Les ex æquo peuvent faire se chevaucher les morceaux.

Exemple. Pour $v(z) < 1$, les maxima des coefficients de $1 + zT$ et de $z + T$ se trouvent à des indices différents.

299. Homogénéité dans la formule d'orthonormalité

Texte visé. § 10.6.4, p. 284.

`redgrad.tex`, lignes 1703–1719.

Correction. Dans la définition d'une base orthonormée (e_i), appliquer la formule $v(\sum_i a_i e_i) = \sup_i v(a_i)$ aux familles pour lesquelles les termes $a_i e_i$ non nuls ont un même degré. Leur somme est alors un vecteur homogène, comme l'exige le domaine de la métrique.

300. Critère intrinsèque pour le maximum des coefficients

Texte visé. § 10.6.5, pp. 284–285.

`redgrad.tex`, lignes 1743–1751.

Correction. Pour $s = \sum_i a_i e_i$ homogène et $\lambda \in L^\times$ homogène, écrire

$$\max_i v(a_i) \le v(\lambda) \iff v(\lambda^{-1} a_i) \le 1 \text{ pour tout } i \iff \lambda^{-1} s \in E_v.$$

La dernière équivalence utilise la base de E_v sur $\mathscr{O}_v$. Pour $s \neq 0$, le maximum est atteint par un coefficient non nul et appartient à $v(L^\times)$. Les seuils intrinsèques le déterminent, ce qui prouve l'indépendance de la base. Pour $s = 0$, le maximum vaut 0.

Exemple. Pour $E = \mathscr{O}$, $s = 1$ et $v(z) < 1$, l'appartenance de s à E_v n'entraîne pas celle de $z^{-1} s$.

301. Même ouvert pour une base et son orthonormalité

Texte visé. § 10.6.6, p. 285.

`redgrad.tex`, lignes 1759–1771.

Correction. Une base homogène (e_i) de M est orthonormée au-dessus de V si et seulement si les $e_i|_V$ forment une base de $F|_V$. En effet, sur V, le réseau unité dans chaque fibre s'écrit $\bigoplus_i \mathscr{O}_v e_i$ pour une base orthonormée. Réciproquement, cette égalité caractérise le maximum des valeurs des coefficients d'un vecteur homogène en comparant les réseaux après multiplication par les scalaires homogènes.

302. Corps de base pour la restriction des valuations

Texte visé. § 10.6.8, p. 285.

`redgrad.tex`, lignes 1784–1793.

Correction. Prendre $K' \subseteq L' \cap K$. Une valuation de L triviale sur K se restreint alors à une valuation de L' triviale sur K', ce qui définit la flèche des espaces de Zariski–Riemann. Dans un repère du fibré sur U', la norme d'une section homogène se calcule par le maximum des valeurs de ses coefficients. Ces coefficients appartiennent à L', donc le même maximum se calcule après tiré en arrière.

303. Norme duale dans une base orthonormée

Texte visé. Exemple 10.6.10, p. 285.

`redgrad.tex`, lignes 1810–1822.

Correction. Pour une base homogène orthonormée (e_i) en v et une forme linéaire homogène s, sa norme duale est

$$v(s) = \max_i v(s(e_i)).$$

L'inégalité ultramétrique donne $v(s(t)) \leq v(s)\,v(t)$ pour tout vecteur homogène t. Pour $s \neq 0$, l'égalité est atteinte pour un e_i qui réalise le maximum. Par exemple, sur L^2, la première projection a norme 1 et s'annule sur le second vecteur unitaire. L'égalité imprimée pour tout t échoue donc déjà pour cette base.

304. Décalages des espaces génériques lors de la descente

Texte visé. Remarque 10.6.13, pp. 286–287.

`redgrad.tex`, lignes 1899–1913.

Correction. Pour chaque fibré E_ℓ de la famille finie, choisir une base générique homogène de degrés $\mathbf{r}_\ell = (r_{\ell,j})_j$ et écrire $E_{\ell,\eta} \simeq L[\mathbf{r}_\ell]$. Sur un recouvrement fini du quasi-compact U par des ouverts affines, les repères de E_ℓ ont des coefficients homogènes dans ces bases. Les paramètres des ouverts et tous les coefficients non nuls forment une famille finie. Les adjoindre à K pour obtenir le corps gradué de définition M. La descente se fait à partir de $M[\mathbf{r}_\ell]$, en conservant les mêmes décalages.

305. Décalage et repères de la puissance tensorielle

Texte visé. Preuve du lemme 10.6.14, p. 287.

`redgrad.tex`, lignes 1923–1948.

Correction. Si la fibre générique de E est $L[\rho]$, celle de $E^{\otimes q}$ est $L[\rho^q]$. Sur un ouvert défini par des paramètres $S_i \subset M^\times$, les inégalités sur ces paramètres équivalent à celles sur $S_i^q \subset N$. Les coefficients et fonctions de transition des repères de la puissance tensorielle sont les puissances q-ièmes des données scalaires de départ. Le réseau ainsi construit descend sur la droite graduée $N[\rho^q]$. Le décalage ρ peut être un rayon positif quelconque.

306. Changement de repère de la norme inverse

Texte visé. Remarque 10.6.17, pp. 287–288.

`redgrad.tex`, lignes 2000–2013.

Correction. Partir de $v(t)^{-1} = \max_i v(b_i)$. Pour un autre repère homogène non nul s, écrire

$$v(s)^{-1} = v(t/s)v(t)^{-1} = \max_i v(a_i), \qquad a_i = (t/s)b_i.$$

Les quotients $a_i/a_j = b_i/b_j$ appartiennent au même corps gradué de définition.

307. Choix fini de sections génératrices

Texte visé. Remarque 10.6.17, redgrad.tex, lignes 2004–2006, p. 288 (imprimée et PDF).

Pour obtenir une formule de maximum finie sur tout U', supposer que U' est quasi-compact ou que E' possède une famille finie de sections génératrices. Chaque section homogène engendre le fibré sur un ouvert. La quasi-compacité permet de choisir un nombre fini de ces ouverts qui recouvrent U'.

La génération globale seule ne donne pas ce choix fini. En graduation triviale, prenons $K' = k$, $K = L = L' = k(x, y)$ et $b_n = x^n y^{-n^2}$ pour $n \geq 0$. Soit U_n l'ouvert défini par $v(y) \geq 1$, $v(b_{n+1}/b_n) \leq 1$ et, pour $n > 0$, $v(b_{n-1}/b_n) \leq 1$. Les valeurs des rapports successifs sont décroissantes sur U_n, donc $v(b_m) \leq v(b_n)$ pour tout m. Sur $U' = \bigcup_n U_n$, les repères $b_n t$ se recollent, leurs rapports étant des unités sur les intersections. Toutes les sections $b_m t$ sont globales et engendrent E'. L'image réciproque U se réduit à la valuation triviale. Pour la valuation monomiale $v_n \in U_n$ de poids logarithmiques $2n, 1$ sur x, y, on obtient $\log v_n(t)^{-1} = n^2$. Le logarithme de la valeur de toute fraction rationnelle fixée est $O(n+1)$. Aucune famille finie ne peut donc donner le maximum sur tout U'.

Pour la conclusion sur l'ouvert quasi-compact U, on choisit un nombre fini d'ouverts de génération qui couvrent $\pi(U)$, puis on tire en arrière les sections $b_i t$ correspondantes. Après extension du corps, $v(t)^{-1} = \max_i v(b_i)$ sur U. Pour un autre vecteur générique homogène non nul s, la formule corrigée de n° 306 donne

$$v(s)^{-1} = \max_i v(a_i), \qquad a_i = (t/s)b_i, \qquad a_i/a_j = b_i/b_j \in (L')^\times.$$

308. Élément exclu des deux anneaux de valuation

Texte visé. Preuve de la proposition 10.7.5, p. 290.

`redgrad.tex`, lignes 2233–2243.

Correction. Soit w le centre commun sur le pré-modèle choisi. Si $f \in \mathscr{O}_{W,w}$, son image appartient aux deux anneaux de valuation. Dans le cas restant, f^{-1} est dans l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{W,w}$, puis dans les deux idéaux maximaux des anneaux de valuation. C'est donc f qui n'appartient à aucun des deux anneaux. Cette alternative pour tout $f \in L^\times$ prouve leur égalité.

309. Pré-modèles sur des ouverts non vides

Texte visé. §10.7.7 et remarque 10.7.8, redgrad.tex, lignes 2294–2312, 2315–2317 et 2327–2330, p. 291 (imprimée et PDF).

Dans les trois passages, l'ouvert quasi-compact U doit être non vide. En effet, la valuation triviale de L a pour centre le point générique de tout pré-modèle intègre. Son anneau de valuation L domine le corps gradué de ce point, vu comme sous-corps de L. Le lieu des centres contient donc la valuation triviale. Avec $L = K = k$, le fibré de rang un sur l'ouvert vide existe et est engendré par ses sections globales, mais aucun pré-modèle ne peut avoir l'ouvert vide pour lieu des centres. L'extension L/K est ici de type fini, ce qui donne aussi l'obstruction à l'existence d'un modèle.

Pour U non vide, on choisit un recouvrement fini par des ouverts de base munis de repères homogènes. Les données de ce recouvrement, les matrices de transition et leurs inverses se réalisent sur un pré-modèle commun. Les matrices et leurs inverses sont réguliers sur les intersections correspondantes. On recolle les fibrés sur l'union des ouverts obtenus, dont le lieu des centres est exactement U. Cela vaut aussi pour une famille finie de fibrés. Lorsque L/K est de type fini, la construction par graphes projectifs assure en outre que le corps des fonctions du modèle est L.

L'équivalence aux lignes 2315–2317 vaut pour U non vide. On ajoute les coefficients d'une famille finie de sections génératrices aux données à réaliser. À chaque point du pré-modèle, une valuation centrée en ce point donne un coefficient qui est une unité. La réalisation de ce coefficient et de son inverse le rend inversible dans l'anneau local. La réciproque résulte de l'image réciproque des sections.

Dans la remarque 10.7.8, la courbe canonique normale C donne le modèle $(\rho(U), \rho_* E)$ sur un ouvert U non vide. Par exemple, pour $L = k(z)$ sur $K = k$, l'image de l'ouvert vide est l'ouvert vide de la courbe et celui-ci n'a pas de corps des fonctions.

310. Dimension des composantes du modèle déployé

Texte visé. § 10.7.13, p. 292.

`redgrad.tex`, lignes 2414–2417.

Correction. Poser $d = \operatorname{trdeg}(L/K)$ dans la construction de type fini. Les composantes réduites V_j de V' ont toutes dimension d. Si $n > d$, les nombres d'intersection des deux côtés sont nuls. Pour $n = d$, calculer en degré maximal et pondérer les intégrales sur les V_j par les longueurs génériques m_j de V'.

Exemple. Pour $L = K' = K$, $V = \operatorname{Spec} K$ et $n = 1$, la composante unique de V' est de dimension 0.

311. Domaine de la réduction classique

Texte visé. § 10.8.1, p. 294, `redgrad.tex`, lignes 2544–2548.

Correction. L'application de réduction classique est le quotient

$$A^\circ = \{a \in A : \|a\| \leq 1\} \longrightarrow \widetilde{A}^1 = A^\circ / A^{\circ\circ}, \qquad A^{\circ\circ} = \{a \in A : \|a\| < 1\}.$$

Pour $A = \mathbb{Q}_p$ muni de sa norme usuelle, p^{-1} est de norme $p > 1$, donc hors du domaine de ce quotient. Projeter les formes initiales sur le degré 1 enverrait p et p^{-1} sur zéro, alors que leur produit est envoyé sur un.

312. Réduction spectrale ultramétrique

Texte visé. §11.1.1, p. 298 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, lignes 85–89.

Supposer que la semi-norme spectrale ρ est ultramétrique avant de former la réduction graduée et le quotient de degré un. Le paragraphe suivant établit cette propriété pour une k-algèbre de Banach munie d'une norme d'espace vectoriel compatible avec la valeur absolue de k. On peut placer la construction de la réduction après cet argument.

Une norme structurale ultramétrique suffit aussi. Pour chaque semi-norme multiplicative bornée ϕ du spectre et chaque entier n, on a $\phi(n) \leq 1$. La formule du binôme appliquée à $(a+b)^m$, puis le passage aux racines m-ièmes, donnent $\phi(a+b) \leq \max(\phi(a), \phi(b))$. En prenant le supremum, on obtient la même inégalité pour ρ.

Sur **C** muni de la valeur absolue usuelle, la norme spectrale est cette valeur absolue et sa boule unité contient 1 mais pas $1+1$. L'hypothèse porte sur la réduction. Le spectre de Banach défini dans le texte précédent s'applique toujours au cas général.

313. Rayons strictement positifs des inégalités rationnelles

Texte visé. § 11.1.5, p. 299.

`rappels-ga.tex`, lignes 181–205.

Correction. Exiger $\lambda_i > 0$ pour chaque inégalité $|f_i| \leq \lambda_i |g|$ d'un système rationnel. Ces nombres sont les rayons de l'algèbre affinoïde utilisée pour décrire le domaine.

314. Algèbre de coefficients de la localisation rationnelle

Texte visé. § 11.1.5, p. 299.

`rappels-ga.tex`, lignes 201–205.

Correction. Pour le domaine rationnel V de $X = \mathscr{M}(A)$, écrire

$$A_V \simeq A\{T_1/\lambda_1, \dots, T_n/\lambda_n\}/(f_i - T_i g)_i.$$

Les coefficients f_i, g appartiennent à A et les rayons λ_i sont strictement positifs.

315. Base des deux produits fibrés

Texte visé. § 11.1.9, p. 301.

`rappels-ga.tex`, lignes 336–340.

Correction. Pour les deux morphismes structuraux $Y \to X$ et $X' \to X$, lire $Y \times_X X'$ aux deux endroits indiqués. Si L est le corps de définition de X', l'identification donnée est

$$Y \times_X X' \simeq Y_L \times_{X_L} X'.$$

Le produit de droite se calcule dans la catégorie des espaces L-analytiques.

316. Portée de la correspondance entre points fermés et rigides

Texte visé. § 11.1.11, p. 302.

`rappels-ga.tex`, lignes 382–398.

Correction. Énoncer la correspondance entre points rigides et points fermés pour les k-schémas localement de type fini. Si l'on retient le cadre initial d'un schéma localement de type

fini sur une algèbre affinoïde A, limiter la correspondance aux points fermés dont le corps résiduel est fini sur k. L'analytification relative et les autres énoncés de comparaison de ce paragraphe ont leurs propres hypothèses.

317. Rayon de la semi-norme de Gauss

Texte visé. Exemple 11.1.13, p. 303.

`rappels-ga.tex`, lignes 446–453.

Correction. Dans la définition de $\eta_{a,r}$, imposer $r \geq 0$. Pour $r = 0$, conserver la semi-norme d'évaluation $P \mapsto |P(a)|$, qui définit le point rationnel d'équation $T = a$.

318. Rayon des points de type III

Texte visé. Exemple 11.1.13, p. 303.

`rappels-ga.tex`, lignes 499–505.

Correction. Sous l'hypothèse du corps de base algébriquement clos, les points de type III sont les $\eta_{a,r}$ avec $a \in k$ et $r \in \mathbb{R}_{>0} \setminus |k^\times|$. Pour $r = 0$ on obtient un point d'évaluation de type I.

319. Recollement des ouverts relatifs

Texte visé. Preuve du lemme 11.1.15, p. 304.

`rappels-ga.tex`, lignes 588–596.

Correction. Les ouverts relatifs $\Omega \subset W$ et $\Omega' \subset V_n$ coïncident sur $W \cap V_n$, et W, V_n forment le recouvrement compact considéré de X. Donc

$$X \setminus (\Omega \cup \Omega') = (W \setminus \Omega) \cup (V_n \setminus \Omega').$$

Les deux termes de droite sont fermés dans X, chaque membre du recouvrement étant fermé. La réunion $\Omega \cup \Omega'$ est donc l'ouvert voulu dans U. Le cas de base affinoïde garde le rôle qui lui est donné dans la preuve.

320. Bord relatif d'un domaine analytique

Texte visé. §11.4.1, p. 310 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, lignes 945–950.

Pour l'inclusion d'un domaine analytique $Y \subset X$, lire

$$\partial(Y/X) = Y \setminus \mathrm{Int}_X(Y) = Y \cap \mathrm{Fr}_X(Y).$$

L'intérieur relatif est l'intérieur topologique d'après Berkovich 1993, proposition 1.5.5(i). On prend son complémentaire dans Y d'après la définition 1.5.4. Le bord relatif égale donc la frontière entière lorsque Y est fermé.

Par exemple, le disque ouvert $Y = \{|T| < 1\}$ de la droite affine analytique a un bord relatif vide. Le point de Gauss de rayon 1 appartient à sa frontière dans la droite. En effet, les points de Gauss de rayon $r < 1$ convergent vers ce point lorsque r croît vers 1, par continuité du maximum des termes pondérés de chaque polynôme.

321. Bords des images réciproques des domaines fermés

Texte visé. §11.4.2, p. 311 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, lignes 1020–1024.

Notons F le disque fermé D ou son domaine extérieur fermé E, et $W_F = f^{-1}(F)$. Le domaine F est séparé et $\partial F = \{\eta_r\}$. La formule de composition appliquée à $W_F \to F \to \mathscr{M}(k)$ place donc chaque point de $f^{-1}(\eta_r)$ dans ∂W_F.

Hors de $f^{-1}(\eta_r)$, le domaine W_F est un voisinage ordinaire dans X, car $F \setminus \{\eta_r\}$ est ouvert dans la droite affine analytique. Les germes ouverts identifient les bords absolus à ces points. Dans les deux cas on obtient

$$\partial W_F = (W_F \cap \partial X) \cup f^{-1}(\eta_r).$$

322. Point rationnel régulier en valuation triviale

Texte visé. §11.4.8, p. 313 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, lignes 1173–1174.

La démonstration publiée du lemme 6.2(iii) de Ducros 2009 utilise la valuation non triviale pour choisir un voisinage affinoïde strict. Lorsque k est trivialement valué, prendre l'extension $L = k_r$ associée à un rayon k-libre r, avec $0 < r < 1$. Elle est analytiquement séparable sur k.

Le point rationnel donné se relève en un point L-rationnel. La régularité monte à ce point par séparabilité analytique. Le lemme s'applique alors sur L, puis l'invariance de la dimension locale et de la dimension de la fibre des différentielles sous extension complète fait redescendre leur égalité au point initial.

323. Voisinages dans le cas non séparé

Texte visé. Preuve du lemme 11.4.10, pp. 313–314.

`rappels-ga.tex`, lignes 1222–1231.

Correction. Dans le cas général, appliquer le cas séparé dans chaque domaine affinoïde X_i au fermé de Zariski $Y \cap X_i$ contenu dans $V \cap X_i$. On obtient un ouvert relatif de X_i contenant y. L'écrire $U_i \cap X_i$, avec U_i ouvert dans X, de sorte que

$$y \in U_i, \qquad U_i \cap X_i \subseteq V \cap X_i.$$

Alors $\mathrm{Int}_X(\bigcup_i X_i) \cap \bigcap_i U_i$ est un voisinage ouvert de y. Chaque point de cet ouvert appartient à au moins un X_i et au U_i correspondant, donc à V.

324. Ouverts de la réduction d'un germe fixé

Texte visé. § 11.7.3, p. 320, `rappels-ga.tex`, lignes 1785–1787.

Correction. Par le théorème 4.5 de Temkin, les germes de domaines analytiques de (X, x) correspondent aux ouverts quasi-compacts non vides de $\widetilde{(X, x)}$. Dans l'espace de Zariski–Riemann ambiant P, ce sont les ouverts quasi-compacts non vides contenus dans cette réduction.

Prenons k complet de valuation triviale, le disque unité $X = \mathscr{M}(k\{T\})$ et son point de Gauss x. On a $\widetilde{\mathscr{H}(x)} = k(T)$ et $\widetilde{(X, x)} = P\{T\}$. La valuation à l'infini est dans l'ouvert de base quasi-compact $P\{T^{-1}\}$ et hors de $P\{T\}$. Par monotonie, la réduction d'un germe de domaine de (X, x) est contenue dans $P\{T\}$, ce qui exclut cet ouvert ambiant.

325. Non-annulation dans la réduction d'une fonction de module constant

Texte visé. Remarque 11.7.4, pp. 320–321.

`rappels-ga.tex`, lignes 1798–1807.

Correction. Ajouter $f(x) \neq 0$, ce qui signifie que f est inversible dans le germe analytique en x. Sans cette condition, $f = 0$, avec $Y = X$, satisfait l'hypothèse de module constant et sa classe ne peut pas être inversible.

Sur un représentant assez petit, f^{-1} est analytique. Le domaine $\{|f| = |f(x)|\}$ est défini par $|f| \leq |f(x)|$ et $|f^{-1}| \leq |f^{-1}(x)|$. Le § 11.7.3 fournit ainsi, sur $\widetilde{(Y,x)}$, les deux sections régulières inverses $\widetilde{f(x)}$ et $\widetilde{f(x)}^{-1}$.

326. Algèbre finie dans la réciproque

Texte visé. Preuve du lemme 11.8.5, p. 323.

`rappels-ga.tex`, lignes 1967–1976.

Correction. Avec $B = \widetilde{k}[S]$, $C = \widetilde{k}[E]$ et $D = C[S]$, appliquer le critère d'intégralité à $C \subseteq D$. L'égalité des ouverts valuatifs définis par $S \cup E$ et E rend chaque $s \in S$ entier sur C. La famille S est finie, donc D est fini sur C et contient B. Son corps gradué des fractions est fini sur celui de C, d'où la torsion des degrés des éléments homogènes non nuls de B modulo le groupe des degrés de $\mathrm{Frac}(C)$.

Exemple. Sur k trivialement valué, avec $B = k[t^2, t^3]$ dans $k(t)$ et $E = \{t\}$, les ouverts valuatifs sont les mêmes, mais $t \cdot 1 \notin B$. L'algèbre à laquelle s'applique le critère est alors $D = k[t]$.

327. Cible de la réduction des germes stricts

Texte visé. § 11.8.6, pp. 323–324.

`rappels-ga.tex`, lignes 1998–2001.

Correction. La bijection par $(V,x) \mapsto \widetilde{(V,x)}^{\,1}$ a pour cible les ouverts quasi-compacts non vides **de la réduction** $\widetilde{(X,x)}^{\,1}$. Dans l'espace de Zariski–Riemann ambiant, ce sont les ouverts quasi-compacts non vides contenus dans cette réduction.

Contre-exemple. Sur k trivialement valué, pour $X = \mathscr{M}(k\{T\})$ et son point de Gauss x de rayon 1, la réduction est l'ouvert qui borne T. L'ouvert ambiant qui borne T^{-1} contient la valuation à l'infini, où T est non borné. Il ne peut donc être la réduction d'un sous-domaine du germe (X,x).

328. Réduction spectrale sur un corps trivialement valué

Texte visé. § 11.9.1, p. 324.

`rappels-ga.tex`, lignes 2045–2048.

Correction. Dans le cas où k est trivialement valué, lire

$$A = A_k, \qquad \widetilde{A_k}^{\,1} = A_{\mathrm{red}}.$$

Les nilpotents ont une semi-norme spectrale nulle. Tout élément non nilpotent subsiste dans un quotient par un idéal premier, où la valeur triviale vaut 1 sur son image. La réduction A_{red} reste de type fini sur k. Par exemple, pour $A = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, cette réduction est k.

329. Ensemble ambiant dans la définition spectrale

Texte visé. § 11.9.1, p. 324.

`rappels-ga.tex`, lignes 2059–2063.

Correction. Dans le test ponctuel de la ligne 2060, faire varier f dans A_k. Ainsi A_k° se compose des $f \in A_k$ tels que $|f(x)| \leq 1$ en tout point x de la fibre générique. Pour $A = \mathbb{Z}_p[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, l'élément ε/p de $A_k = \mathbb{Q}_p[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ a valeur nulle en tout point et n'appartient pas à A.

330. Clôture intégrale dans l'algèbre générique

Texte visé. § 11.9.1, p. 324.

`rappels-ga.tex`, lignes 2063–2065.

Correction. Dans la dernière phrase du paragraphe, lire « la fermeture intégrale de A dans A_k ». L'argument établit que A_k° est entier sur A et intégralement clos dans A_k. Dans l'exemple $A = \mathbb{Z}_p[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, le nilpotent ε/p est entier sur A car son carré est nul, et il appartient à A_k hors de A.

331. Lieu de dimension nulle et bord de Shilov

Texte visé. Après la proposition 11.10.4, p. 326.

`rappels-ga.tex`, lignes 2231–2232.

Correction. Pour $d = \dim X$, conserver que le lieu $\{x : \dim \overline{\{\pi(x)\}} \geq d\}$ est faiblement analytique et de dimension au plus zéro. Supprimer l'identification de ce lieu avec tout le bord de Shilov.

Contre-exemple. Pour $X = \mathscr{M}(k\{T\} \times k)$, la réunion disjointe d'un disque et d'un point, $\dim X = 1$. L'idempotent $(0, 1)$ atteint son maximum strictement sur le point isolé, qui appartient donc au bord de Shilov. L'adhérence de sa réduction a dimension 0, ce qui exclut ce point du lieu de dimension résiduelle au moins 1.

332. Égalité avec le point de Gauss

Texte visé. Preuve de la proposition 11.10.4, pp. 326–327.

`rappels-ga.tex`, lignes 2239–2249.

Correction. Pour $f_I = (f_i)_{i \in I}$ et le polyrayon r_I, lire

$$f_I(x) = \eta_{r_I}$$

où η_{r_I} est le point de Gauss. L'indépendance algébrique des résidus homogènes empêche l'annulation des termes de norme de Gauss maximale dans un polynôme. Réciproquement, une relation homogène entre les résidus ferait baisser cette norme. Le lieu est donc la réunion finie des fibres $f_I^{-1}(\eta_{r_I})$ indiquée dans la preuve.

Exemple. Sur le disque unité, le point rigide $T = 1$ satisfait $|T| = 1$, mais son résidu est algébrique. Les seules égalités de valeurs absolues ne suffisent pas.

333. Clôture séparable aux points du squelette

Texte visé. Corollaire 12.1.8(c), p. 332.

`squelettes.tex`, lignes 226–281.

Correction. Pour tout $x \in S(\mathbb{G}_m^n)$, le corps k est séparablement clos dans $\mathscr{H}(x)$. En effet, le produit tensoriel complété avec la clôture algébrique complétée de k est un corps par (b). Une sous-extension séparable finie non triviale de $\mathscr{H}(x)/k$ y induirait des idempotents non triviaux.

Exemple. Le point rigide de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{Q}_3$ défini par T^2+1 a pour corps résiduel complété l'extension séparable quadratique $\mathbb{Q}_3(i)$.

334. Domaine de définition du moment perturbé

Texte visé. § 12.1.14, assertion (2), p. 334.

`squelettes.tex`, lignes 478–485.

Correction. Rétrécir X à un voisinage de x où chaque $|g_i| < |f_i|$. Les f_i+g_i y sont inversibles et y définissent χ. Au point x, ces nouvelles coordonnées ont les mêmes formes initiales graduées que les f_i, ce qui donne $\varphi(x) \in S(\mathbb{G}_m^n)$ si et seulement si $\chi(x) \in S(\mathbb{G}_m^n)$.

335. Voisinages compacts pour la stabilisation du germe

Texte visé. Remarque 12.2.9, p. 336.

`squelettes.tex`, lignes 654–660.

Correction. Choisir le voisinage analytique compact U de x donné par la proposition 12.2.8. Pour tout voisinage analytique compact V de x contenu dans U, les germes des images tropicales de U et V au point $f_{\mathrm{trop}}(x)$ coïncident.

Exemple. Sur $\mathbb{Q}_3$, prendre deux copies disjointes de l'anneau $1/3 \leq |T| \leq 3$ et le moment $(T,1)$ sur la première et $(1,T)$ sur la seconde. Au point de Gauss de rayon 1 de la première copie, comparer le voisinage constitué de cette seule copie et celui constitué des deux. Le second germe d'image a une branche verticale en plus de la branche horizontale.

336. Reste analytique de norme strictement inférieure

Texte visé. Proposition 12.2.12, p. 337.

`squelettes.tex`, lignes 740–760.

Correction. Sous les hypothèses de la proposition, écrire $f = a + g$ avec $a \in k^\times$ et $g \in \mathscr{O}_{X,x}$, qui peut être nul, puis $|g| < |a|$ sur un voisinage de x. Choisir a de même norme et de même forme initiale que $f(x)$. Alors $g = f - a$ vérifie $|g(x)| < |a|$, et l'inégalité persiste près de x.

337. Facteur de normalisation dans l'identité de normes

Texte visé. Preuve de la proposition 12.2.14, p. 339.

`squelettes.tex`, lignes 891–913.

Correction. Sur le domaine où $|g_{ij\ell}| = \rho_{ij\ell}$, la définition de l'auxiliaire $g_{ij\ell}$ donne

$$|g_i| = \rho_{ij\ell}^{1/N_{ij\ell}} \, |f_{ij\ell} \circ p|^{r_{ij\ell}} \prod_{a=1}^{d} |\gamma_a|^{e_{aij\ell}}.$$

En coordonnées logarithmiques, le terme rétabli est $(\log \rho_{ij\ell})/N_{ij\ell}$.

La factorisation sans constante suit par la normalisation séparée, avec le degré relatif de n° 49 et l'espace entier des valuations. La valuation combinée retient d'abord le degré homogène, puis la valuation du point du germe. Garder les branches atteintes par ces valuations donne à la fois $|g_{ij\ell}(y)| = 1$ et une valeur 1 pour l'initial correspondant dans la branche. Les domaines d'égalité ainsi normalisés recouvrent un voisinage du point y.

338. Espace de valuations pour le domaine de réduction

Texte visé. Proposition 12.2.14, démonstration, p. 339.

`squelettes.tex`, lignes 896–906.

Correction. Aux deux occurrences de l'espace de valuations, prendre l'espace relatif à $\tilde{k}$. En posant $b_i = \widetilde{g_{ij\ell}(y)}$, on obtient

$$(\widetilde{V_{j,\ell}}, y) = (\widetilde{Y}, y) \cap \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\tilde{k}}\{b_i, b_i^{-1}\}_{1 \leq i \leq n}.$$

Les deux inégalités élémentaires donnent exactement $w(b_i) = 1$. La restriction de w à $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ reste celle de la valuation considérée sur le germe. La normalisation du facteur monomial relève de n° 337.

339. Image du bord après extension du corps

Texte visé. Preuve de la proposition 12.3.4, p. 342.

`squelettes.tex`, lignes 1178–1184.

Correction. Pour la projection $p : X_K \to X$, on a $\partial X_K \subseteq p^{-1}(\partial X)$ et $(f_K)_{\mathrm{trop}} = f_{\mathrm{trop}} \circ p$. Si ξ n'appartient pas à $f_{\mathrm{trop}}(\partial X)$, écrire

$$\xi \notin (f_K)_{\mathrm{trop}}(\partial X_K).$$

La surjectivité de p conserve l'image tropicale totale.

340. Borne de dimension de la coupe hyperplane

Texte visé. Proposition 12.3.4, étape de la coupe, pp. 342–343.

`squelettes.tex`, lignes 1214–1228.

Correction. Pour chaque cellule incidente C de dimension positive, imposer $\dim(H \cap C) \leq \dim(C) - 1$. Choisir une normale rationnelle à H hors des annihilateurs des espaces directeurs de ces cellules. Ils forment une réunion finie de sous-espaces propres, et le monôme associé reste non constant sur chacune de ces cellules. Prendre H passant par ξ. Au voisinage de ξ, seules les cellules incidentes interviennent et les cellules de dimension zéro satisfont déjà la borne $d - 1$ pour $d = \dim_\xi f_{\mathrm{trop}}(X) > 0$. On obtient ainsi $\dim_\xi(H \cap f_{\mathrm{trop}}(X)) \leq d - 1$, l'estimation utilisée dans la récurrence.

341. Choix d'un point intérieur par les recouvrements affinoïdes

Texte visé. Proposition 12.3.5, démonstration, pp. 343–344.

`squelettes.tex`, lignes 1335–1341.

Correction. Conserver la projection du moment sur le tore de dimension d, la restriction plate $V \to W$ et la multisection affinoïde stricte $j : U \to V$. Poser $g = f \circ j$, avec f le moment projeté, et $\iota : U \to X$ le morphisme composé. On a $\dim U = d$ et $\dim g_{\text{trop}}(U) = d$.

Pour un G-recouvrement affinoïde fini (X_i), noter $D_{ij} = X_i \cap X_j$ pour tous les couples, diagonale comprise, et $U_{ij} = \iota^{-1}(D_{ij})$. Les D_{ij} sont des domaines compacts séparés et les U_{ij} sont compacts de dimension au plus d. Le corollaire 12.2.6 place les images $g_{\text{trop}}(\partial U_{ij})$ dans des polyèdres de dimension au plus $d-1$, avec bord vide si $d = 0$. Choisir w dans une cellule de dimension d de l'image en évitant cette réunion finie, puis $u \in U$ tel que $g(u) = \mathfrak{s}(w)$ par le lemme 12.2.13. Poser $x = \iota(u)$.

Chaque fois que $x \in D_{ij}$, on a $u \in \text{Int}(U_{ij})$. La formule de composition des intérieurs pour la cible intermédiaire séparée D_{ij} donne $x \in \text{Int}(D_{ij})$. Les germes des cartes contenant x et de leurs intersections ont donc des réductions pleines dans le même espace de valuations de $\mathscr{H}(x)$. Leur recollement est cet espace plein, ce qui donne $x \in \text{Int}(X)$. Le moment projeté a alors dimension tropicale d en x par la proposition 12.2.8. Pour le moment initial, la projection donne la borne inférieure d, et la dimension globale de l'image donne la borne supérieure d. La dimension tropicale locale du moment initial vaut donc d.

342. Points à séparer sur le bord du voisinage

Texte visé. Preuve du lemme 12.3.6, p. 344.

`squelettes.tex`, lignes 1351–1372.

Correction. Pour la construction des fonctions f_y, faire varier y dans $\partial(W/X)$. Le point x est intérieur à son voisinage W, donc le bord ne le contient pas. Si le bord est vide, prendre $V = W$ avec un moment constant. Sinon, la séparation holomorphe et la valuation non triviale donnent des f_y non nulles en x avec $|f_y(y)| \neq |f_y(x)|$. Le bord compact fournit une sous-famille finie non vide $(y_i)_i$. Prendre le seuil $r = \frac{1}{2}\min_i |f_{y_i}(x)| > 0$.

343. Coefficients homogènes des domaines de réduction

Texte visé. Preuve de la proposition 12.4.7, p. 346.

`squelettes.tex`, lignes 1556–1564.

Correction. Dans la présentation du domaine de réduction par des inégalités de valuation, choisir les f_{ij} parmi les unités homogènes de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$. Les valuations relatives sont triviales sur $\widetilde{k}$, ce qui rend toute inégalité à coefficients tirés seulement de ce corps automatique. L'hypothèse de germe presque bon permet de relever les f_{ij} en unités analytiques ayant ces formes initiales.

344. Critère de stricte analyticité par G-recouvrement

Texte visé. §12.5.1, p. 347.

`squelettes.tex`, lignes 1571–1582.

Correction. Un espace strict admet un G-recouvrement par des domaines analytiques stricts. Pour le critère réciproque, demander des domaines stricts séparés et des intersections deux à deux strictes, comme en 11.8.1. Sur un espace ambiant strict, les intersections de domaines stricts sont strictes par la règle d'intersection des sous-objets stricts de la réduction du germe. Les domaines stricts et leurs G-recouvrements définissent donc le site indiqué.

Sur un corps trivialement valué, recoller deux disques unités fermés sur le sous-disque fermé de rayon $0 < r < 1$. Les deux domaines unités sont stricts et G-recouvrent le recollement.

Au point de Gauss commun de rayon r, le corps résiduel gradué est $k[t, t^{-1}]$ avec t de degré r, de sorte que le corps de degré un est k. Le germe recollé possède deux relèvements de chaque valuation avec $|t| > 1$. Un recouvrement strict avec intersections strictes donnerait des réductions pleines qui se recolleraient en un seul espace de valuations, car l'espace de valuations en degré un est un singleton. Le recollement n'est donc pas strict.

345. Suppression de la constante et paralinéarité stricte

Texte visé. Proposition 12.5.4, dernière assertion, pp. 347–348.

`squelettes.tex`, lignes 1646–1655.

Correction. Dans la dernière assertion, supposer u paralinéaire stricte, en plus de la valuation non triviale et de la stricteté du germe. La première assertion donne $nu = c + \log|h|$. En un point rigide du voisinage strict, les valeurs de u et de $\log|h|$ appartiennent au groupe logarithmique rationnel de k. Il en va donc de même de c. Choisir $m \geq 1$ et $a \in k^\times$ tels que $mc = \log|a|$. On obtient $mnu = \log|ah^m|$.

Sur $\mathscr{M}(\mathbf{Q}_3)$, le germe est strict et la fonction constante $\log 2$ est lisse et paralinéaire entière. Une expression sans constante exigerait $2^n = 3^j$ pour des entiers $n \geq 1$ et j, ce qui est impossible. La première assertion, qui autorise une constante, est conservée.

346. Rationalité des pentes par le moment conjoint

Texte visé. Première assertion de la proposition 12.5.4, p. 348.

`squelettes.tex`, lignes 1668–1684.

Correction. Après la réduction compacte, prendre un recouvrement fini par des domaines compacts V_j où $u = a_j \log|g_j| + c_j$, avec $a_j \in \mathbb{Q}$. Comme $u = v \circ f_{\mathrm{trop}}$, l'image tropicale du moment (f, g_j), transformée par $(s, t) \mapsto (s, a_j t + c_j)$, donne le graphe de v au-dessus de $f_{\mathrm{trop}}(V_j)$. Sur chaque cellule, la projection du graphe est injective jusque sur son espace directeur. Les directions du graphe étant rationnelles, la dernière coordonnée s'exprime avec une pente rationnelle sur la cellule projetée. On obtient une subdivision finie.

Au voisinage de $\xi = f_{\mathrm{trop}}(x)$, ne garder que les cellules incidentes à ξ. La dérivée d'un représentant ambiant lisse de v satisfait les conditions de pente sur leurs espaces directeurs. Ces équations linéaires sont rationnelles. Leur compatibilité réelle donne une solution rationnelle par élimination. La forme affine de cette pente et de valeur $v(\xi)$ en ξ coïncide avec v sur les cellules incidentes près de ξ. En chassant les dénominateurs et en tirant en arrière, on obtient $Nu = c + \log|h|$ près de x, avec h une unité analytique. La condition supplémentaire sur c relève de n° 345.

347. Extrémités à valeurs rationnelles des tentes

Texte visé. Preuve du lemme 12.5.6, p. 349.

`squelettes.tex`, lignes 1764–1785.

Correction. Choisir un cube dont les arêtes sont parallèles aux axes et dont toutes les extrémités de coordonnées appartiennent à $\mathbb{Q}\log|k^\times|$. La valuation non triviale rend ce groupe dense. Le cube peut donc contenir $f_{\mathrm{trop}}(x)$ en son intérieur tout en évitant l'image compacte du bord. Les tentes dans les coordonnées, puis leur minimum, ont alors les constantes requises pour une fonction paralinéaire stricte.

348. Voisinage de la fonction séparant deux points

Texte visé. Preuve du théorème 12.5.7, p. 349.

`squelettes.tex`, lignes 1832–1847.

Correction. Pour séparer $x \in U$ et $y \neq x$, si $y \in U$ choisir un voisinage analytique compact V de x contenu dans $U \setminus \{y\}$. Si y est le point à l'infini, prendre un tel voisinage compact dans U. La fonction du lemme 12.5.6 est positive en x et son support est contenu dans V, ce qui donne la valeur nulle en y.

349. Stabilisation des pièces coordonnées et de leurs intersections

Texte visé. Proposition 12.7.7, démonstration, pp. 355–356.

`squelettes.tex`, lignes 2449–2459.

Correction. Écrire le polyèdre caractéristique comme réunion finie des pièces S_I des projections à n coordonnées, suivant la proposition 12.6.3. Après changement de base, le théorème de Ducros de rang égal donne une immersion par morceaux surjective $S_{I,L} \to S_I$ pour chaque pièce. Les pièces fermées paralinéaires forment les G-recouvrements finis des réunions.

Soit y au-dessus de x dans une pièce relevée $S_{I,L}$. Les initiales correspondantes engendrent en x un sous-corps gradué E_I de degré de transcendance n, et $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est algébrique sur E_I. Dans $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$, le composé de ce dernier corps résiduel avec $\widetilde{L}$ a donc degré de transcendance n sur $\widetilde{L}$. Pour toute autre pièce S_J contenant x, le même corps résiduel est algébrique sur E_J. Le composé $E_J\widetilde{L}$ a donc aussi degré n, d'où $y \in S_{J,L}$.

Sur une source compacte, choisir une même extension finie séparable qui stabilise toutes les pièces par le théorème 5.1(4) de Ducros. Leurs isomorphismes se recollent grâce au calcul sur les intersections. En général, prendre le complété du composé des extensions obtenues sur un G-recouvrement affinoïde.

350. Nombre de coordonnées indépendantes au point intérieur

Texte visé. Preuve du théorème 12.8.2(b), p. 357.

`squelettes.tex`, lignes 2640–2646.

Correction. Dans le raisonnement au point intérieur, choisir une partie I de cardinal n telle que les formes initiales des coordonnées $f_i(x)$, pour $i \in I$, soient algébriquement indépendantes. Le critère de la proposition 12.6.3 permet ce choix et donne la borne $d \geq n$ dans la comparaison des rangs.

351. Platitude générique sur chaque composante

Texte visé. Preuve de la proposition 12.9.6(c), p. 360.

`squelettes.tex`, lignes 2992–3004.

Correction. Sur un domaine affinoïde de la cible réduite, écrire le morphisme fini à l'aide d'une algèbre finie B sur l'algèbre réduite A. Écarter les intersections de composantes. Sur chaque composante restante, une base sur le corps des fractions et la suppression des dénominateurs donnent un ouvert dense où B est localement libre. Leur réunion rencontre chaque composante et son complément Z est de dimension au plus $n - 1$.

Le lieu non plat dans la source est contenu dans $p^{-1}(Z)$, qui a la même borne de dimension par finitude de p. Son image fermée dans la cible a aussi dimension au plus $n-1$. Elle ne rencontre donc pas Σ_f, dont les points ont rang résiduel n. On obtient l'ouvert de la cible au-dessus duquel le morphisme est fini et plat.

352. Niveau de la partie squelettique de la sous-variété

Texte visé. Remarque 12.9.8, p. 361.

`squelettes.tex`, lignes 3039–3048.

Correction. Pour Y considéré au niveau m, écrire $\dim Y < m$ dans la dernière phrase. Chaque point d'une partie squelettique de Y a rang résiduel m, qui est au plus la dimension de Y. La condition entraîne donc que la seule partie squelettique est vide.

353. Voisinage ambiant pour approcher les coordonnées

Texte visé. Proposition 12.9.10, démonstration, p. 361.

`squelettes.tex`, lignes 3101–3127.

Correction. La réunion des domaines V_i choisis dans le G-recouvrement de Σ contient un voisinage de x dans Σ. Choisir un ouvert ambiant O de x tel que $\Sigma \cap O \subseteq \bigcup_i V_i$. En appliquant le lemme 12.2.3 au point presque bon, approcher chaque coordonnée inversible du moment f_i par une unité sur un voisinage ouvert ambiant. L'erreur de norme est strictement inférieure à celle de la coordonnée sur l'intersection avec V_i.

Intersecter ces voisinages finis avec O et prendre un voisinage analytique compact W de x dans cette intersection. Les initiales coïncident sur $W \cap V_i$, donc la concaténation des moments approchés sur W a un polyèdre caractéristique contenant $\Sigma \cap W$. La projection locale vers $\mathbf{G}_m^n$ de la proposition 12.6.5 conserve ce polyèdre près de x. Restreindre le moment projeté à un ouvert ambiant contenu dans l'intérieur de W.

354. Restriction des moments au voisinage commun

Texte visé. Preuve de la proposition 12.9.10, p. 361.

`squelettes.tex`, lignes 3123–3131.

Correction. Sur le voisinage commun W, former g en concaténant les $g_i|_W$. La dernière chaîne s'écrit

$$\Sigma \cap W \subseteq \bigcup_i (\Sigma_{g_i} \cap V_i \cap W) \subseteq \Sigma_g.$$

La première inclusion vient du recouvrement et de l'égalité locale déjà obtenue. Pour la seconde, projeter le moment concaténé sur les coordonnées de $g_i|_W$.

355. Recouvrements et bornes fermées pour le bord squelettique

Texte visé. Corollaire 12.9.14, démonstration, p. 364.

`squelettes.tex`, lignes 3312–3324.

Correction. Dans un affinoïde A, le lemme 3.1 de Ducros décrit ∂A par une réunion finie de fibres gaussiennes. Le lemme 12.9.13, avec une cible de dimension un, donne pour leurs intersections avec Σ des parties paralinéaires fermées de dimension au plus $n-1$. En niveau zéro, le bord affinoïde est vide.

En général, prendre un voisinage analytique compact et topologiquement séparé N du point et un G-recouvrement affinoïde fini de N. Inclure toutes les intersections deux à deux, y compris les intersections diagonales. Le recollement des réductions pleines montre que ∂N est contenu dans la réunion des bords de ces intersections. Chaque intersection est un domaine compact séparé d'un affinoïde. Son propre bord est contenu dans les bords d'un G-recouvrement affinoïde fini, puisque ses réductions se plongent dans le même espace de valuations. Sur l'intérieur ordinaire de N, on a ainsi un recouvrement du bord ambiant par un nombre fini de bords affinoïdes.

Sur chaque cellule squelettique compacte de test, retenir un nombre fini de ces voisinages et appliquer l'estimation affinoïde. Les restrictions squelettiques donnent des parties paralinéaires fermées de dimension au plus $n-1$, qui donnent la n-négligeabilité voulue.

356. Poids dans la formule de la valuation de Gauss graduée

Texte visé. § 12.10.1, p. 364.

`squelettes.tex`, lignes 3342–3351.

Correction. Pour $h = (h_1, \dots, h_n)$ et $h^I = \prod_j h_j^{I_j}$, la valuation de Gauss sur $K(\tau_1, \dots, \tau_n)$ est

$$\eta_h\left(\frac{\sum_I a_I \tau^I}{\sum_I b_I \tau^I}\right) = \frac{\max_I v_0(a_I) h^I}{\max_I v_0(b_I) h^I}.$$

Les deux polynômes sont homogènes. Le dénominateur est non nul et le numérateur nul a valeur 0. La valuation v_0 est triviale sur K. On retrouve $\eta_h(\tau_j) = h_j$ et le calcul pondéré de la ligne 3478.

357. Numérateur et dénominateur des fonctions

Texte visé. Lemme 12.10.2, démonstration, pp. 364–365.

`squelettes.tex`, lignes 3387–3400.

Correction. Écrire $f_i = g_i/h_i$, avec les deux polynômes g_i et h_i pour numérateur et dénominateur. Dans leurs développements, conserver les termes de norme maximale au point de Gauss η_r, soit

$$g_i = \sum_{I \in E_i} a_{I,i} T^I, \qquad h_i = \sum_{I \in F_i} b_{I,i} T^I.$$

Les normes des termes conservés sont respectivement α_i et β_i. Ainsi $|f_i(\eta_r)| = \alpha_i/\beta_i$. Les termes strictement inférieurs peuvent être supprimés sans changer les formes initiales graduées. Par continuité, leur norme reste strictement inférieure à celle du polynôme des termes conservés sur un voisinage de η_r. Les normes des deux polynômes sont donc inchangées sur ce voisinage, ce qui préserve le germe des inégalités utilisé dans la preuve.

358. Nombre des inégalités définissant le cône

Texte visé. Lemme 12.10.2, démonstration, p. 365.

`squelettes.tex`, lignes 3409–3418.

Correction. Les deux plages d'indices vont de 1 à m, le nombre des fonctions f_i. Pour le n-uplet $t = sr^{-1}$ des rayons normalisés, les conditions du cône sont

$$\max_{I \in E_i} t^I \leq \max_{I \in F_i} t^I \qquad (1 \leq i \leq m).$$

Dans la description de $\widetilde{(U, \eta_r)}$, faire varier de même de 1 à m le quotient des deux polynômes initiaux. On obtient ainsi toutes les conditions d'appartenance de la valuation de Gauss.

359. Maximum de Gauss au dénominateur

Texte visé. Lemme 12.10.4, démonstration, p. 365.

`squelettes.tex`, lignes 3474–3481.

Correction. Avec la normalisation employée dans la preuve, pour $f = (\sum_I a_I \tau^I)/(\sum_I b_I \tau^I)$, on a

$$f_{\mathrm{trop}}(\eta_h) = \frac{\max_{I:\, a_I \neq 0} h^I}{\max_{I:\, b_I \neq 0} h^I}.$$

Par conséquent l'appartenance de η_h à l'ouvert élémentaire $\mathbf{P}_{K(\tau)/K}\{f\}$ équivaut à $\max_{I:\, a_I \neq 0} h^I \leq \max_{I:\, b_I \neq 0} h^I$.

360. Translation multiplicative des cônes au point de base

Texte visé. Proposition 12.10.5, démonstration, pp. 366–367.

`squelettes.tex`, lignes 3551–3588.

Correction. Poser $r = f_{\mathrm{trop}}(x)$. Les cônes Q et C sont dans Γ^m et décrivent les coordonnées normalisées $|f_i|/|f_i(x)|$. Pour $D = Q \cap C$, le germe de domaine correspondant est

$$(V, x) = \big(f_{\mathrm{trop}}^{-1}(r \cdot C(\mathbb{R}_{>0})), x\big).$$

L'image du germe de X est le germe de $r \cdot Q(\mathbb{R}_{>0})$ en r. La partie de ce germe d'image à retrouver pour le cône C est celle de $r \cdot (Q \cap C)(\mathbb{R}_{>0})$ en r. Les produits sont coordonnée par coordonnée.

361. Terme de translation dans une carte G-tropicale

Texte visé. Corollaire 12.10.7, démonstration, p. 368.

`squelettes.tex`, lignes 3751–3765.

Correction. Sur chaque domaine compact V_i du G-recouvrement fini, écrire $f|_{V_i} = a_i f_{i,\mathrm{trop}} + b_i$, où a_i est rationnel et b_i est un vecteur réel. Le théorème 12.10.6 fournit une partie squelettique compacte Σ_i de V_i telle que $f_{i,\mathrm{trop}}(\Sigma_i) = f_{i,\mathrm{trop}}(V_i)$. Appliquer aux deux images la même application affine $s \mapsto a_i s + b_i$. On obtient $f(\Sigma_i) = f(V_i)$, puis $f(\bigcup_i \Sigma_i) = \bigcup_i f(V_i) = f(V)$. La partie squelettique recherchée est cette réunion finie.

362. Cofinalité des domaines induits sur le sous-espace fermé

Texte visé. §13.1.1, p. 371.

`complements-ga.tex`, lignes 26–34.

Correction. Pour un sous-espace analytique fermé $Z \subseteq X$ contenant x, les domaines induits $V \cap Z$, où V est un domaine analytique de X contenant x, sont cofinaux parmi les domaines analytiques de Z contenant x. Choisir un domaine affinoïde ambiant V_0 contenant x. Dans le sous-espace affinoïde fermé $Z \cap V_0$, choisir un domaine rationnel contenant x et contenu dans le domaine donné de Z. Relever les fonctions de ses inégalités à V_0. La clôture de Zariski de x dans V est déjà contenue dans $V \cap Z$ et y a la même dimension. Les deux infima de dimensions coïncident, ce qui donne $\dim_{\mathrm{c}}(Z_{\mathrm{G}}, x) = \dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x)$.

363. Point à retenir dans la localisation quasi-finie

Texte visé. Corollaire 13.1.8, démonstration, p. 373.

`complements-ga.tex`, lignes 186–190.

Correction. Choisir un domaine affinoïde X' de X contenant x, puis un domaine affinoïde Y' de $f^{-1}(X')$ contenant le point y. La quasi-finitude en y et la conclusion visée sont préservées par ces restrictions de domaines. On peut alors appliquer la version analytique citée du théorème principal de Zariski.

364. Anneau ambiant dans la longueur générique GAGA

Texte visé. Lemme 13.2.7(a), p. 377.

`complements-ga.tex`, lignes 469–477 et 483–489.

Correction. Calculer la longueur de $\mathscr{F}_\zeta$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\zeta}$. Dans la preuve, comparer cet anneau à $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\mathrm{an}},z}$, puis à l'anneau local pour la G-topologie de $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ en z. Ces morphismes réguliers entre anneaux ambiants permettent d'appliquer la comparaison de longueurs du corollaire 13.2.2 en conservant l'action des nilpotents.

Pour $\mathscr{X} = \mathrm{Spec}(k[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$, $\mathscr{Z} = \mathscr{X}_{\mathrm{red}}$ et $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathscr{X}}$, l'action de ε sur 1 est non nulle. L'action sur $\mathscr{F}_\zeta$ ne passe donc pas par $\mathscr{O}_{\mathscr{Z},\zeta}$.

365. Multiplicité générique et anneau ambiant

Texte visé. Lemme 13.2.7(b), p. 377.

`complements-ga.tex`, lignes 478–490.

Correction. La multiplicité générique de $\mathscr{X}$ le long de $\mathscr{Z}$ est la longueur de $\mathscr{O}_{\mathscr{X},\zeta}$ sur lui-même. Appliquer le a) corrigé en n° 364 à $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathscr{X}}$, avec les morphismes d'anneaux locaux ambiants.

Pour $\mathscr{X} = \mathrm{Spec}(k[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$ et $\mathscr{Z} = \mathscr{X}_{\mathrm{red}}$, la filtration par (ε) donne deux facteurs simples dans l'anneau ambiant. L'anneau réduit k a longueur un et perd cette épaisseur.

366. Longueur générique du faisceau après extension des scalaires

Texte visé. Lemme 13.2.8, p. 377.

`complements-ga.tex`, lignes 492–529.

Correction. Soit ℓ la longueur générique de F le long de Z. Pour chaque composante irréductible W de Z_K, mesurer ℓ_K pour F_K et μ pour la fibre de la composante réduite de départ le long de ce même W. Alors $\ell_K = \ell\mu$.

Aux points génériques concernés, notons $A \to B$ le morphisme local plat et $M = F_x$. Une suite de composition de M a ℓ facteurs $A/\mathfrak{m}_A$. Par platitude, l'extension de cette suite donne ℓ quotients $B/\mathfrak{m}_A B$ de longueur μ. Avec $X = Z = \mathscr{M}(k)$, $K = k$ et $F = \mathscr{O}_X^{\oplus 2}$, l'ancienne définition donnait $\ell = \mu = 1$ et $\ell_K = 2$.

367. Localité de l'algèbre dans la formule de longueur normalisée

Texte visé. §13.3.4, p. 379.

`complements-ga.tex`, lignes 628–643.

Correction. Supposer B finie **locale** sur l'anneau local artinien A, de corps résiduels respectifs λ et κ. Chaque quotient simple de la série de composition de B a longueur $[\lambda : \kappa]$ sur A. Ainsi

$$\delta_A(B) = \frac{\ell_B(B)}{\ell_A(A)}[\lambda : \kappa].$$

Pour C finie locale sur B, de corps résiduel μ, la multiplicativité des degrés résiduels donne $\delta_A(C) = \delta_B(C)\delta_A(B)$. Pour une algèbre finie B quelconque, sommer les contributions de ses facteurs artiniens locaux, chacune avec son propre corps résiduel.

368. Point compté dans la borne du degré fini

Texte visé. Proposition 13.4.1, démonstration, p. 382.

`complements-ga.tex`, lignes 940–958.

Correction. Prendre $u \in \Omega \cap g^{-1}(\Upsilon')$, voisinage du point v. Le rang ponctuel du faisceau cohérent $g_*\mathscr{O}_\Omega$ borne par $d = \deg^v(g)$ la somme des degrés locaux sur la partie de la fibre contenue dans Ω. Le terme $\deg^u(g)$ est l'un de ces termes non négatifs, donc il est au plus d. La conclusion de la démonstration porte sur la fonction $v \mapsto \deg^v(f)$.

369. Dimension locale de la fibre au point source

Texte visé. Proposition 13.4.2, démonstration, p. 382.

`complements-ga.tex`, lignes 981–988.

Correction. Définir $Z = \{y \in Y : \dim_y(f^{-1}(f(y))) > 0\}$. La semi-continuité supérieure de la dimension locale des fibres donne un fermé de Zariski de Y. Une fibre de dimension positive contient un point de dimension locale positive, donc $f(Z)$ reste exactement le lieu des fibres de dimension positive. G-localement sur un domaine cible séparé, la compacité du morphisme donne le caractère fermé de cette image.

370. Voisinage cible dont toute la fibre est dans le domaine choisi

Texte visé. Proposition 13.4.2, démonstration, p. 382.

`complements-ga.tex`, lignes 991–1005.

Correction. Près du point cible x, travailler au-dessus d'un voisinage compact séparé de x. Le domaine choisi V contient la fibre dans son intérieur relatif à la source. Dans la source au-dessus de ce voisinage cible, le complémentaire de $\mathrm{Int}(V)$ est compact. Son image, fermée dans la cible séparée, évite x. En la retirant, on obtient un voisinage U de x tel que $f^{-1}(U) \subseteq V$. Les fibres et leurs degrés y sont ceux de la restriction de f à V.

371. Semi-continuité du degré du germe localisé

Texte visé. §13.4.5, semi-continuité supérieure, p. 384.

`complements-ga.tex`, lignes 1107–1110.

Correction. Utiliser le degré localisé défini suivant n° 52. Si le germe source (Y, y) est séparé, prendre un représentant analytique compact séparé V de ce germe au-dessus d'un ouvert séparé U contenant $x = f(y)$. Les images réciproques des compacts de U sont fermées dans V, donc compactes. Le morphisme $V \to U$ est ainsi compact et séparé. La proposition 13.4.2, avec ses corrections, donne la semi-continuité supérieure du degré de ce représentant. La comparaison de n° 51 la transmet au germe défini dans n° 52.

372. Constante locale du degré d'un représentant fini et plat

Texte visé. §13.4.5, constance locale, p. 384.

`complements-ga.tex`, lignes 1112–1118.

Correction. Utiliser le degré localisé défini suivant n° 52. Si f est fini et plat au point y, prendre la présentation locale finie et plate, au-dessus d'un voisinage séparé du point image x, qui isole y dans la fibre en x. Rétrécir la base à un voisinage analytique compact de x dans cet ouvert. Le représentant correspondant est compact et le degré de cette présentation est le rang fini plat, localement constant près de x. La comparaison de n° 51 transmet cette constance au germe intrinsèque.

373. Sous-espace intègre de départ du recollement

Texte visé. Proposition 13.5.3(c), démonstration, p. 386.

`complements-ga.tex`, lignes 1264–1287.

Correction. À la ligne 1264, prendre Y sous-espace analytique fermé intègre de V. Les intersections $Y \cap V_i$ G-recouvrent alors Y. Le lieu fermé du coefficient choisi, obtenu par recollement, est contenu dans Y et contient une composante non vide d'un $Y \cap V_i$. Cette composante est Zariski-dense dans l'intègre Y ; le lieu fermé considéré est donc tout Y.

374. Composante de pleine dimension dans le domaine local

Texte visé. Proposition 13.5.3(c), démonstration, p. 386.

`complements-ga.tex`, lignes 1306–1316.

Correction. Si Y est la clôture de Zariski de T dans V et si $\dim T = \dim Y$, le fermé intègre T est une composante irréductible de $Y \cap V_i$. En effet, la restriction analytique conserve la dimension des composantes, et une inclusion stricte dans une composante irréductible ferait baisser la dimension. La construction donne alors $z_i(T) = z(Y)$.

375. Annulation du faisceau cohérent des dénominateurs

Texte visé. Lemme 13.6.5, démonstration, p. 388.

`complements-ga.tex`, lignes 1453–1462.

Correction. Dans le raisonnement par l'absurde, $I \subseteq \mathrm{Ann}_A(a)$ donne $aI = 0$. En passant au faisceau cohérent associé, on obtient $a\mathscr{D}_f = 0$. Ainsi, sur tout domaine analytique V, chaque section $h \in \mathscr{D}_f(V)$ vérifie $a|_V h = 0$. Sur chacun des domaines affinoïdes V_i du recouvrement fini, choisir le dénominateur régulier h_i de l'écriture locale de f. Comme $a|_{V_i} h_i = 0$, on a $a|_{V_i} = 0$. Ces restrictions recollent en $a = 0$, ce qui contredit son choix.

376. Codimension dans le calcul d'une multiplicité de diviseur

Texte visé. Lemme 13.7.2, pp. 388–389.

`complements-ga.tex`, lignes 1522–1545.

Correction. Supposer Y de codimension un dans X. Si $f(y) \neq 0$, f est une unité au point générique et les deux membres sont nuls. Sinon $Y \subseteq \{f = 0\}$ par généricité, et la codimension un en fait une composante du diviseur. La proposition 13.2.4 identifie alors sa multiplicité à la longueur locale. On peut aussi supposer d'emblée que Y est une composante irréductible de $\{f = 0\}$.

Pour $V = X = (\mathbf{A}^2_k)^{\mathrm{an}}$, $f = T_1$ et Y l'origine réduite, l'anneau $\mathscr{O}_{V\cap Y,y}$ est artinien. Le coefficient de Y dans le diviseur est nul. Le quotient $\mathscr{O}_{V,y}/(T_1)$ est l'anneau de la droite restante à l'origine. Les puissances distinctes de (T_2) y donnent une longueur infinie.

377. Terme central de la suite exacte pour les diviseurs

Texte visé. Lemme 13.7.3, démonstration, p. 389.

`complements-ga.tex`, lignes 1551–1563.

Correction. Au point utilisé en codimension 1, avec $\mathscr{A} = \mathscr{O}_{V,y}$, écrire

$$0 \longrightarrow g\mathscr{A}/(fg) \longrightarrow \mathscr{A}/(fg) \longrightarrow \mathscr{A}/(g) \longrightarrow 0.$$

Les deux flèches sont l'inclusion et la réduction modulo g. La multiplication par g identifie $\mathscr{A}/(f)$ au noyau car g est régulier. L'additivité des longueurs finies donne celle des coefficients des diviseurs en codimension 1.

378. Choix d'un modèle auquel appliquer l'analytification

Texte visé. §13.8.1, p. 389.

`complements-ga.tex`, lignes 1598–1604.

Correction. Prendre pour modèle de F un k-schéma intègre localement de type fini. On peut choisir le spectre d'une sous-k-algèbre intègre de type fini de F de corps des fractions F. La valeur absolue donnée sur F détermine un point de l'analytification de ce modèle au-dessus de son point générique.

379. Corps gradués engendrés par les coordonnées gaussiennes

Texte visé. Lemme 13.8.6(d), démonstration, p. 391.

`complements-ga.tex`, lignes 1720–1724.

Correction. Par le calcul de la norme de Gauss et par invariance de la réduction graduée sous complétion, les deux corps gradués à comparer sont

$$\widetilde{k(t)} = \tilde{k}(\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n), \qquad \widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)} = \tilde{k}(\widetilde{f_1(x)}, \dots, \widetilde{f_n(x)}).$$

Les formes initiales correspondantes sont égales dans le corps gradué ambiant par les inégalités strictes d'approximation. Les deux sous-corps indiqués coïncident, comme le demande (d). Pour une extension finie non triviale à valuation triviale, la base d'Abhyankar est vide et ces générateurs laissent le corps résiduel de base.

380. Corps de base de l'algèbre artinienne de la fibre

Texte visé. Proposition 13.8.8, démonstration, p. 392.

`complements-ga.tex`, lignes 1800–1809.

Correction. Poser $E = \mathscr{H}(\eta_{K,r})$. L'identification

$$L\widehat{\otimes}_k K = L \otimes_{\mathscr{H}(\eta_r)} E$$

montre que l'algèbre de la fibre est finie sur E, puisque L est fini sur $\mathscr{H}(\eta_r)$. Elle est donc artinienne. Ses idéaux maximaux sont ceux de l'évaluation aux points de la fibre et ses corps résiduels sont finis sur E.

381. Longueurs des facteurs locaux dans la dimension de la fibre

Texte visé. Proposition 13.8.9, démonstration, p. 393.

`complements-ga.tex`, lignes 1911–1920.

Correction. Poser $E = \mathscr{H}(\eta_{K,r})$ et $R = L \otimes_{\mathscr{H}(\eta_r)} E$. Pour chaque facteur artinien local R_z, les quotients simples d'une série de composition sont égaux à son corps résiduel $\kappa(z)$. En additionnant leurs dimensions sur E, on obtient

$$\dim_E R = \sum_z \ell_{R_z}(R_z)[\kappa(z) : E].$$

La transitivité de l'action sur les points rend les degrés résiduels égaux au même d. La somme des longueurs locales est ℓ, d'où $\dim_E R = \ell d$.

382. Corps de base commun des degrés gradués

Texte visé. Proposition 13.8.9, démonstration, p. 393.

`complements-ga.tex`, lignes 1930–1961.

Correction. Aux lignes 1932, 1951–1952 et 1959–1960, calculer les degrés gradués sur $E = \widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})}$. Dans le corps résiduel gradué $\widetilde{F}$ choisi, poser $C = \widetilde{L} \cdot E = \widetilde{L} \cdot \widetilde{K}$. La transitivité donne le même degré $[C : E]$ pour les facteurs résiduels gradués. Les décalages de graduation conservent ce degré, donc la dimension graduée totale vaut $\widetilde{\ell}[C : E]$. Par la stabilité utilisée dans la preuve, $d = [\widetilde{F} : E]$. Le quotient s'écrit

$$\delta = \frac{\ell}{\widetilde{\ell}} \frac{[\widetilde{F} : E]}{[C : E]} = \frac{\ell}{\widetilde{\ell}} [\widetilde{F} : C],$$

ce qui donne la formule annoncée.

383. Quantification sur les bases d'Abhyankar

Texte visé. Théorème 13.8.10, p. 394.

`complements-ga.tex`, lignes 1968–1973.

Correction. Pour toute base d'Abhyankar t de L sur k, le corps L est fini sur $\widehat{k(t)}$ et le défaut de cette extension finie est indépendant de la base choisie. La finitude provient du lemme 13.8.6. Pour l'indépendance, prendre pour changement de base le complété d'une clôture algébrique de k et appliquer la formule corrigée de la proposition 13.8.9, qui ne dépend que de L et de ce changement de base.

384. Porteur fermé de petite dimension pour le bord squelettique

Texte visé. Lemme 14.1.5, démonstration, p. 396.

`calibrage.tex`, lignes 674–685.

Correction. Le corollaire 12.9.14 corrigé en n° 355 rend le bord ambiant n-négligeable dans le voisinage ouvert paracompact S de n° 386. Choisir une décomposition localement finie de S en cellules compactes. Sur chacune, n° 355 fournit un porteur fermé paralinéaire pour la trace du bord, de dimension au plus $n-1$. En dimension inférieure à n, on peut prendre la cellule entière. La réunion des porteurs est fermée paralinéaire dans S, de dimension $< n$. En niveau zéro la trace est vide.

Décomposer S comme en n° 386 en s'adaptant au porteur fermé et à la composante squelettique. L'intérieur relatif de chaque cellule de dimension n est ouvert dans S et évite le bord. Il est donc ouvert dans $\Sigma_f \cap \mathrm{Int}(X)$, ce qui rend ces cellules commodes. Les autres cellules vérifient la condition de dimension de la définition.

385. Exhaustion sur chaque composante connexe

Texte visé. Preuve du lemme 14.1.5, p. 396.

`calibrage.tex`, lignes 687–691.

Correction. Faire la réduction à un espace dénombrable à l'infini sur chaque composante connexe de Σ. Ces composantes sont ouvertes et fermées. Réunir les décompositions ainsi obtenues donne une décomposition cellulaire localement finie de Σ. La condition de commodité se vérifie dans le squelette ambiant.

386. Voisinage paracompact où la composante squelettique est fermée

Texte visé. Lemme 14.1.5, démonstration, p. 396.

`calibrage.tex`, lignes 687–705.

Correction. Travailler sur une composante connexe S_0 du sous-espace paralinéaire considéré, suivant n° 385. Elle est localement fermée dans Σ_f, donc fermée dans un ouvert $O \subset \Sigma_f$. Connexe et paracompacte, elle est dénombrable à l'infini. Le corollaire 2.1.8 donne, dans O, un voisinage ouvert paracompact S de S_0, qui reste fermée dans S.

Appliquer la proposition 2.2.15 dans S en s'adaptant à S_0, au porteur du bord de n° 384, et à un recouvrement compact localement fini muni des restrictions de la tropicalisation, qui sont des plongements paralinéaires. Les cellules commodes contenues dans S_0 en donnent une décomposition. Réunir ces décompositions sur les composantes ouvertes et fermées du sous-espace initial.

387. Partie purement de dimension maximale de l'image

Texte visé. Preuve de la proposition 14.1.9, p. 397.

`calibrage.tex`, lignes 792–797.

Correction. Traiter les composantes irréductibles de X séparément. Pour la formule de l'image du squelette de niveau n, prendre la partie purement de dimension n des images tropicales. Une composante de dimension inférieure peut contribuer à l'image totale en dehors de cette partie.

Exemple. Pour $|c| \neq 1$, le morphisme de $\mathbb{G}_m \sqcup \operatorname{Spec} k$ vers $\mathbb{G}_m^2$ donné par $t \mapsto (t, 1)$ et par $(1, c)$ a pour image tropicale la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$ et le point isolé $(0, \log|c|)$.

388. Relèvements squelettiques des cellules tropicales

Texte visé. Preuve de la proposition 14.1.9, pp. 397–398.

`calibrage.tex`, lignes 838–850.

Correction. Sur une composante intègre de dimension $n > 0$, le théorème 1.2(A,B) de Ducros donne une image tropicale finiment polyédrale, invariante après restriction à un ouvert de Zariski non vide. Si son image est de dimension inférieure à n, le squelette de niveau n est vide. Sinon, choisir une projection monomiale v de f de rang n sur les directions de toutes les cellules de dimension n. Le critère local de dimension donne $\Sigma_v = \Sigma_f$ en l'appliquant aux

images des voisinages compacts. Le théorème 2.8(1) de Ducros, avec son correctif de 2013, fournit un nombre fini de fonctions qui séparent les prolongements des normes de Gauss pour v.

Adjoindre ces fonctions et des coordonnées d'une immersion fermée sur un ouvert très affine au moment (f, v) pour obtenir h. Dans une décomposition finie de l'image de h_{trop}, retenir les cellules de dimension n sur lesquelles la projection q_{trop} vers les coordonnées de f est injective, ainsi que leurs faces. Le critère local de dimension exclut les autres cellules de $h_{\mathrm{trop}}(\Sigma_f)$. Pour relever un point de l'intérieur relatif d'une cellule retenue, utiliser la formule de l'image du squelette de h et appliquer le critère local dans chaque voisinage du relèvement. La propreté de h_{trop} et la fermeture de Σ_f donnent des relèvements aux faces.

Ainsi, h_{trop} identifie par un isomorphisme paralinéaire Σ_f à la réunion des cellules retenues. La projection est propre sur cette réunion finie et son image est la partie purement de dimension n de l'image de f. Les cellules relevées sont des f-cellules commodes dans l'espace sans bord. On obtient donc l'égalité d'images, la décomposition cellulaire finie et le caractère agréable du moment. Le raisonnement s'assemble sur les composantes réduites de dimension n. En dimension zéro, on prend des cellules ponctuelles.

389. Réalisation analytique d'une cellule commode compacte

Texte visé. Preuve de la proposition 14.2.3, p. 400.

`calibrage.tex`, lignes 1348–1364.

Correction. Choisir une décomposition en f-cellules commodes compactes, en raffinant au besoin. Pour une cellule D de dimension inférieure à n, appliquer le lemme 3.2.8(e) à D dans Σ_f. On obtient un domaine analytique compact $V \subset X$ tel que $V \cap \Sigma_f = D$. Ainsi, le squelette caractéristique de $f|_V$ est D.

390. Polyrayon de la fibre après changement de coordonnées

Texte visé. Preuve de la proposition 14.2.3, p. 400.

`calibrage.tex`, lignes 1368–1393.

Correction. Si $d = \dim D$, envoyer la direction linéaire rationnelle de l'enveloppe affine de la cellule tropicale sur le sous-espace des d premières coordonnées par un changement monomial. Les équations affines deviennent $x_{d+j} = a_j$ pour $1 \leq j \leq n - d$. Pour la projection p sur les $n - d$ dernières coordonnées, prendre le point de Gauss η_ρ de polyrayon $\rho = (\exp a_j)_j$. Définir $V' = V \cap (p \circ f)^{-1}(\eta_\rho)$ et effectuer la réduction de niveau au-dessus de $\mathscr{H}(\eta_\rho)$.

391. Famille minimale en dimension c

Texte visé. Preuve du théorème 14.2.5, p. 401.

`calibrage.tex`, lignes 1507–1509.

Correction. Lorsque $d = c$, la famille des éléments minimaux de Δ est $\Delta^* = \{C\}$. La famille Δ peut aussi contenir des cofaces de C. La somme porte sur Δ^* et se réduit alors à $d_C = d_C$.

392. Décomposition du quotient avant normalisation

Texte visé. Preuve du théorème 14.2.7, p. 403.

`calibrage.tex`, lignes 1787–1797.

Correction. À partir du module constant de f_i'/f_i, écrire $f_i'/f_i = \lambda_i + g_i$, avec $\lambda_i \in k^\times$ et $|g_i| < |\lambda_i|$ au voisinage de x. Remplacer f_i par $\lambda_i f_i$ et l'erreur par g_i/λ_i. En renommant ces termes, on a $f_i' = (1+g_i)f_i$ avec $|g_i| < 1$.

393. Statut du terme d'erreur dans l'homotopie

Texte visé. Preuve du théorème 14.2.7, p. 403.

`calibrage.tex`, lignes 1792–1795.

Correction. Prendre des germes analytiques $g_i \in \mathscr{O}_{X,x}$, qui peuvent s'annuler. Pour l'erreur normalisée, $|g_i| < 1$ assure que $1 + g_i$ est inversible. Sur le disque de paramètres choisi pour l'homotopie, la borne stricte sur le produit du paramètre par g_i assure de même l'inversibilité du facteur correspondant.

394. Corps scalaires des algèbres locales de fibre

Texte visé. Preuve du lemme 14.2.10(d), p. 406.

`calibrage.tex`, lignes 2790–2794.

Correction. L'anneau local de la fibre $f^{-1}(f(x))$ en x est une algèbre locale artinienne de dimension $\deg^x(f)$ sur $\mathscr{H}(f(x))$. Dans la phrase précédente, le degré $\deg^{g'(y)}(f')$ se calcule comme dimension sur $\mathscr{H}(h(y))$ de l'anneau local de $(f')^{-1}(h(y))$ en $g'(y)$.

395. Correction du deuxième cas de la proposition 14.3.1

Texte visé. Page 406, démonstration de la proposition 14.3.1 ; source calibrage.tex, lignes 2884–2891.

La phrase affirmant

$$\deg^x(q \circ f) = \deg^x(q' \circ f) \quad \text{pour tout } x \in C \cap \mathrm{Int}(X)$$

est fausse lorsque l'on suppose seulement que $q'_{\mathrm{trop}} - q_{\mathrm{trop}}$ est constante sur $C_f = f_{\mathrm{trop}}(C)$. Le théorème 14.2.7 exige cette constance sur sa source analytique entière. L'énoncé de la proposition 14.3.1 porte sur une égalité **presque partout** ; il n'est pas réfuté par l'exemple suivant.

Prenons $k = \mathbb{Q}_3$, muni de sa valeur absolue usuelle, $X = (\mathbb{A}^1_k)^{\mathrm{an}} \setminus \{0, 1\}$, $f = (z, z(z-1))$, et les deux projections q, q' sur les coordonnées. L'espace X est séparé, lisse, sans bord et de niveau 1. Ses deux fonctions considérées sont inversibles. Le segment de points de Gauss

$$C = \{\eta_s : 1/3 \leq s \leq 1\}$$

est une f-cellule de dimension 1, et

$$f_{\mathrm{trop}}(\eta_s) = (\log s, \log s).$$

Les deux projections sont donc injectives sur C_f et leur différence tropicale y est nulle.

Au point η_1, le morphisme z est une immersion ouverte, de degré local 1. En revanche, le morphisme $u = z(z-1)$ est fini et plat de degré 2 : son algèbre sur $k[u, u^{-1}]$ est libre de base $1, z$, avec relation $z^2 - z - u = 0$. Son extension résiduelle au point de Gauss est

$$\mathbb{F}_3(\bar{z})/\mathbb{F}_3(\bar{z}^2 - \bar{z}),$$

de degré 2, comme le montrent la relation quadratique et l'involution non triviale $\bar{z} \mapsto 1 - \bar{z}$. Le degré résiduel impose un degré de corps complété d'au moins 2, tandis que l'algèbre de la fibre entière a dimension 2. La fibre n'a donc que ce point, de longueur locale 1 et de degré de corps 2. Ainsi

$$\deg^{\eta_1}(z) = 1 \neq 2 = \deg^{\eta_1}(z(z-1)), \qquad \eta_1 \in \mathrm{Int}(X).$$

Correction de la preuve. Posons $V = f_{\mathrm{trop}}^{-1}(C_f)$. Les inégalités affines rationnelles définissant la cellule donnent un domaine analytique fermé, sans imposer de compacité globale. La différence tropicale est constante sur tout V, avec la même constante, éventuellement non nulle. Le lemme 12.4.4, appliqué sur V à C, rend $C \cap \partial V$ négligeable en dimension n. En dehors de cet ensemble, appliquons le théorème 14.2.7 corrigé aux deux morphismes restreints à V, puis l'invariance du degré local par restriction à un domaine analytique de 13.3.1. Les sections affines inverses ont la même partie linéaire ; leurs vecteurs-volumes poussés coïncident donc. On obtient exactement l'égalité presque partout requise.

Cette correction conserve l'énoncé de la proposition. La translation constante de la correction n° 396 reste nécessaire dans le cas général. Elle est nulle dans cet exemple. On utilise le théorème 14.2.7 corrigé dans sa portée entière, y compris la partie de sa démonstration qui suit le lemme 14.2.9.

396. Translation constante dans la comparaison des moments

Texte visé. Proposition 14.3.1, preuve, p. 407.

`calibrage.tex`, lignes 2895–2910.

Correction. Sur $f_{\mathrm{trop}}^{-1}(C_f)$, les deux tropicalisations comparées diffèrent encore de la constante obtenue sur C_f. Appliquer le cas de la différence constante déjà établi dans la preuve pour comparer les vecteurs-volumes canoniques.

Sur $\mathbf{G}_m^{\mathrm{an}}$, prenons $f(z) = (z, c)$ avec $|c| \neq 1$, $q(u, v) = u$ et $q'(u, v) = uv$. Leurs tropicalisations sont injectives sur l'image de tout segment squelettique non dégénéré. Leurs parties linéaires y coïncident, et la différence est $\log |c|$ sur toute la préimage du segment.

397. Localisation du calcul du calibrage

Texte visé. Preuve de la proposition 14.4.2, p. 409.

`calibrage.tex`, lignes 3238–3254.

Correction. Vérifier l'identité de calibrages sur des parties paralinéaires compactes $S \subseteq \Sigma$. La compacité topologique de p_Σ donne la compacité de $p^{-1}(S)$. On peut alors choisir un voisinage analytique compact de cet ensemble dans Y et effectuer le calcul sur cette partie.

Exemple. Si Y est l'anneau ouvert intérieur à un anneau fermé X, avec p l'inclusion et Σ l'intervalle squelettique ouvert, p_Σ est l'identité. L'intervalle tout entier ne tient dans aucun voisinage compact de Y, puisque le logarithme du rayon envoie tout compact de Y dans un sous-intervalle compact de l'intervalle ouvert.

398. Ensembles caractéristiques et cellules de dimension maximale

Texte visé. Preuve de la proposition 14.4.2, p. 409.

`calibrage.tex`, lignes 3257–3259.

Correction. Après localisation sur une trace compacte adaptée de la cible, utiliser l'égalité des ensembles caractéristiques entiers $p^{-1}(\Sigma_f) = \Sigma_{f \circ p}$. Pour calculer l'image directe, subdiviser

de façon compatible l'immersion par morceaux propre. Écarter les images des cellules sources de dimension inférieure, ainsi que les traces des bords analytiques, après adaptation du découpage.

À l'intérieur relatif de chaque n-cellule restante de la cible, les antécédents se trouvent dans les bonnes n-cellules sources. Les moments y sont finis et plats aux points considérés, avec degrés localement constants. La somme des degrés calibrés sur ces feuillets donne le coefficient de l'image directe. Les ensembles exceptionnels de dimension inférieure sont négligeables pour l'identité de calibrages.

399. Degré constant sur chaque composante de l'ouvert tropical

Texte visé. Remarque 14.5.4, pp. 411–412.

`calibrage.tex`, lignes 3436–3461.

Correction. Sous les hypothèses imprimées, le degré est constant sur chaque composante connexe de V. Il est donc constant sur V lorsque V est connexe, notamment lorsqu'il est l'intérieur relatif de sa cellule adhérence.

En un relèvement squelettique d'un point de V, la projection de plein rang donne le point de Gauss standard. La restriction est sans bord, donc le moment projeté est fini et plat au relèvement. L'ouverture locale et la continuité de la section de Gauss donnent un voisinage ordinaire du rayon dans $q_{\mathrm{trop}}(V)$. Choisir une boîte compacte autour du rayon, contenue dans cet ouvert projeté, et un voisinage analytique cible dont la tropicalisation est dans l'intérieur de la boîte. La restriction y coïncide avec la restriction à la préimage de la boîte fermée dans l'enveloppe de V. La propreté se conserve pour cette découpe fermée, et les fibres gaussiennes intérieures de dimension zéro donnent une application finie et plate. Son rang est localement constant le long de la section de Gauss. La formule de calibrage donne ce rang multiplié par le même vecteur-volume inversement projeté.

Pour $0 < a < b < c$ dans le groupe des valeurs d'un corps non trivialement valué, prendre un anneau fermé de rayons $[a, b]$ et deux copies de celui de rayons $[b, c]$, avec leur coordonnée comme moment sur la réunion disjointe. Sur $V = (a, b) \cup (b, c)$, de clôture $[a, c]$, les degrés et les coefficients de calibrage valent respectivement 1 et 2.

400. Degré fini et plat dans le cône résiduel

Texte visé. Preuve du théorème 14.6.2, p. 414.

`calibrage.tex`, lignes 3690–3704.

Correction. Dans le voisinage affinoïde résiduel Υ, pour une cellule maximale ouverte C, poser $\widetilde{D} = C \cap \tilde{f}_{\mathrm{trop}}(\Upsilon)$ et $\widetilde{D}' = q_{\mathrm{trop}}(\widetilde{D})$. Le nombre $\widetilde{N}_C$ est le degré de la restriction de $\tilde{g}$ à $\tilde{f}_{\mathrm{trop}}^{-1}(\widetilde{D}) \cap \Upsilon$, finie et plate au-dessus de $\mathrm{sq}(\widetilde{D}')$. Le vecteur-volume résiduel sur C est alors $\widetilde{N}_C \, \sigma_C(e)$.

401. Inégalités strictes dans l'enveloppe linéaire

Texte visé. Preuve de la proposition 14.6.4, p. 414.

`calibrage.tex`, lignes 3742–3754.

Correction. Décrire C par les équations rationnelles de son enveloppe linéaire et des inégalités strictes dans cette enveloppe. On peut aussi choisir une condition ambiante dont la trace sur le cône tropical considéré est C. La première description donne l'ouverture relative dans l'enveloppe.

Exemple. Pour $f = (T, T)$ sur $\mathbb{G}_m$ au point de Gauss unité, le rayon diagonal ouvert est donné par $u - v = 0$ et $u > 0$. Il a intérieur vide dans $\mathbb{R}^2$, alors qu'un lieu non vide défini uniquement par des inégalités linéaires strictes y est ouvert.

402. Relèvements rationnels des paramètres résiduels

Texte visé. Preuve de la proposition 14.6.4, p. 415.

`calibrage.tex`, lignes 3771–3783.

Correction. Choisir chaque h_i dans $k(\mathscr{Y})$, plongé densément dans $\mathscr{H}(y)$ au point analytique situé au-dessus du point générique. Approcher un relèvement de norme 1 du résidu prescrit à une distance strictement inférieure à 1. Le choix rationnel a alors le même résidu et la norme 1. Il donne un germe analytique inversible près de y. En chassant les dénominateurs, ses conditions de norme se formulent dans le langage des corps valués.

403. Cible du morphisme fini étale

Texte visé. Preuve du lemme 14.6.5, p. 415.

`calibrage.tex`, lignes 3825–3833.

Correction. Pour les voisinages affinoïdes choisis, écrire $p_1 \colon Y_1 \to Z_1$ pour le morphisme fini étale. Le morphisme $h_1 \colon X_1 \to Y_1$ reste fini et plat de degré P.

404. Degré des algèbres locales de la fibre choisie

Texte visé. Preuve du lemme 14.6.5, pp. 415–416.

`calibrage.tex`, lignes 3843–3863.

Correction. Fixer le point cible z et noter y_i les points de la fibre de p_1. Pour chaque y_i qui satisfait Θ, additionner les dimensions des algèbres locales aux points de la fibre de h_1 au-dessus de y_i. La somme sur $\mathscr{H}(y_i)$ vaut P par finitude et platitude. Comme p_1 est étale, le facteur de sa fibre en y_i est $\mathscr{H}(y_i)$, de dimension $[\mathscr{H}(y_i) : \mathscr{H}(z)]$ sur $\mathscr{H}(z)$. On obtient

$$N_C = P \sum_{i : \Theta(y_i)} [\mathscr{H}(y_i) : \mathscr{H}(z)].$$

405. Cible séparée pour l'inclusion tropicale uniforme

Texte visé. Lemme 14.7.1, p. 417.

`calibrage.tex`, lignes 4297–4318.

Correction. Supposer Y topologiquement séparé. Le domaine analytique $g_{\mathrm{trop}}^{-1}(g_{\mathrm{trop}}(X_y))$ contient un voisinage ordinaire de la fibre de Zariski X_y au point rigide, par le lemme 11.4.10. Le complément de ce voisinage est fermé dans la source compacte. Son image est compacte, donc fermée dans Y. L'écarter donne l'inclusion uniforme.

Pour chacune des fibres gaussiennes compactes Z de n° 406, appliquer le même argument au domaine correspondant à $g_{\mathrm{trop}}(Z \cap X_y)$. Le point y est rigide, donc $\mathscr{H}(y)/k$ est finie et le degré de transcendance gradué sur k en tout point de X_y est au plus $\dim X_y$. Le corps de la fibre gaussienne consomme une unité de ce rang. Ainsi $\dim g_{\mathrm{trop}}(Z \cap X_y) \leq \dim X_y - 1$. Prendre l'union finie de ces images et l'intersection des voisinages cibles. Pour une fibre spéciale vide, écarter directement l'image compacte de la source.

Pour voir la nécessité de l'hypothèse, recoller deux disques unités sur leurs complémentaires de l'origine au-dessus de $\mathbb{Q}_p$. Sur leur réunion disjointe, les constantes 1 et p donnent au premier point origine la valeur 0, mais au-dessus de $T = p^j$ les deux valeurs 0 et $\log|p|$. Ces points convergent vers la première origine.

406. Fibres gaussiennes sur les intersections affinoïdes

Texte visé. Lemme 14.7.1, démonstration, p. 417.

`calibrage.tex`, lignes 4320–4325.

Correction. Choisir un G-recouvrement affinoïde fini de la source compacte et topologiquement séparée X. Chaque intersection de deux cartes, y compris une intersection diagonale, est un domaine compact séparé dans une carte affinoïde. Si un point est intérieur dans toutes les intersections qui le contiennent, les réductions des cartes et de leurs intersections en ce point sont pleines et se recollent en une seule réduction pleine. Tout point du bord ambiant est donc sur le bord d'une intersection.

G-recouvrir chaque intersection par un nombre fini de domaines affinoïdes. Les réductions des germes s'identifient à des ouverts du même espace de valuations graduées. Le bord de l'intersection est ainsi couvert par les bords des domaines affinoïdes du recouvrement. Appliquer le **lemme 3.1 de Ducros** à ces affinoïdes, avec tous les rayons réels strictement positifs autorisés, pour obtenir la famille finie de fibres gaussiennes compactes utilisée dans la preuve.

407. Régularité de la fonction en coordonnées tropicales

Texte visé. Corollaire 15.1.2, p. 422.

`fd-berk.tex`, lignes 77–83.

Correction. Exiger que φ soit lisse au voisinage de $f_{\mathrm{trop}}(x)$, puis restreindre le voisinage U à cette plage. Une fonction seuil de $\log|T|$ au point de Gauss de rayon 1 donne une composée discontinue si φ est arbitraire. Avec l'hypothèse de lissité, la proposition 15.1.1 donne la condition suffisante imprimée.

408. Supports compacts et indices de la partition

Texte visé. Corollaire 15.2.9, p. 424.

`fd-berk.tex`, lignes 295–305.

Correction. Si F est compact, choisir un nombre fini de fonctions lisses positives à support compact dans les ouverts prescrits, dont la somme est positive près de F. Normaliser près de F et multiplier par une coupure à support compact dans le lieu où cette somme est positive, égale à 1 près de F. On peut alors regrouper les termes par indice du recouvrement initial.

Si F est fermé et s'il existe des ouverts ordinaires V, U avec U paracompact et $F \subset V \subset \overline{V}^X \subset U$, utiliser les indices j d'un raffinement localement fini. Les fonctions $\theta_j \geq 0$ ont un support compact contenu dans $U_{i(j)}$, forment une famille localement finie dans X et ont une somme égale à 1 près de F. Cette version utilise la séparation lisse du corollaire 15.2.4 et la version corrigée du théorème A.2.9. Le cas ambiant sans cette hypothèse supplémentaire reste ouvert.

409. Valeurs du degré calibré sur le lieu de rang maximal

Texte visé. §15.4.1, p. 425.

`fd-berk.tex`, lignes 1424–1431.

Correction. En un point x de rang gradué maximal n, écrire $\mathrm{dc}_f(x) = \mathrm{dc}_x(f) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Ce point est universellement générique et hors du fermé exceptionnel de dimension $< n$. Sa fibre est finie, donc le degré est défini par 13.3.6. Les intégrations squelettiques ne font intervenir que ce lieu de rang maximal. Le degré reste défini aux autres points où 13.3.6 s'applique.

410. Dénominateurs dans la localisation rationnelle

Texte visé. Preuve de la proposition 15.5.4, p. 427.

`fd-berk.tex`, lignes 1586–1596.

Correction. Utiliser la densité de $\mathscr{O}(X)[1/g_i]$ dans $\mathscr{O}(V_i)$. Pour chaque coordonnée $h_{i,\ell}$, autoriser un quotient $a_{i,\ell}/g_i^{N_{i,\ell}}$ avec une puissance finie propre à cette coordonnée. Choisir une erreur uniforme strictement inférieure au minimum de $|h_{i,\ell}|$ sur V_i. Les valeurs absolues sont alors conservées et le numérateur reste une unité sur V_i. Les coordonnées tropicales s'expriment à partir des numérateurs et de g_i.

411. Réalisation locale d'une carte affine par un moment

Texte visé. Théorème 15.6.1, démonstration, p. 429.

`fd-berk.tex`, lignes 2242–2248.

Correction. Fixer un point de l'intérieur relatif de la facette. Sur un même voisinage ordinaire, chaque coordonnée de la carte affine f est une combinaison rationnelle de logarithmes de normes d'unités analytiques, plus une constante réelle. Chasser les dénominateurs par un même entier positif N et prendre les produits de puissances entières des unités. La tropicalisation du moment obtenu est $N(f - c)$, où c est le vecteur des constantes.

L'étoile des cellules supérieures incidentes et sa discordance calibrée se transportent par cette restriction et ce changement de coordonnées. Appliquer le calcul des fibres finies plates avec le choix local de n° 412. Les projections entières admissibles sont Zariski denses dans l'ouvert des conditions de rang, dont le complément est défini par les mineurs correspondants. Elles détectent donc la discordance à valeurs dans les n-vecteurs. Le calcul vaut en chaque point intérieur relatif de chaque facette.

412. Comptage dans le voisinage fini plat

Texte visé. Lemme 15.6.2, démonstration, pp. 430–431.

`fd-berk.tex`, lignes 2345–2367.

Correction. Prendre $x \in \operatorname{relint} F$. L'image de chaque cellule incidente contient un petit demi-voisinage relatif de la coordonnée projetée de x, et le moment projeté est un homéomorphisme de la cellule sur son image dans le squelette cible. Comme U est ouvert autour de x, rétrécir ces demi-voisinages pour que les points hors de la facette se relèvent dans $U \cap \operatorname{relint} C$. La finitude des cellules et la continuité de la section de Gauss donnent un choix commun de chaque côté, dans V.

Tout antécédent dans U appartient au squelette caractéristique, puisque son image de Gauss est de plein rang. Le choix de U le place dans une cellule incidente, et son côté détermine la famille de cellules à considérer. L'injectivité sur chaque cellule donne exactement les

antécédents sélectionnés. Si une famille latérale était vide, un point de Gauss de V dans le demi-voisinage correspondant aurait une fibre vide, en contradiction avec le rang fini plat positif. Les deux sommes de degrés valent donc le rang de $U \to V$.

413. Traces du bord relatif sur les cartes squelettiques

Texte visé. Théorème 15.7.1, démonstration, p. 432.

`fd-berk.tex`, lignes 2494–2497.

Correction. Pour $x \in V$, choisir un voisinage analytique ordinaire compact N dans lequel $V \cap N$ est fermé. Sur un G-recouvrement affinoïde fini (N_i) de N, les $V_i = V \cap N_i$ sont compacts et analytiquement séparés. Si un point de $V \cap \mathrm{Int}_X N$ est dans l'intérieur ordinaire relatif de chaque V_i qui le contient, les voisinages correspondants couvrent un voisinage dans N par la propriété du G-recouvrement. Dans l'intérieur de N, le bord relatif est donc couvert par les $\partial(V_i/N_i)$, inclus dans les ∂V_i par la formule de composition au-dessus de l'affinoïde N_i.

Recouvrir chaque V_i par un nombre fini d'affinoïdes. Les réductions des germes se plongent dans un même espace de valuations, donc les bords des cartes couvrent le bord de V_i. Le corollaire 12.9.14 corrigé donne sur le squelette un porteur fini fermé paralinéaire de dimension au plus $n-1$.

Sur un domaine de carte squelettique C, travailler dans un ouvert O de X où V est fermé. Sur $C \cap O$, la trace est vide près des points hors de V, et admet les porteurs locaux précédents près des points de V. Le sous-espace $C \cap O$ est paracompact par ses coordonnées affines. Choisir un recouvrement localement fini de compacts paralinéaires subordonné à ces voisinages et un porteur fini fermé sur chaque compact. Leur union est fermée paralinéaire dans $C \cap O$, de dimension $< n$, et contient toute la trace du bord relatif dans C.

414. Compatibilité des deux bords sous séparation analytique locale

Texte visé. §15.7.2, p. 433.

`fd-berk.tex`, lignes 2504–2512.

Correction. Ajouter que l'espace analytique topologiquement séparé X est analytiquement localement séparé. Appliquer la formule de composition des intérieurs à $V \hookrightarrow X \to \mathscr{M}(k)$, puis prendre les complémentaires dans V pour obtenir

$$\partial V = (\partial X \cap V) \cup \partial(V/X).$$

La structure G-tropicale affine et le calibrage canonique se restreignent aux domaines analytiques. Cette identité identifie donc les structures tropicales complètes.

Pour le contre-exemple, prendre $0 < a < r < b$ dans le groupe des valeurs d'un corps non trivialement valué. Recoller deux anneaux fermés de rayons $[a,b]$ le long du sous-anneau fermé de rayons $[a,r]$, et prendre V égal au premier anneau. Le point de Gauss commun de rayon r est intérieur dans V, mais les points de Gauss du second anneau de rayons supérieurs à r convergent vers lui depuis l'extérieur de V. Il appartient au bord relatif et reste extérieur au bord analytique intrinsèque de V.

415. Projection des courants sous finitude hors d'un fermé exceptionnel

Texte visé. Proposition 16.1.2, p. 435 du PDF, sans folio imprimé.

`courants-berk.tex`, lignes 40–50.

Correction. Supposer $f : Y \to X$ compact et fini au-dessus du complémentaire d'un fermé analytique de dimension $< n$. Toute forme test de type (n,n) ou $(n-1,n)$ s'annule près du

fermé exceptionnel, de même que son tiré en arrière sur la préimage. Sur le lieu fini, la borne locale du degré calibré et les deux formules d'image directe des formes-volume signées de 15.4.3 donnent (a) et les deux égalités de (b). Pour (c), apparier avec une forme lisse de type complémentaire à support compact et appliquer la formule de type (n,n) au produit extérieur avec ω, intégré contre u. L'intégrabilité de $f^{*}u$ définit l'appariement sur Y. La borne locale du degré sur le lieu actif et l'intégrabilité de u définissent celui sur X. Cette hypothèse suffit aussi dans 16.1.3–16.1.5.

Sur un corps complet non trivialement valué, inclure le disque fermé $\{|T|\le 1\}$ dans la droite analytique. Sur le squelette de coordonnée $t=\log|T|$, tester par $\chi(t)\,\mathrm{d}''t$, avec χ lisse à support compact et $\chi(0)=1$. Le courant de bord poussé donne l'intégrale de χ' sur $t\le 0$, égale à 1. Le bord de la droite donne zéro, par annulation des deux incidences. Le point de Gauss $t=0$ est de rang un.

416. Réduction au lieu plat près du support pondéré

Texte visé. Proposition 16.2.2, p. 438.

`courants-berk.tex`, lignes 279–281.

Obstruction. Sur le tore affinoïde $X=\mathscr{M}(\mathbf{Q}\{T,T^{-1}\})$ pour la valeur absolue triviale, prenons $f=T$. Des points rigides distincts $a_j\in\mathbf{Q}^{\times}$ convergent vers l'unique point de Gauss du squelette, puisque chaque polynôme de Laurent non nul ne s'annule qu'en un nombre fini de ces points. Réunissons de façon disjointe une copie de X envoyée par l'identité et des disques affinoïdes de dimension un envoyés aux points a_j. Prenons $\omega=1$, un moment g trivial et le poids $\lambda=1$ sur la copie de X, zéro ailleurs. Le support pondéré est propre et la fibre squelettique est de dimension pure zéro. Pourtant chaque voisinage du point de Gauss garde une branche non plate, sur laquelle $T-a_j$ agit par zéro.

Correction. Notons L le lieu ouvert de platitude de p et $S=\operatorname{supp}(\lambda\omega)$. Supprimons de la base $p(S\setminus L)$, fermé par propreté sur S. Ce fermé évite Σ_f, par le théorème 10.3.7 de Ducros appliqué aux points d'Abhyankar de la base réduite. Au-dessus de la base restante, restreignons la source à L. Les fibres squelettiques et tout le support pondéré au-dessus de cette base sont conservés, ainsi que les intégrales pondérées et la propreté sur ce support. La formule de dimension pour le morphisme plat donne la dimension pure $n-m$ de chaque fibre non vide.

417. Cellules incidentes dans la somme des degrés

Texte visé. Preuve du lemme 16.2.3, pp. 441–442.

`courants-berk.tex`, lignes 523–554.

Correction. De la ligne 523 à la dernière somme de degrés, conserver à chaque quantification ou sommation la condition $D\subset\Delta$, en ne prenant que les cellules de l'étoile locale finie de y. Pour une cocellule Γ fixée, les termes retenus sont les Δ incidentes à D qui se projettent sur Γ. Ainsi le calcul compte les antécédents du voisinage choisi.

418. Limite le long de chaque cocellule

Texte visé. Preuve de la proposition 16.2.2, p. 442.

`courants-berk.tex`, lignes 560–565.

Correction. Remplacer l'égalité ponctuelle imprimée par la relation

$$\lim_{\substack{\xi\to x\\ \xi\in\operatorname{relint}\Gamma}} u(\xi)=\sum_{D} v_D(x)L_{D,\Gamma},\qquad L_{D,\Gamma}=\sum_{\substack{\Delta\supset D\\ p(\Delta)=\Gamma}}\frac{e_\Delta}{d_\Gamma}.$$

Les cellules sont celles des étoiles locales finies et le support est propre localement au-dessus de la base. Le calcul combine la continuité des coefficients et le comptage d'incidence corrigé en n° 417. Il s'agit d'une limite le long de l'intérieur relatif de Γ.

419. Positivité au-dessus du support de la mesure de base

Texte visé. Lemme 16.2.5, démonstration, pp. 443–444.

`courants-berk.tex`, lignes 674–706.

Correction. Choisir un point y du squelette caractéristique commun où $\lambda(y) > 0$ et tel que $p(y) \in \operatorname{supp}(\alpha_{\mathrm{Rad}})$. Dans l'application à la richesse, il suffit que $p(y)$ appartienne au compact pur T choisi sur la base. Tout voisinage relatif de $p(y)$ y rencontre une cellule de dimension m et de volume positif. Le squelette de rang maximal dans la fibre sans bord est pur, donc le volume de la fibre y est positif. La continuité de l'intégrale de fibre lui donne un voisinage relatif de positivité. La condition de support sur la base et la formule de projection, avec la densité du lieu plat de n° 420, donnent alors une intégrale strictement positive.

En chacun des points du squelette donné, choisir une coupure lisse positive au point, non négative partout et portée dans un voisinage ordinaire arbitrairement petit. Le point de base appartient à T par construction. Ainsi tout tel voisinage a une masse de degré supérieur strictement positive pour le moment combiné. Le squelette donné est dans la partie pure de ce squelette caractéristique. Une restriction cellulaire compacte finie autour de lui donne l'agrandissement compact pur.

420. Densité du lieu plat avant la projection des fibres

Texte visé. Lemme 16.2.5, démonstration, p. 444.

`courants-berk.tex`, lignes 707–709.

Correction. Préparer les moments et le morceau pur de la base, puis passer aux espaces réduits pour l'argument de mesure. La formule de composition des intérieurs appliquée à l'immersion fermée de la cible conserve l'absence de bord. Sur chaque fibre, la réduction de la source donne une immersion fermée nilpotente, qui conserve l'espace sous-jacent et la dimension. Les structures squelettiques sont conservées.

Sur la cible réduite et avec la dimension relative pure, la remarque 16.5.2 donne la densité du lieu plat. Par additivité des rangs, un point de plein rang de la source se projette sur un point de plein rang de la cible, et le critère au point générique sur cible réduite donne la platitude. Ces points sont denses sur la source pure. Appliquer alors le théorème 16.5.4, avec l'égalité

$$\int_Y \lambda\omega \wedge p^*\alpha = \int_X u_{\lambda\omega}\,\alpha.$$

L'appartenance à la partie squelettique pure se transporte aux espaces initiaux.

421. Degrés des branches au-dessus des points de Gauss

Texte visé. Proposition 16.3.1, démonstration, p. 445.

`courants-berk.tex`, lignes 813–850.

Correction. Sur le voisinage affinoïde X' de la base et la boîte de Gauss choisis, les domaines de branches disjoints contiennent tous les antécédents des points testés. Le degré total y est la somme des degrés de ces branches. Pour une branche de rang fini plat e, restreindre la cible de son facteur quasi-étale à $X' \times_k Z$, où Z est une polycouronne compacte contenant l'image

pertinente du moment et la boîte de Gauss. Le morphisme quasi-étale compact satisfait alors aux hypothèses du théorème 5.3(1) de Ducros, avec groupe de stricte analyticité $\mathbb{R}_{>0}$.

Pour $1 \leq m \leq M$, le lieu V_m où le cardinal de la fibre géométrique est au moins m est un domaine analytique fermé de la cible compacte, donc compact. Le degré de la branche est $e \sum_{m=1}^{M} \mathbf{1}_{V_m}$. Appliquer le lemme 16.3.2 à ces domaines compacts, puis prendre un raffinement commun pour le nombre fini de branches et de boîtes.

422. Propreté sur le support de la forme

Texte visé. Preuve du théorème 16.3.3, p. 448.

`courants-berk.tex`, lignes 1054–1057.

Correction. Appliquer la propreté à la restriction de p au fermé $\operatorname{supp}\omega$. La partie de ce support extérieure à l'intérieur de $\bigcup_j W_j$ est fermée dans le support. Son image dans X est fermée et évite x, puisque les W_j recouvrent un voisinage de $p^{-1}(x) \cap \operatorname{supp}\omega$. Dans le complémentaire de cette image, choisir un voisinage V de x contenu dans les V_j. On obtient

$$p^{-1}(V) \cap \operatorname{supp}\omega \subseteq \bigcup_j W_j.$$

Cette inclusion suffit pour le calcul des intégrales.

423. Indicatrices dans les intégrales de fibre

Texte visé. Preuve du théorème 16.3.3, p. 448.

`courants-berk.tex`, lignes 1078–1086.

Correction. Pour une partie borélienne $B \subset Y$, écrire

$$u_{\mathbf{1}_B\omega}(v) = \int_{Y_v} \mathbf{1}_B\,\omega.$$

Appliquer cette notation à Ω_J, à son adhérence et aux approximations compactes $K_{J,a}$. Remplacer V_j par W_j dans la dernière inclusion. En effet, $K_{J,a}$ est dans $W_J \subset W_j$ pour chaque $j \in J$.

Pour la forme positive dans la preuve de (c), diriger les approximations extérieures par intersections finies. Pour chaque fibre, la mesure positive sur le domaine compact considéré est finie. La régularité et la compacité donnent la décroissance des masses vers celle de l'adhérence de Ω_J. Plus précisément, si un ouvert de la fibre contient l'intersection des compacts, une intersection finie est déjà contenue dans cet ouvert. L'égalité des intégrales sur Ω_J et sur son adhérence utilise les traces de bord négligeables dans le calcul imprimé.

424. Richesse de la composante dans la preuve de 16.3.3(a)–(c)

Texte visé. Preuve du théorème 16.3.3(a)–(c), pp. 448–449.

`courants-berk.tex`, lignes 1096–1102.

Correction. Pour une composante irréductible réduite Z de la base affinoïde, appliquer le corollaire 12.10.7 à la carte $(f_{\mathrm{trop}}, h_{\mathrm{trop}})$ sur Z. La richesse fournit une partie squelettique compacte Σ_Z dont l'image est le polyèdre P_Z. C'est cette surjectivité qui est utilisée dans la réduction par sections paralinéaires.

Si $r \notin |k^\times|^{\mathbf{Q}}$, le domaine $\mathscr{M}(k_r)$ de $\mathbf{A}^{1,\mathrm{an}}_k$, défini par $|T| = r$, est un singleton de dimension analytique un. Il ne contient aucune partie squelettique de dimension un, ce qui réfute la très grande richesse invoquée.

425. Richesse dans le cas d'un morphisme sans bord

Texte visé. Preuve du théorème 16.3.3(d), p. 449.

`courants-berk.tex`, lignes 1129–1134.

Correction. Dans la preuve de (d), le corollaire 12.10.7 fournit par richesse une partie squelettique compacte Σ_Z telle que $h_{\mathrm{trop}}(\Sigma_Z) = h_{\mathrm{trop}}(Z)$. Cela suffit pour la réduction par sections paralinéaires. L'identité du singleton analytique de dimension un $\mathscr{M}(k_r)$ de n° 424 est un morphisme sans bord. L'hypothèse de bord relatif ne donne donc pas la très grande richesse de sa base.

426. Dimension des agrandissements squelettiques locaux

Texte visé. Preuve de la proposition 16.4.1(b), p. 451.

`courants-berk.tex`, lignes 1272–1279.

Correction. Dans la réduction à un recouvrement fini, prendre des agrandissements squelettiques compacts purs de dimension $d + m$. Leur réunion finie est encore squelettique compacte, pure de cette dimension, et contient la partie initiale.

Pour $k = \mathbf{Q}_3$, prendre $r = 2$, $X = \mathscr{M}(k)$ de niveau $m = 0$, et $Y = \mathscr{M}(k_r)$ de niveau $n = 1$. Le moment T envoie l'unique point de Y dans le squelette du tore. Ainsi $\Sigma = Y$ est une partie squelettique pure de dimension $d = 0$ à ce niveau. Même pour le recouvrement réduit à Y, elle ne possède aucun agrandissement pur de dimension $n = 1$. La dimension $d + m = 0$ de la proposition convient.

427. Voisinage plat dans l'intérieur relatif

Texte visé. Preuve du théorème 16.4.4, p. 454.

`courants-berk.tex`, lignes 1527–1534.

Correction. Choisir l'ouvert U comme le lieu où $f \colon X \to D$ est plat dans $\mathrm{Int}(X/D)$. La preuve établit à x la platitude et l'intériorité relative. Les deux conditions définissent ici des ouverts, dont l'intersection donne un voisinage de x plat et sans bord sur le polydisque D.

428. Classe de coefficients intégrables sur les fibres

Texte visé. §16.5.3, p. 455.

`courants-berk.tex`, lignes 1597–1609.

Correction. Définir l'intégrale pour les G-formes dont les restrictions aux fibres de dimension d sont intégrables, et la poser égale à zéro sur les autres fibres. La classe borélienne tropicale localement bornée de 16.5.4 suffit. Sur chaque fibre, un nombre fini de cartes à coefficients et calibrages bornés couvre le support compact et donne des volumes finis. Cela vaut également pour les coefficients lisses ou localement bornés dans les applications précédentes.

Sur la fibre $\mathbf{G}^{\mathrm{an}}_m$ au-dessus du point de base, prendre $t = \log|T|$, et multiplier $\mathrm{d}'t \wedge \mathrm{d}''t$ par $\mathrm{sgn}(t)/t^2$ pour $0 < |t| < 1$, et par zéro ailleurs. Le support est contenu dans une couronne compacte et le morphisme structural est plat. Les parties positive et négative ont chacune une intégrale infinie pour le calibrage coordonnée, donc l'intégrale signée n'est pas définie.

429. Purification pour la réduction de Poincaré–Lelong

Texte visé. Preuve du lemme 16.7.5, pp. 460–461.

`courants-berk.tex`, lignes 2139–2148.

Correction. Passer à la fermeture analytique du complémentaire des composantes immergées, comme dans l'exemple 16.1.4(b). Cette purification satisfait (S_1) et conserve les anneaux locaux génériques pertinents. La fonction régulière f ne s'annule identiquement sur aucune composante immergée. Les multiplicités génériques du diviseur et les courants d'intégration de degré zéro sont donc conservés par l'inclusion de l'espace purifié.

Dans $\left(\operatorname{Spec} k[S,T,U]/(T^2,ST)\right)^{\mathrm{an}}$, la multiplication par U est injective. L'idéal premier immergé (S,T) est l'annulateur de T. Après localisation en ce premier, le local de dimension un a profondeur zéro. Cela réfute l'inférence imprimée à partir d'un seul élément régulier.

430. Approximation du support de Shilov potentiel par potentiel

Texte visé. Proposition 16.8.2, démonstration, p. 463.

`courants-berk.tex`, lignes 2630–2640.

Correction. Vérifier d'abord le support pour des potentiels tous lisses sur une carte locale commune, à l'aide du squelette caractéristique après extension des scalaires. Fixer tous les potentiels sauf le premier. Dans cette variable, la propriété est locale et passe aux limites localement uniformes par la continuité de Bedford–Taylor et la fermeture de l'image de Shilov. Elle vaut donc dans le faisceau engendré par les fonctions psh lisses sous cette stabilité. Fixer ensuite ce premier potentiel psh continu arbitraire et répéter l'argument dans chaque variable restante. La multilinéarité donne le cas dpsh.

431. Mesure-test positive pour le passage à l'image réciproque

Texte visé. Théorème 16.8.5, démonstration, pp. 464–465.

`courants-berk.tex`, lignes 2710–2739.

Correction. Travailler sur la carte propre au-dessus du complémentaire de l'image tropicale du bord. L'image tropicale d'une partie compacte de l'ensemble fermé est compacte et nulle pour la mesure de Hausdorff de la dimension requise. Sur un voisinage de cette image, choisir une forme test lisse dans l'intérieur du cône de positivité complémentaire. Appliqué au courant poussé positif fermé, le corollaire de Lagerberg donne une masse nulle sur cette image pour la mesure positive de trace. La positivité donne alors une masse nulle sur toute sa préimage.

Sur un voisinage compact de l'image, un multiple suffisamment grand de cette forme test domine les deux signes de la partie symétrisée de la forme test initiale. En testant par des fonctions scalaires positives, on majore la variation totale de la mesure initiale par le même multiple de la trace positive. Elle est donc nulle sur le compact choisi. Une exhaustion compacte dans la carte propre donne la nullité sur l'ensemble fermé dans cette carte.

432. Quotients locaux pour les unités après extension des scalaires

Texte visé. Corollaire 16.8.6, démonstration, p. 465.

`courants-berk.tex`, lignes 2773–2781.

Correction. En un point de la section de Shilov dans W, approcher la valeur de l'unité locale par un quotient d'éléments affinoïdes globaux dans le corps résiduel complété du point. Garder l'erreur ultramétrique strictement inférieure à la norme de l'unité sur un ouvert relatif de W, y compris après approximation du numérateur et du dénominateur par des polynômes de Laurent

finis en le paramètre de Gauss. Les images réciproques de ces ouverts couvrent le compact au-dessus de W. Prendre un rétrécissement fermé fini de ce recouvrement.

Dans chaque compact, découper suivant les termes de Laurent maximisants du numérateur et du dénominateur. Leurs coefficients sur la base ne s'annulent pas sur le compact correspondant. Leur quotient est une unité sur un voisinage ordinaire. Sa norme, multipliée par la puissance entière correspondante du rayon de Gauss, donne la norme initiale le long de la section. Raffiner simultanément pour toutes les coordonnées du moment. Couvrir les pièces par un nombre fini de voisinages analytiques compacts dans ces domaines d'unités. Appliquer l'hypothèse de nullité tropicale avec l'exposant de n° 58. Les translations des coordonnées conservent la nullité de Hausdorff.

433. Coordonnée constante dans le maximum logarithmique

Texte visé. Preuve de la proposition 16.9.1, p. 466.

`courants-berk.tex`, lignes 2960–2965, 2984–2986.

Correction. Ajouter une coordonnée constante finie au maximum avant la régularisation, par exemple

$$u = \max(0, u_1, \dots, u_n), \qquad u_i = \log(|f_i/g|/\lambda_i).$$

Chaque sous-niveau de seuil $t \geq 0$ garde les mêmes inégalités rationnelles. Près d'un zéro d'un numérateur, son logarithme tombe au-dessous de la constante de plus que la marge d'omission du maximum régularisé. Cette coordonnée peut alors être omise. Les coordonnées restantes proviennent localement d'unités analytiques ou de la constante. On obtient une fonction finie, lisse et psh en utilisant aussi n° 434 et n° 435.

434. Normalisation du noyau du maximum régularisé

Texte visé. Preuve de la proposition 16.9.1, p. 466.

`courants-berk.tex`, lignes 2970–2983.

Correction. En m variables, multiplier le produit imprimé des noyaux par ε^{-m}. On peut écrire

$$M_\varepsilon(s) = \int_{\mathbf{R}^m} \max_i (s_i + t_i) \prod_{i=1}^{m} \bigl(\varepsilon^{-1}\theta(t_i/\varepsilon)\bigr)\, dt.$$

Si $\int \theta = 1$, chaque facteur dilaté a masse un. La translation commune des s_i commute alors avec M_ε. L'intégration d'une coordonnée omise donne aussi le facteur un.

435. Centrage du noyau dans la borne inférieure

Texte visé. Preuve de la proposition 16.9.1, p. 466.

`courants-berk.tex`, lignes 2970–2980.

Correction. Choisir θ paire, ou imposer $\int t\theta(t)\, dt = 0$, en conservant la positivité, la masse un et le support imprimés. Après la normalisation de n° 434, le vecteur de décalage a moyenne nulle. L'inégalité de Jensen appliquée au maximum convexe donne $\max_i s_i \leq M_\varepsilon(s)$. Comme tous les décalages sont dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$, la borne supérieure reste $\max_i s_i + \varepsilon$. En une variable, une moyenne non nulle déplace directement la valeur régularisée.

436. Continuité des semi-métriques sur un fibré trivial

Texte visé. Exemple 17.1.4, p. 472.

`metriques.tex`, lignes 73–87.

Correction. La formule $v \mapsto |T(v)|u(p(v))$ définit pour toute fonction $u\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ l'unique semi-métrique fibre par fibre de norme u sur la section inversible. Elle est continue exactement lorsque u est continue, comme le montre la restriction à la section. Dans la définition 17.1.2, réserver la continuité aux semi-métriques continues. Si l'on conserve cette condition dans la définition générale, imposer u continue dans la réciproque de l'exemple.

437. Site du faisceau quotient des poids métriques

Texte visé. Exemple 17.1.4, p. 472.

`metriques.tex`, lignes 100–105.

Correction. Sur un G-recouvrement trivialisant par les repères s_i, les poids continus $-\log\|s_i\|$ définissent une section du quotient

$$\mathscr{C}^0_{X_G} / \log|\mathscr{O}^\times_{X_G}|.$$

En effet, leurs différences sur les intersections sont les logarithmes des normes des unités de transition, avec le signe du poids. La topologie des recouvrements pointés finis permet de recoller la continuité de la norme sur l'espace total à partir des normes continues dans les repères. Si les repères sont pris sur des ouverts ordinaires, on utilise le quotient correspondant sur le site ordinaire.

438. Valuation de l'extension et densité des points rationnels

Texte visé. Preuve de la remarque 17.1.9, p. 474.

`metriques.tex`, lignes 238–260.

Correction. Pour appliquer la densité des points rationnels, effectuer le changement de corps vers une extension algébriquement close, sphériquement complète et munie d'une valuation non triviale. Si k est trivialement valué, l'ouvert analytique $0 < |T_1| < 1$ est non vide et ne contient aucun point k-rationnel. L'existence de l'extension et la densité après changement de corps sont les deux résultats utilisés. La correction vise l'étape de densité dans la preuve.

439. Continuité et lissité des métriques tensorielles et duales

Texte visé. § 17.1.10, p. 474.

`metriques.tex`, lignes 279–287.

Correction. Les métriques sur L et L' induisent les uniques métriques fibre par fibre vérifiant

$$\|s \otimes s'\| = \|s\|\,\|s'\|, \qquad \|s^{-1}\| = \|s\|^{-1}$$

pour les repères correspondants. La métrique du produit tensoriel est continue si les deux métriques de départ sont continues, et la métrique duale est continue si celle de L est continue.

Pour une métrique lisse, l'application analytique d'inversion du fibré privé de sa section nulle vers son dual privé de sa section nulle donne la lissité de la métrique duale. Pour le produit tensoriel, la lissité vaut aussi avec des trivialisations seulement G-locales. Présenter le logarithme de la norme par un moment sur une couronne relative étroite. Les coefficients de Laurent se recollent analytiquement sur les intersections de domaines de trivialisation. En évitant les rayons où deux termes dominants sont à égalité, au moins un exposant dominant est

non nul, car la norme varie avec le rayon dans la fibre. Le coefficient correspondant donne un repère ordinaire d'une puissance positive. La dominance des monômes permet d'y exprimer le logarithme de la norme par des logarithmes de normes d'unités ordinaires et des constantes. En prenant une puissance commune des deux fibrés, on multiplie les normes des repères lisses. Le tiré en arrière par l'application puissance, puis la racine positive, donnent la métrique lisse du produit tensoriel.

440. Réduction relative au germe fixé

Texte visé. Preuve de la proposition 17.3.3, p. 479.

`metriques.tex`, lignes 677–691.

Correction. Dans le calcul de $\widetilde{(V', x)}$, intersecter le domaine des inégalités résiduelles avec la réduction du germe de départ. En conservant les notations de la preuve, on obtient

$$\widetilde{(V', x)} = \widetilde{(V, x)} \cap \mathbb{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}/\tilde{k}}\{\widetilde{a_i(x)}\,\widetilde{a(x)}\}_{i\in I}.$$

La proposition évalue déjà les inégalités sur cette réduction fixée.

441. Accouplement sur la réduction du dual

Texte visé. § 17.4.3, p. 481.

`metriques.tex`, lignes 842–855.

Correction. Prendre σ de degré r dans $\widetilde{E^\vee(x)}$ et le relever en une forme linéaire s de norme d'opérateur au plus r. Pour τ de degré q dans $\widetilde{E(x)}$, prendre un représentant t de norme au plus q. L'accouplement est la forme initiale de degré rq de $s(t)$. Les changements de représentants donnent une différence de norme strictement inférieure à rq.

Une base orthogonale identifie les bases duales et donne l'isomorphisme annoncé. Avec la convention selon laquelle le générateur de $A[r]$ est de degré r, un élément de degré r du Hom interne correspond à une application homogène de degré 1 à valeurs dans le décalé par r^{-1}.

442. Réalisation globale d'un fibré résiduel

Texte visé. Proposition 17.4.7, p. 483.

`metriques.tex`, lignes 1005–1061.

Correction. L'énoncé global est conservé pour X séparé et x presque bon. Choisir les relèvements $u_{\alpha\beta}$ avec leur réduction générique prescrite. Les cobords exacts $u_{\beta\gamma} = u_{\alpha\beta}^{-1}u_{\alpha\gamma}$ ont alors la réduction prescrite sur chaque intersection. Appliquer le critère d'isométrie à tous les couples après un seul rétrécissement commun. Le recollement réalise le fibré résiduel M par une norme paralinéaire entière sur un fibré libre au voisinage de x.

La preuve de remplacement prolonge cette norme sur $\mathscr{O}_X^m$, où m est le rang de M. Utiliser une coupure paralinéaire entière β à support compact, égale à 1 près de x, et la norme standard N_0. Sur un domaine analytique compact convenable, des bornes uniformes de comparaison avec la norme locale N permettent de choisir des entiers $A, B \geq 0$. Le maximum de $e^{-A\beta}N_0$ et de $e^{B(\beta-1)}N$ vaut N près de x et N_0 là où $\beta = 0$. Les bases obtenues par les mineurs pondérés donnent des normes universelles paralinéaires entières et autorisent le prolongement par N_0. Les constantes réelles positives sont permises, y compris en valuation triviale. Le prolongement strictement entier et celui d'un fibré non libre prescrit demandent des arguments distincts.

443. Facteur de normalisation au point marqué

Texte visé. Lemme 17.4.10, p. 484.

`metriques.tex`, lignes 1132–1145.

Correction. Pour chaque unité a_i de la famille non vide, poser

$$r_i = (|a_i(x)|\,\|s(x)\|)^{-1}.$$

Ainsi $r_i|a_i(x)| = \|s(x)\|^{-1}$ pour tout i. Dans la preuve, appliquer aussi les corrections n° 835 et n° 836 au domaine des inégalités et à sa réduction.

444. Normalisation pour une famille fixée de sections

Texte visé. Corollaire 17.4.11, p. 485.

`metriques.tex`, lignes 1171–1188.

Correction. Préciser que la famille finie (a_i) est non vide et poser $r_i = (|a_i(x)|\,\|s(x)\|)^{-1}$. Le lemme 17.4.10 corrigé et le critère résiduel de génération globale donnent alors l'équivalence avec $\|s\|^{-1} = \max_i r_i|a_i|$ au voisinage de x.

445. Domaine strict du sous-niveau de la norme

Texte visé. § 17.5.2, pp. 486–487.

`metriques.tex`, lignes 1323–1325.

Correction. Soit V un domaine strictement k-analytique contenant x, et soit s une section de E sur V telle que $\|s(x)\| = 1$. Choisir un voisinage analytique strict U de x où la métrique est strictement entière et prendre

$$W = \{y \in V \cap U : \|s(y)\| \leq 1\}.$$

Le domaine W est strict. Sa réduction de germe en degré 1 est le lieu $v(\widetilde{s(x)}) \leq 1$ dans $\widetilde{(V,x)}^{\,1}$. Pour que le sous-niveau entier dans V soit strict, supposer la métrique strictement entière sur V. La définition de l'application de réduction reste celle de n° 837.

446. Portée locale et globale de la réalisation résiduelle stricte

Texte visé. Proposition 17.5.6, pp. 486–487.

`metriques.tex`, lignes 1397–1404.

Correction. Pour toute valuation autorisée, réaliser le fibré au voisinage de x. Prendre un recouvrement strict fini du germe réduit avec des repères de degré un. Relever les transitions génériques comme dans le lemme 17.3.2, en formant les autres par cobords exacts à partir d'un repère fixé. Le critère d'isométrie stricte permet un rétrécissement commun de tous les recouvrements. Les modèles orthonormés se recollent, et les mêmes cobords donnent un fibré sous-jacent libre. C'est la portée locale utilisée dans 17.5.7(b).

Lorsque la valuation de k est non triviale, la conclusion stricte vaut sur X entier. Choisir $\pi \in k^\times$ de norme entre 0 et 1. Sur les morceaux rationnels stricts des sous-domaines compacts, chasser les dénominateurs des rayons par des puissances communes. Tronquer à une puissance de $|\pi|$ inférieure au minimum positif du maximum pondéré des numérateurs et du dénominateur rationnels. Cela donne la pénalité PL strictement entière de n° 442, nulle précisément sur le domaine. Approcher les unités par des fractions d'erreur strictement inférieure à leur norme

minimale, puis tronquer les normes du numérateur et du dénominateur à des puissances de $|\pi|$. Les maxima et les multiples entiers de ces pénalités recollent les prolongements sur les domaines compacts.

Les seuils dans l’enveloppe divisible dense donnent une coupure strictement entière b, portée dans l’ouvert de réalisation locale, avec $0 \leq b \leq c = \log|\pi|^{-1}$ et $b = c$ près de x. Sur un collier compact comparer la norme locale N à la norme standard N_0. Pour des entiers A, B assez grands, le maximum de $e^{-Ab}N_0$ et de $e^{B(b-c)}N$ vaut N lorsque $b = c$ et N_0 lorsque $b = 0$. Sur les domaines stricts qui comparent les mineurs des deux matrices de repères empilées, un mineur maximal et la règle de Cramer donnent un repère orthonormé. Recoller avec N_0 hors du support.

Avec valuation triviale, la conclusion universelle sur tout X est fausse. Sur le bidisque unité fermé $X = \mathscr{M}(k[S,T])$, au point de Gauss, prendre pour $r \geq 1$ le fibré résiduel $(S,T)\mathscr{O}_{R_A} \oplus \mathscr{O}_{R_A}^{r-1}$ sur l’espace centré R_A des valuations de $k(S,T)$. L’idéal y est inversible, engendré par S lorsque $v(S) \leq v(T)$ et par T sur l’autre ouvert. Le déterminant de tout candidat global aurait un repère global par l’équivalence cohérente affinoïde et la factorialité de $k[S,T]$. La réduction commute au déterminant. Pour une valuation discrète centrée v, suivre la trajectoire $|h| = t^{v(h)}$, $0 < t < 1$. La norme stricte du repère du déterminant est une puissance entière de t. Son exposant, entier et continu, est constant. À l’extrémité $t = 0$, le corps résiduel complété est trivialement valué et ce repère global ne s’annule pas. Sa norme y est finie et strictement positive. La continuité impose donc l’exposant zéro. La comparaison du porteur et de la partie terminale de la trajectoire établie en M03–M04 donne le réseau résiduel unité pour ce déterminant. Un même multiplicateur générique devrait alors avoir valuation nulle à tous les premiers de hauteur un, mais valuation 1 au diviseur exceptionnel de l’éclatement de (S,T). La factorialité donne une contradiction. Cette obstruction laisse subsister la réalisation locale stricte et la réalisation globale entière non stricte de n° 442.

447. Groupe des valeurs en un point d’Abhyankar

Texte visé. § 17.6.1, p. 489.

`metriques.tex`, lignes 1534–1546.

Correction. Dans le cas d’égalité des dimensions considéré, remplacer l’affirmation d’indice fini par la conclusion du lemme 11.5.4(b). Le quotient $|\mathscr{H}(x)^\times|/|k^\times|$ est un groupe abélien de type fini. Son sous-groupe de torsion est fini, et le quotient des groupes de valeurs est fini exactement lorsque son rang rationnel est nul.

448. Recollement global des enveloppes de dimension locale

Texte visé. Proposition 17.6.2, pp. 489–490.

`metriques.tex`, lignes 1553–1656.

Correction. Sous les hypothèses imprimées, conserver l’enveloppe faiblement analytique locale de dimension au plus $n-d$. Pour l’enveloppe globale, il suffit de supposer X paracompact. Prendre un recouvrement localement fini par domaines analytiques compacts contenus dans les ouverts ordinaires portant les enveloppes locales. Dans chaque domaine compact, prendre l’intersection avec l’enveloppe choisie. La restriction des cartes de fibres préserve le caractère faiblement analytique et la borne de dimension. Ces intersections forment une famille localement finie de fermés. Leur réunion est donc une enveloppe faiblement analytique fermée, de dimension au plus $n - d$.

Pour $d = n$, les recouvrements locaux par fibres de dimension nulle ne donnent localement qu’un nombre fini de points. Ainsi W^n est fermé et discret sous les hypothèses imprimées.

449. Bornes de la dimension de définition analytique

Texte visé. Preuve de la proposition 17.6.4(b)–(c), p. 492.

`metriques.tex`, lignes 1823–1852.

Correction. À la ligne 1825, lire que la dimension de définition analytique est « minorée par d », par la borne de réduction du germe sans bord. Avec la majoration tirée de (a), on obtient l'égalité de (b).

Pour (c), garder le même exposant commun q pour tous les fibrés en droites, comme dans n° 840. Le procédé de descente par les puissances définit la réduction du germe et les fibrés $E_i^{\otimes q}$ sur le sous-corps séparablement engendré choisi, de degré de transcendance d. La construction analytique de (a) appliquée à ce corps donne un germe de définition de dimension d, donc la majoration voulue. Le degré minimal de la famille élevée à la puissance q peut être inférieur à d.

450. Dimension du prémodèle strict génériquement lisse

Texte visé. § 17.6.5, p. 492.

`metriques.tex`, lignes 1872–1877.

Correction. Pour une famille finie, dans la reformulation stricte de 17.6.4(a), demander que le prémodèle simultané $(V, (F_i)_i)$ soit porté par une $\tilde{k}^1$-variété intègre, génériquement lisse et de dimension d, où d est le degré minimal de définition résiduelle simultanée. Son corps des fonctions est de type fini, séparablement engendré et de degré de transcendance d. Réciproquement, sur un modèle intègre de ce corps, étaler les fonctions de transition et les conditions des cartes en nombre fini, puis choisir un représentant génériquement lisse.

451. Maximum pondéré dans l'argument de convexité

Texte visé. Preuve de la proposition 17.8.2, p. 497.

`metriques.tex`, lignes 2352–2359.

Correction. Le corollaire 17.4.12 corrigé donne, sur un voisinage convenable,

$$\|s\|^{-1} = \max_i c_i |a_i|, \qquad c_i > 0.$$

Conserver ces poids réels. En coordonnées tropicales $x_i = \log|a_i|$, le poids métrique est le tiré en arrière de la fonction convexe $x \mapsto \max_i(\log c_i + x_i)$. La conclusion locale de plurisousharmonicité est conservée.

452. Factorisation résiduelle stricte en degré un

Texte visé. Remarque 17.8.3, p. 497.

`metriques.tex`, lignes 2369–2384.

Correction. Prendre la droite résiduelle de degré un. Sur l'espace de Riemann–Zariski de degré un, choisir un pré-modèle quasi-projectif et écrire la droite comme différence de deux droites engendrées par leurs sections globales. Tirer ces droites en arrière et appliquer l'équivalence stricte en degré un. Les deux facteurs stricts ont alors des générateurs globaux de degré un.

Relever ces facteurs par la réalisation stricte locale et l'isomorphisme de leur différence par la plénitude sur les germes libres. Le critère précédent pour une droite résiduelle engendrée

globalement donne les deux métriques tropicalement convexes. Leur différence donne la métrique tropicalement d-convexe voulue.

453. Repères ordinaires pour la racine d'une métrique semi-ample

Texte visé. Corollaire 17.8.8, p. 499.

`metriques.tex`, lignes 2547–2558.

Correction. Supposer le fibré en droites localement trivial pour la topologie ordinaire, comme en 17.8.1. Une puissance tensorielle positive engendrée par un nombre fini de sections donne un morphisme projectif. Tirer en arrière une métrique lisse psh par ce morphisme. La racine d-ième donne une norme lisse hors de la section nulle par l'application analytique de puissance d-ième. Dans un repère ordinaire, son poids logarithmique est celui de la puissance tensorielle divisé par d, donc psh. La condition de trivialité est automatique sur un espace analytique bon.

454. Quotient global de métriques approchables par des métriques lisses psh

Texte visé. Preuve du corollaire 17.8.9, p. 499.

`metriques.tex`, lignes 2561–2585.

Correction. Conserver le corollaire pour une métrique paralinéaire quelconque sur l'analytifié d'une variété projective. Sur le point $\mathscr{M}(\mathbb{Q}_p)$, la norme $|p|^{\sqrt{2}}$ est paralinéaire entière et aucune de ses puissances tensorielles positives ne provient d'un réseau. La preuve de remplacement s'applique aussi en valuation triviale.

Choisir des métriques de Fubini–Study à poids réels sur des fibrés amples, après algébrisation du fibré et génération globale après tensorisation par un fibré ample suffisamment positif. La différence avec la métrique donnée est une fonction paralinéaire globale. Les présentations rationnelles locales, les pénalités qui s'annulent exactement sur leurs domaines et la polyédralité des images compactes permettent d'écrire cette fonction comme une différence de poids de Fubini–Study à poids réels, après un multiple tensoriel. Le maximum régularisé donne leur approximation uniforme par des métriques lisses psh, y compris près des zéros des sections grâce à l'omission des coordonnées suffisamment petites. En ajoutant un même poids auxiliaire sur un fibré auxiliaire globalement engendré choisi par tensorisation ample, puis en prenant les racines positives, on obtient des métriques sur deux véritables fibrés en droites dont le quotient est isométrique au fibré donné.

455. Hypothèses de l'approximation globale en géométrie complexe

Texte visé. Remarque 17.8.10, p. 500.

`metriques.tex`, lignes 2589–2592.

Correction. Dans la comparaison avec la géométrie complexe, prendre une métrique psh continue sur un fibré en droites ample au-dessus d'une variété projective complexe lisse. Le théorème 4.6.1 de Maillot et le théorème 1 de Błocki et Kołodziej donnent l'approximation uniforme par des métriques psh lisses sur ce même fibré. Sur la base compacte, les rapports de normes convergent uniformément vers 1, donc leurs logarithmes convergent uniformément vers 0. La question non archimédienne concerne toute métrique psh continue sur une variété projective. Il s'agit de savoir si elle est globalement psh au sens de 17.8.5, par une suite de métriques psh lisses sur le même fibré dont les rapports de normes avec la métrique donnée ont un logarithme convergeant uniformément vers zéro.

456. Lieu d’inversibilité d’une section méromorphe régulière

Texte visé. §18.1.5, p. 502.

`calculs.tex`, lignes 102–115.

Correction. Utiliser un ouvert de Zariski dense où la section est inversible. Dans un repère ordinaire, son coefficient méromorphe régulier est un quotient de deux fonctions analytiques non diviseurs de zéro. Sur le complémentaire de leurs lieux d’annulation, les deux fonctions sont des unités et le poids logarithmique de la section est défini. Ces lieux d’annulation sont fermés et de dimension $< n$. Les formes tests de degré supérieur s’annulent sur un voisinage de ces lieux, ce qui donne le prolongement unique par zéro dans la carte. Ces prolongements se recollent sur les intersections. Le cycle diviseur reste celui de l’identité de Poincaré–Lelong, indépendamment de l’ouvert d’inversibilité choisi.

457. Signe du poids tiré en arrière sur une composante

Texte visé. Preuve du corollaire 18.1.7, p. 503.

`calculs.tex`, lignes 201–204.

Correction. Si p_i désigne la restriction de p à la composante X_i, écrire $\log \|p_i^* s_j\|^{-1}$ dans l’intégrale du membre de droite. C’est le tiré en arrière du poids $\log \|s_j\|^{-1}$ sur la composante considérée.

458. Constante dans la formule de norme sur la couronne

Texte visé. § 18.2.7, p. 506.

`calculs.tex`, lignes 443–458.

Correction. Sur le squelette de la couronne rétrécie où f est inversible et $\omega = f\,dt/t$, écrire

$$|f| = C|t|^n, \qquad \|\omega\| = C|t|^n, \qquad C > 0.$$

La deuxième égalité utilise $\|dt/t\| = 1$ sur le squelette. La pente dans la coordonnée $\log|t|$ reste n.

459. Orientation des paramètres modérés sur les branches

Texte visé. § 18.2.8, pp. 506–507.

`calculs.tex`, lignes 464–496.

Correction. Pour un point x de type II, garder le choix d’un paramètre modéré monomial adapté, avec $|t|$ croissante vers x sur chaque branche considérée. Pour un point de type III et une seule direction, orienter ainsi la coordonnée de la couronne. Pour les deux directions opposées au même point de type III, employer une même coordonnée de couronne, avec des orientations opposées sur les deux branches. On peut aussi employer t et t^{-1} sur les deux côtés, chacun orienté vers x.

460. Paramètre modéré au point marqué et degré des branches choisies

Texte visé. § 18.2.8, cas d’un point de type II, p. 506.

`calculs.tex`, lignes 478–486.

Correction. Les choix résiduels prescrits donnent un paramètre modéré au point x. Les zéros simples aux points résiduels des branches choisies donnent un degré annulaire 1 sur chaque

branche, après raccourcissement. Ce sont ces propriétés qui servent au calcul des pentes. Pour propager la modération au-delà du point marqué, se restreindre au domaine analytique où le paramètre est modéré. La prescription des zéros et du pôle ne garantit pas que le paramètre soit modéré en tout point d'un voisinage ouvert ordinaire de x.

461. Factorisation méromorphe dans le disque

Texte visé. Preuve du lemme 18.2.11, p. 507.

`calculs.tex`, lignes 559–568.

Correction. Écrire $\omega = f\,dt$, où f est une fonction méromorphe régulière sur le disque D. Choisir une fonction rationnelle g dont le diviseur sur D est celui de f, avec les multiplicités des zéros et des pôles. Ainsi $f = ug$, où u est une unité analytique sur D. Sur le tronçon du squelette près de x, le facteur g donne la pente égale au degré du diviseur de f sur D, soit le nombre de zéros diminué du nombre de pôles, comptés avec multiplicité. Le facteur dt donne 1, d'où $n_e(\omega) = 1 + \deg(\omega|_D)$.

462. Lacune dans le complémentaire du squelette agrandi

Texte visé. Lemme 18.2.14(b), démonstration, p. 509.

`calculs.tex`, lignes 686–693.

Correction. Dans le disque où la valeur constante est non nulle, relier l'ancien point de bord à un point de la composante choisie de T par l'arc unique. Les deux extrémités appartiennent à T. L'arc ne peut être contenu dans T, puisque cette composante ne rencontre pas Σ. Choisir une composante connexe du complémentaire de T sur l'arc. C'est un intervalle ouvert dont les deux extrémités distinctes sont dans T et sur le bord de la composante de $X \setminus \mathrm{T}$ contenant l'intervalle. Cette composante reste dans le même disque à valeur non nulle. L'admissibilité en ferait un disque ouvert à un seul point de bord, en contradiction avec ces deux extrémités.

463. Signe de l'intégrale de bord sur une arête

Texte visé. Preuve du lemme 18.2.17, p. 512.

`calculs.tex`, lignes 920–924.

Correction. Avec les extrémités orientées a_e, b_e de l'arête, écrire

$$\int_e^{\partial} g\,d''f = g(b_e)f'_e(b_e) - g(a_e)f'_e(a_e) = -\varepsilon_e(x)f'_e(\tau_e(x)).$$

Ici g vaut 1 près de x et 0 à l'autre extrémité. La somme est nulle puisque X est sans bord.

464. Signe dans la somme des contributions orientées

Texte visé. Preuve du théorème 18.2.16, p. 513.

`calculs.tex`, lignes 929–932.

Correction. Après le lemme 18.2.17, écrire

$$\int_X \log\|\omega\|^{-1}\,d'd''f = -\sum_{x\in\mathscr{C}_0} f(x)\sum_{e\ni x}\varepsilon_e(x)n_e.$$

Reporter le même signe dans la reprise du calcul à la ligne 971.

465. Comparaison avec la pente dirigée vers le sommet

Texte visé. Preuve du théorème 18.2.16, p. 513.

`calculs.tex`, lignes 933–938.

Correction. Pour $x \in \mathscr{C}_0$ et $e \ni x$, lire $n_e(\omega) = -\varepsilon_e(x) n_e$. En additionnant les pentes, on obtient

$$-\sum_{e \ni x} \varepsilon_e(x) n_e = v(x) + \sum_{e \ni x} \mathrm{ord}_e(\widetilde{\omega(x)}).$$

466. Soustraction des degrés sur les disques

Texte visé. Preuve du théorème 18.2.16, p. 513.

`calculs.tex`, lignes 978–982.

Correction. La dernière ligne du calcul du diviseur canonique s'écrit

$$\langle K_X^{\mathrm{sq}}, f \rangle - \sum_{\substack{x \in \mathscr{C}_0 \\ f(x) \neq 0}} f(x) \deg(\omega|_{U_x}).$$

467. Support squelettique de la mesure de courbure testée

Texte visé. §18.3.1, p. 515.

`calculs.tex`, lignes 1051–1055.

Correction. Pour des métriques tropicalement d-convexes, poser $C = c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_m)$. Pour une forme lisse complémentaire α de type $(n-m, n-m)$ fixée, l'application

$$\varphi \longmapsto \langle C, \varphi \alpha \rangle$$

donne la mesure de Radon considérée dans la remarque 8.8.6. Sur un ouvert où les poids locaux et α ont une présentation par une même carte tropicale f, la trace de son support est contenue dans $\Sigma_f^{(n)}$. La vérification utilise le cas lisse convexe, puis la continuité du produit de Bedford–Taylor par approximation uniforme et la multilinéarité pour les différences de fonctions convexes.

En bidegré maximal $m = n$, on peut prendre $\alpha = 1$, ce qui donne le support localement squelettique de la mesure de courbure elle-même. Pour le produit avec un courant auxiliaire T, conserver le résultat précédent de §18.3.1 sous ses hypothèses propres de métriques paralinéaires et de courant T squelettique.

Exemple. Sur $(\mathbf{G}_m \times \mathbf{A}^1)^{\mathrm{an}}$ sur $\mathbf{Q}_p$, prendre $u = (\log|t|)^2$ et le courant d'intégration du sous-espace $z = 0$. Le produit avec $d'd''u$ est l'image directe d'une mesure de densité radiale strictement positive sur ce sous-espace. Son support contient le point de Gauss de rayon un sur $z = 0$, de rang résiduel un, alors que les points d'un squelette ambiant de niveau deux ont rang deux. Sans courant auxiliaire, les points de Gauss de rayons $(1, r)$ pour $r > 0$ appartiennent au support du courant intermédiaire $d'd''u$, comme le montre un test complémentaire positif dans la coordonnée $\log|z|$. Quand r tend vers zéro, ils convergent vers le même point de rang un. La borne squelettique porte sur chaque mesure obtenue par un test fixé.

468. Exposant de Hausdorff égal à la bidimension du produit

Texte visé. Proposition 18.3.7, p. 516.

`calculs.tex`, lignes 1169–1178.

Correction. Pour p fibrés en droites métrisés, supposer la nullité tropicale pour $\mathscr{H}^{n-p}$. Dans des repères ordinaires, les facteurs de courbure sont les seconds différentiels des poids dpsh. Appliquer au produit le corollaire 16.8.6 avec l'exposant corrigé en n° 58. En valuation triviale, utiliser la comparaison de cartes de n° 432. En valuation non triviale, utiliser la comparaison signée de n° 431. Le résultat local vaut pour les mesures test initiales.

469. Passage à la limite pour les courbures pondérées

Texte visé. Preuve de la proposition 18.3.9, p. 517.

`calculs.tex`, lignes 1315–1329.

Correction. Dans la limite de Bedford–Taylor aux lignes 1320–1321, écrire les potentiels u_i sans indice k. Pour une forme test fixée, les mesures signées obtenues en testant les produits approchés et leur limite sont toutes portées par le même compact Σ, contenu dans le lieu où s est une unité méromorphe et où le poids $h = \log \|s\|^{-1}$ est continu.

Sur ce compact, décomposer les produits en termes positifs. Les coefficients locaux bornés de la forme test permettent de dominer la variation totale par un nombre fini de mesures traces positives. Leurs masses sur le compact sont uniformément bornées par convergence faible après insertion de fonctions de coupure. Approcher uniformément h sur Σ par les restrictions de fonctions lisses, en le prolongeant d'abord avec une coupure dans le lieu de continuité. L'erreur pondérée est alors bornée par l'erreur uniforme multipliée par la borne commune de variation. Pour un poids lisse fixé, la convergence est celle de Bedford–Taylor sur les tests lisses. Ces deux estimations donnent le passage à la limite pondéré.

470. Construction et bidegré de la primitive

Texte visé. Preuve de la proposition 18.3.10, p. 518.

`calculs.tex`, lignes 1363–1371.

Correction. Dans chaque terme $T_1 \wedge \cdots \wedge T_n$ de la différence des produits de courbure, choisir un indice j tel que $T_j = d'd''u_j$. La somme des produits symétriques $u_j \bigwedge_{i \neq j} T_i$ donne la primitive α, une forme lisse ou un courant symétrique de bidegré $(n-1, n-1)$. Sa dérivée $d'd''\alpha$ est la différence des produits de bidegré (n, n). Lorsque X est propre, $\langle d'd''\alpha, 1\rangle = \langle \alpha, d'd''1\rangle = 0$.

471. Logarithme du maximum dans le poids métrique

Texte visé. Équation (18.4.5.1), p. 522.

`calculs.tex`, lignes 1664–1669.

Correction. Au voisinage de x, lire

$$\log \|s\|^{-1} = \log \max_i |f_i| = \max_i \log |f_i|.$$

472. Logarithme du maximum dans le poids résiduel

Texte visé. Équation (18.4.5.2), p. 522.

`calculs.tex`, lignes 1742–1747.

Correction. Au voisinage de ξ sur V^{an}, lire

$$\log \|\widetilde{s(x)}\|^{-1} = \log \max_i |\widetilde{f_i(x)}| = \max_i \log |\widetilde{f_i(x)}|.$$

473. Localisation au point générique de la fibre spéciale

Texte visé. Preuve de la proposition 18.5.8, p. 531.

`calculs.tex`, lignes 2893–2923.

Correction. Sur une carte formelle affine d'anneau A, soit $\mathfrak{p}$ le premier minimal au-dessus de l'uniformisante π qui représente ξ. La platitude rend π régulier. Le théorème de l'idéal principal donne $\dim A_{\mathfrak{p}} = 1$. L'anneau $A_{\mathfrak{p}}[1/\pi]$ est réduit et artinien. Ses idempotents sont entiers sur $A_{\mathfrak{p}}$, donc appartiennent à $A_{\mathfrak{p}}$ par normalité relative localisée. Comme cet anneau est local, l'anneau réduit artinien possède un seul facteur et est un corps.

Ainsi $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local noethérien normal intègre de dimension 1, donc un anneau de valuation discrète. Sa valuation, normalisée sur k, donne l'unique relèvement de ξ. Le corps résiduel est celui de $A_{\mathfrak{p}}$ et la multiplicité est la longueur de $A_{\mathfrak{p}}/\pi A_{\mathfrak{p}}$.

474. Comparaison des valeurs avec le seuil

Texte visé. Preuve du corollaire 18.6.2, p. 533.

`calculs.tex`, lignes 3227–3234.

Correction. Dans le premier cas, supposer $|f_i(x)|/r_i \neq t$ pour au moins un i. Avec $\rho_i = tr_i$, le poids se récrit

$$\phi = \log t + \log \max(1, |f_1|/\rho_1, \dots, |f_d|/\rho_d).$$

475. Puissance de la hessienne dans le premier cas

Texte visé. Preuve du corollaire 18.6.2, p. 533.

`calculs.tex`, lignes 3237–3244.

Correction. Près de x, la fonction ψ s'écrit à l'aide des $m-1$ rapports g_i/g_1, avec $m \leq d$. Leur image tropicale a dimension au plus $d-1$, si bien que la puissance d-ième de la hessienne de chaque approximation lisse s'annule. Le passage à la limite donne

$$(d'd''\phi)^d = (d'd''\psi)^d = 0.$$

476. Valeurs à égalité avec le seuil commun

Texte visé. Preuve du corollaire 18.6.2, p. 533.

`calculs.tex`, lignes 3246–3254.

Correction. Aux deux occurrences du second cas, lignes 3246 et 3254, supposer $|f_i(x)| = tr_i$ pour tout i. De façon équivalente, avec $\rho_i = tr_i$, chaque rapport $|f_i(x)|/\rho_i$ vaut 1. Le point de Gauss distingué a pour polyrayon $(\rho_1, \dots, \rho_d)$.

477. Dimension du lieu des zéros pour le prolongement

Texte visé. § 18.7.1, p. 534.

`calculs.tex`, lignes 3340–3354.

Correction. Le lieu commun des zéros Y est un sous-espace analytique fermé purement de codimension d, et $U = X \setminus Y$ est ouvert. La borne à utiliser est $d_k(x) \leq n-d$ pour tout $x \in Y$. Le lemme de prolongement donne alors les prolongements uniques par zéro des courants $(d'd''u)^r$ et $u(d'd''u)^r$ pour $r < d$.

478. Troncature logarithmique du potentiel

Texte visé. Preuve du théorème 18.7.2, p. 534.

`calculs.tex`, lignes 3373–3376.

Correction. Pour $r > 0$, poser

$$u_r = \max(\log r, u) = \log \max(r, e^u).$$

Dans la notation de la limite, poser $u_0 = u$.

479. Borne réelle près du support de la forme test

Texte visé. Preuve du théorème 18.7.2, p. 534.

`calculs.tex`, lignes 3385–3387.

Correction. Choisir un minorant réel b de u sur un voisinage compact dans U du support de $d'd''\omega|_U$. Prendre $0 < r_0 < e^b$. Pour $0 < r < r_0$, la troncature $u_r = \max(\log r, u)$ coïncide avec u sur un voisinage de ce support, ce qui suffit pour le couplage.

480. Définition du courant sur l'éclaté

Texte visé. Preuve du théorème 18.7.5, p. 536.

`calculs.tex`, lignes 3602–3606.

Correction. Pour toute forme test η, poser

$$\langle \Lambda', \eta \rangle = \langle h', \omega' \wedge \eta \rangle.$$

La fonction h' est continue sur le support squelettique compact de $\omega' \wedge \eta$, contenu dans U'. La restriction de Λ' à U' vaut $h'\omega'$.

481. Signe de la dérivation dans la formule de Levine

Texte visé. Preuve du théorème 18.7.5, p. 537.

`calculs.tex`, lignes 3617–3625.

Correction. Avec le morphisme ρ et le couplage définissant Λ' corrigés, Poincaré–Lelong donne $d'd''[h'] + \delta_E = \alpha' - \beta'$. Puisque $(\beta')^p = 0$ et que ω' est fermé, la somme télescopique donne

$$d'd''\Lambda' = (\alpha')^p - \omega' \wedge \delta_E.$$

L'image directe de $\omega' \wedge \delta_E$ vaut δ_Y comme dans le calcul du diviseur exceptionnel. On obtient ainsi $d'd''\Lambda = \alpha^p - \delta_Y$.

482. Dimension des sous-variétés dans le test numérique

Texte visé. Rappel après le théorème 18.8.4, p. 539.

`calculs.tex`, lignes 3778–3786.

Correction. Pour toute sous-variété intégrale propre Z du prémodèle, de dimension d, tester

$$\deg\bigl(c_1(M_1)\cdots c_1(M_d)\cap[Z]\bigr).$$

L'effectivité numérique demande que ce degré soit positif ou nul. La trivialité numérique demande qu'il soit nul pour tout Z.

483. Seuil normalisé dans les domaines affinoïdes

Texte visé. Preuve du théorème 18.8.4, p. 539.

`calculs.tex`, lignes 3892–3903.

Correction. Pour $\varepsilon\in\{-1,1\}^I$, définir V_ε dans V par les inégalités

$$|f_i^{\varepsilon_i}|\le|f_i(x)|^{\varepsilon_i}\quad(i\in I).$$

Elles s'écrivent aussi $(|f_i|/|f_i(x)|)^{\varepsilon_i}\le 1$. Chaque domaine ainsi défini contient x. Les deux choix de signe dans chaque coordonnée donnent un recouvrement de V.

484. Effectivité numérique du fibré résiduel gradué et métrique psh

Texte visé. Corollaire 18.8.8, p. 541.

`calculs.tex`, lignes 4034–4051.

Correction. Écrire $\widetilde{L}_x$ pour le fibré résiduel au point marqué. Le théorème 18.8.4 donne l'équivalence (ii)⇔(iii). L'implication (i)⇒(ii) est celle de la positivité du courant hessien d'un poids psh dans un repère local.

La proposition 17.8.4 citée traite la stricte intégralité. Si le grade d'un repère est hors de l'enveloppe rationnelle du groupe des valeurs de k, il y reste après toute puissance tensorielle positive. Pour (iii)⇒(i), prendre un même prémodèle propre projectif gradué V de $\widetilde{L}_x$, portant son modèle M numériquement effectif et un fibré ample A. Dans une présentation projective pondérée, relever les coordonnées homogènes au point générique par des germes analytiques. Les cartes pondérées $|T_j/T_i|\le r_j/r_i$ réalisent les réductions polynomiales graduées et leurs intersections réalisent les localisations homogènes. Après un rétrécissement ordinaire permis par l'anticontinuité, la spécialisation prend ses valeurs dans V.

Choisir un nombre fini d'ouverts principaux homogènes trivialisant M et A. Leurs tubes recouvrent un même voisinage de x. Sur une intersection de cartes, une transition homogène de grade c s'écrit Q/D, de même degré projectif au numérateur et au dénominateur. Pour son relèvement analytique u, imposer simultanément $|u\widehat{D}-\widehat{Q}|<c|\widehat{D}|$ qui vaut au point x et persiste par rétrécissement. Sur les intersections de tubes, le numérateur et le dénominateur atteignent leurs bornes homogènes. Ainsi u a la norme c et la forme initiale prescrite. Les normes constantes des repères se recollent. Les fibrés résiduels voisins sont les tirés en arrière des restrictions de M et A aux adhérences des spécialisations. La pleine fidélité au point x identifie le premier relèvement avec la métrique donnée, sur un voisinage ordinaire plus petit fixé une fois.

Pour $m,n>0$, $M^{\otimes n}\otimes A^{\otimes m}$ est ample. Une de ses puissances est engendrée par ses sections homogènes, et la même puissance reste engendrée après restriction et tirage en arrière en

chaque point voisin. Le critère du maximum résiduel pondéré donne donc une métrique psh pour chaque perturbation rationnelle positive m/n, sur ce même voisinage. Sur un voisinage compact plus petit, décaler par une constante le poids auxiliaire h pour qu'il soit positif ou nul. Les poids perturbés $u+(m/n)h$ décroissent vers u lorsque m/n décroît vers zéro. Le théorème de convergence décroissante donne la métrique psh cherchée.

485. Approximation convexe par un maximum fini

Texte visé. Preuve du corollaire 18.8.9, p. 542.

`calculs.tex`, lignes 4129–4142.

Correction. Sur un compact P, choisir pour chaque $a \in P$ une fonction affine d'appui ℓ_a de u, avec $\ell_a(a) = u(a)$ et $\ell_a \le u$. Pour $\varepsilon > 0$, un nombre fini des ouverts $u - \ell_a < \varepsilon$ recouvrent P. Le maximum v des fonctions correspondantes est convexe et vérifie $0 \le u - v < \varepsilon$ sur P.

Approcher chaque fonction de cette famille à moins de ε uniformément sur P, en choisissant des pentes rationnelles et, si les constantes doivent être strictes, des ordonnées à l'origine dans le groupe dense $\log|k^\times| \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. La valuation non triviale donne cette densité. Le nouveau maximum est convexe et approche u à moins de 2ε. Sa composition avec τ, puis la fermeture de la classe psh dans la preuve, donnent le passage à la limite voulu.

486. Support du produit formel et tests sur les sous-variétés

Texte visé. Exemple 18.8.10, pp. 542–543.

`calculs.tex`, lignes 4187–4211.

Correction. Pour $x \in X$, soit V_x l'adhérence réduite de $\pi(x)$ dans la fibre spéciale. Elle est intègre et propre. Les restrictions $\mathfrak{L}_j|_{V_x}$ sont des prémodèles des fibrés résiduels. Sur l'intérieur analytique, le théorème 18.8.4 s'applique au produit des courants de courbure. Le produit s'annule au voisinage de x exactement lorsque, pour toute sous-variété intègre $Z \subseteq V_x$ de dimension d,

$$\deg\bigl(c_1(\mathfrak{L}_1|_Z) \cdots c_1(\mathfrak{L}_d|_Z) \cap [Z]\bigr) = 0.$$

Son support est le complémentaire de ce lieu. Si $\dim V_x < d$, les tests sont vides.

Le lieu de nullité est donc la réunion des tubes inverses $\pi^{-1}(W)$ des sous-variétés fermées intègres propres W de la fibre spéciale sur lesquelles tous ces tests de dimension d valent zéro. Pour $x \in \pi^{-1}(W)$, on a $V_x \subseteq W$ et chaque test sur V_x est aussi un test sur W. Réciproquement, pour un point de nullité, prendre $W = V_x$. La réunion est ouverte par anticontinuité de π. Les mêmes arguments, en demandant des degrés non négatifs, donnent le lieu ouvert de positivité du produit.

487. Dimension relative des familles plates dans le découpage

Texte visé. Preuve du lemme 18.9.1, p. 544.

`calculs.tex`, lignes 4332–4355.

Correction. Avec $d = \dim V - \dim Z$, le morphisme plat $p|_{H'} : H' \to D$ a dimension relative pure d, puisque H' a dimension $d+1$ et D est une droite. Au-dessus de l'ouvert de platitude $U \subset Z$, le morphisme q a lui aussi dimension relative pure d. Une composante de dimension d de la fibre découpée, portée par $q^{-1}(u)$ pour $u \in U$, est ainsi une composante de cette fibre de q.

488. Translation en famille et facteur tiré de la base

Texte visé. §19.1.2, p. 548, `varab.tex`, lignes 139–140.

Correction. Pour une famille $x : S \to A$, sous la trivialité de $\mathscr{D}_2(L)$, écrire $t_x^* \operatorname{pr}_A^* L \simeq \operatorname{pr}_A^* L \otimes \operatorname{pr}_S^*(x^* L \otimes L_0^{-1})$. C'est l'identité définissant $\mathscr{D}_2(L)$ tirée en arrière le long de $(a, s) \mapsto (a, x(s))$, puis résolue pour le terme de translation. On peut aussi formuler l'invariance pour les points géométriques ou à valeurs dans une extension valuée.

Le facteur de la base peut être non trivial en famille. Pour un fibré de degré zéro non trivial et $S = A$, $x = \mathrm{id}$, une invariance sans facteur se restreindrait le long de la section nulle à une trivialisation de L.

489. Relèvement de la trivialisation cubiste normalisée

Texte visé. Proposition 19.1.8, démonstration, p. 550.

`varab.tex`, lignes 346–362.

Correction. Sur une base de valuation non triviale, appliquer le lemme 6.2.4 de Lütkebohmert au modèle formel propre et lisse $\mathfrak{A}$ à fibres connexes, sur $\operatorname{Spf}(k^\circ)$. Tout idéal de type fini de l'anneau de valuation est principal, donc l'éclatement admissible de la base est l'identité. Sur un corps trivialement valué, le modèle formel abélien à topologie discrète est le modèle algébrique propre, et GAGA propre donne le prolongement du fibré.

Former $\mathscr{D}_3(\mathfrak{L})$ sur $\mathfrak{A}^3$. La fibre spéciale lisse géométriquement intègre donne un point de Gauss commun, unique point de Shilov de chaque carte affine formelle non vide. Son corps résiduel complété a le groupe des valeurs de k. Normaliser une trivialisation générique à norme 1 en ce point. Son coefficient et son inverse dans tout repère formel ont alors norme suprême 1. Les fibres spéciales réduites rendent les deux coefficients formels, ce qui donne une trivialisation sur $\mathfrak{A}^3$.

Sur la face nulle, elle diffère de la trivialisation canonique par un scalaire unité, car les fonctions analytiques globales sur cette face propre, lisse et connexe sont constantes. Diviser par ce scalaire donne la normalisation sur la face. La trivialisation générique canonique a ainsi norme 1 et la métrique est cubiste.

490. Corps de base dans l'uniformisation de Raynaud

Texte visé. § 19.2.1, p. 551.

`varab.tex`, lignes 491–512.

Correction. Pour une variété abéloïde sur un corps complet non trivialement valué, construire sur le corps de départ le plus grand tore affinoïde du domaine de Néron, le quotient B à bonne réduction potentielle et l'extension E obtenue en poussant le tore affinoïde vers le tore analytique. Sur une extension finie galoisienne qui déploie la situation, le quotient et le produit contracté ont des cartes affinoïdes invariantes. La descente effective donne le morphisme $E \to A$ et son noyau Λ^{an}, où Λ est un groupe étale localement constant, de rang r.

Lorsque B a bonne réduction et que le tore est déployé, prolonger les fibrés des caractères sur le bon modèle formel. Les normes multiplicatives normalisées à l'identité donnent les sous-groupes d'unités. Le réseau est alors constant et la rétraction équivariante du revêtement à espace total contractile donne l'interprétation topologique annoncée.

Si le corps est trivialement valué et que A provient d'une variété abélienne, prendre $E = B = A^{\mathrm{an}}$ et le rang torique nul. Pour la contractilité, passer à une extension de Gauss non trivialement valuée, utiliser la section de Gauss continue de la projection et projeter la

contraction vers A^{an}. L'application à une variété abéloïde analytique arbitraire sur un corps trivialement valué demande un argument supplémentaire.

491. Fonctions tests pour la décomposition des mesures

Texte visé. Corollaire 19.2.9(b), p. 556.

`varab.tex`, lignes 1079–1086.

Correction. Énoncer d'abord l'égalité des mesures de Radon signées localement finies. La formule intégrale vaut pour toute fonction borélienne localement bornée à support compact et, plus généralement, pour toute fonction absolument intégrable pour la variation totale de chacune des mesures de la somme finie.

Sur un corps algébriquement clos complet non trivialement valué, prenons une courbe de Tate $A = \mathbf{G}_m^{\mathrm{an}}/q^{\mathbb{Z}}$, $0 < |q| < 1$, et la métrique canonique de degré un. L'arc ouvert $0 < t < a < \ell = -\log|q|$, en rayon logarithmique, correspond à une couronne ouverte $X = U$ injectée dans A, donc fermée dans U et irréductible. Le potentiel $t^2/(2\ell) + t/2$ vérifie $F(t-\ell) = F(t) - t$ pour le facteur d'automorphie de degré un. Sa courbure sur l'arc est dt/ℓ. La fonction continue $1/t - 1/(a-t)$ est localement bornée, mais ses parties positive et négative ont chacune une intégrale infinie. L'intégrale signée imprimée est donc indéfinie pour ce test.

492. Potentiel de la métrique cubiste

Texte visé. Proposition 19.3.1, preuve de l'implication de (iii) vers (i), p. 557.

`varab.tex`, lignes 1198–1207.

Correction. Dans la comparaison de métriques, employer $f \circ \tau$, où f est le potentiel de la proposition 19.2.5. Sa partie quadratique est $q_L/2$ et sa partie restante est affine. Pour q_L positive semi-définie, f est convexe et le corollaire de composition avec les coordonnées harmoniques donne que $f \circ \tau$ est psh. C'est cette fonction qui donne la métrique du facteur trivial.

493. Base de voisinages et raffinement localement fini

Texte visé. Lemme A.1.5, p. 564.

`app-paracompact.tex`, lignes 73–100.

Contre-exemple. Sur la droite, les intérieurs des ensembles $[a,b] \cup \{0\}$, $a < b$, forment une base. Chacun de ces ensembles contient zéro. Dans le recouvrement $(-\infty, 1)$ et $(0, \infty)$, seuls des ensembles contenus dans le premier ouvert peuvent être choisis. Le point deux reste découvert.

Correction. Pour tout ouvert O et tout $x \in O$, supposer qu'un membre B de la famille vérifie $x \in \operatorname{Int} B$ et $B \subset O$. Décomposons l'espace localement compact paracompact en ouverts disjoints dénombrables à l'infini. Dans chacun, prenons une exhaustion W_n par des ouverts relativement compacts avec $\overline{W}_n \subset W_{n+1}$, et $W_n = \emptyset$ pour $n \leq 0$. Les compacts

$$K_n = \overline{W}_n \setminus W_{n-1}$$

recouvrent l'espace et sont contenus dans les ouverts localement finis $\Omega_n = W_{n+1} \setminus \overline{W}_{n-2}$. Sur chaque K_n, choisissons sous l'hypothèse renforcée un nombre fini de membres B dont les intérieurs couvrent K_n, chacun dans l'intersection de Ω_n et d'un ouvert donné. La réunion de ces familles est localement finie et raffine le recouvrement.

494. Support dans une carte ouverte séparant les points

Texte visé. Corollaire A.2.4, démonstration, p. 565.

`app-separation.tex`, lignes 69–83.

Correction. Pour un point $x \in K$, choisir un voisinage ouvert O où l'algèbre de fonctions sépare les points, puis un voisinage compact V de x contenu dans $O \cap U$. Le bord $V \setminus \mathrm{Int}_X(V)$ est compact et contenu dans O. Appliquer le lemme A.2.3 corrigé en n° 877 dans O, au point x et à ce bord. Restreindre la fonction obtenue à V et la prolonger par zéro. Elle est nulle près du bord, donc lisse sur X et à support compact dans U.

Pour K compact, choisir un nombre fini de telles fonctions valant 1 sur des voisinages qui recouvrent K. La somme de leurs carrés est positive sur K. La composer avec une fonction lisse qui vaut 1 près de l'image compacte de K et 0 en zéro.

495. Partition lisse à termes non négatifs sur l'espace paracompact

Texte visé. Preuve de la proposition A.2.8, p. 567.

`app-separation.tex`, lignes 251–275.

Correction. Choisir un raffinement localement fini (V_j) du recouvrement (U_i) par des ouverts relativement compacts, puis un rétrécissement par des compacts $K_j \subset V_j$ qui recouvrent X. Pour chaque j, la séparation lisse donne une fonction lisse h_j à valeurs dans $[0,1]$, de support compact dans V_j, valant 1 au voisinage de K_j. La somme $h = \sum_j h_j$ est localement finie, lisse et strictement positive partout. L'inverse $1/h$ est lisse par la stabilité locale par composition. Les fonctions h_j/h sont donc lisses, positives ou nulles, et leur somme vaut 1.

Choisir, pour chaque j, un indice i tel que $V_j \subset U_i$, et regrouper les fonctions selon cet indice. Chaque réunion de supports du groupe est fermée par locale finitude et incluse dans U_i. On obtient ainsi la partition de l'unité sur tout X, sous les hypothèses de la proposition.

496. Voisinage fermé et coupures compactes indexées par le raffinement

Texte visé. Corollaire A.2.9, pp. 567–568.

`app-separation.tex`, lignes 279–290 et 313–316.

Correction. Gardons l'espace ambiant X localement compact séparé, le fermé F et l'ouvert paracompact U qui le contient et où le faisceau sépare localement les points. Supposons qu'un ouvert V vérifie $F \subset V \subset \overline{V}^{,X} \subset U$. Pour tout recouvrement ouvert (U_i) de F, on obtient une famille non négative (θ_j), à supports compacts dans $U_{a(j)} \cap U$ pour des indices de raffinement j et une application $a : j \mapsto i$. La famille est localement finie dans X et de somme un près de F.

Preuve. La séparation locale fournit les coupures compactes. Pour un point, choisissons un voisinage relativement compact dans un ouvert séparant. Séparons le point de chaque point du bord par des sections, puis composons avec des coupures scalaires lisses. Un produit fini vaut un près du point et zéro près du bord compact. Il se prolonge par zéro. Un nombre fini de ces coupures donne une coupure égale à un près d'un compact donné. Dans U, raffinons localement finiment les ouverts $U_i \cap V$ et $U \setminus F$ par des ouverts relativement compacts subordonnés après fermeture. Après rétrécissement fermé, normalisons des coupures compactes par leur somme positive. Écartons les termes de $U \setminus F$. Leurs supports forment un fermé de U qui évite F, donc la somme conservée vaut encore un près de F. Les prolongements par zéro donnent la finitude locale hors de U grâce à $\overline{V}^{,X} \subset U$.

Sur la droite, le recouvrement à un seul indice de toute la droite exigerait après regroupement une fonction égale à un partout et à support compact. Même avec des indices de raffinement, un voisinage fermé est nécessaire pour le recouvrement par U seul, puisque la somme continue Φ donnée par les coupures fournirait $V = \{\Phi > 1/2\}$. Dans la planche ordinale privée de son sommet (ω_1, ω), prenons $U = [0, \omega_1] \times [0, \omega)$, réunion disjointe des lignes compactes, et $F = \{\omega_1\} \times [0, \omega)$, fermé. Le faisceau des fonctions continues sépare localement. La continuité en (ω_1, n) donnerait pour chaque $n < \omega$ un intervalle terminal où $\Phi > 1/2$. Un ordinal dénombrable α dépasse tous leurs débuts. Les points (α, n) convergent vers (α, ω) hors de U, où $\Phi = 0$. Cette contradiction vérifie la nécessité de la condition ajoutée.

497. Indices locaux du raffinement compact

Texte visé. Preuve du lemme A.3.9, p. 570.

`app-mesure.tex`, lignes 238–246.

Correction. Après le choix d’une famille finie de voisinages qui recouvre V, retenir seulement les couples (x, j) tels que $x \in S$ et $j \in J_x$. Pour ces couples, $A_j \cap V_x$ est fermé dans V_x, donc $A_j \cap V_x \cap V$ est compact. Ces intersections recouvrent V et raffinent le recouvrement initial. La fermeture relative est garantie pour les indices de J_x au voisinage considéré.

498. Régularité du tiré en arrière borélien

Texte visé. §A.3.13, p. 572, `app-mesure.tex`, lignes 480–491.

Contre-exemple. Sur un espace discret non dénombrable, prenons l’identité et le recouvrement par les singletons. La mesure nulle et la mesure qui vaut zéro sur les parties dénombrables et $+\infty$ sur les autres ont les mêmes traces locales. La seconde est dénombrablement additive, car une réunion dénombrable d’ensembles dénombrables est dénombrable. Elle est non régulière, puisque les compacts sont finis.

Correction. Dans la version borélienne, supposer la mesure initiale régulière et demander un tiré en arrière borélien régulier. Transporter les restrictions aux images des domaines par les homéomorphismes locaux. Les transports préservent la régularité et concordent sur les intersections. Le théorème de recollement des mesures régulières donne existence et unicité. Un raffinement commun donne l’indépendance du recouvrement.

499. Exhaustion dénombrable sur le modèle formel fixé

Texte visé. Preuve du théorème B.1.8 a), pp. 579–580.

`app-gaga.tex`, lignes 251–281.

Correction. Écrire la fibre générique X comme somme disjointe de parties ouvertes et fermées, dénombrables à l’infini. Relier deux parties si des points de ces parties ont même spécialisation dans $\mathfrak{X}$. Chaque partie est couverte par une famille dénombrable de fibres génériques de cartes formelles affines. On utilise la propriété de G-recouvrement pour obtenir localement des unions finies qui sont des voisinages, puis la propriété de Lindelöf de la partie. Chaque carte, compacte sur la fibre générique et saturée pour la spécialisation, ne rencontre qu’un nombre fini de parties. Le graphe a ainsi des composantes dénombrables. Les réunions par composante sont ouvertes et fermées, dénombrables à l’infini et saturées pour la spécialisation.

Sur une carte formelle affine, adjoindre à l’algèbre l’idempotent de la partie générique saturée. Cette extension finie entière conserve la fibre générique. Les deux parties ouvertes et fermées de sa fibre spéciale ont des images fermées qui recouvrent la fibre spéciale de départ. La saturation les rend disjointes. On obtient ainsi des blocs ouverts et fermés sur le modèle formel fixé.

Sur chaque bloc, prendre une suite de cartes formelles affines. À chaque étape, l'intersection de la nouvelle carte avec la réunion finie précédente est quasi-compacte. Comparer les deux réseaux sur cet ouvert par des puissances d'un même élément $\pi \in k^{\circ\circ} \setminus \{0\}$. Après avoir chassé les dénominateurs, prolonger le sous-module intermédiaire sur la carte à l'aide d'un recouvrement distingué fini, modulo une puissance de π. Le recollement donne un réseau cohérent compatible avec ceux déjà construits.

500. Un seul idéal de platification sur le modèle formel

Texte visé. Preuve du théorème B.1.8 b), p. 580.

`app-gaga.tex`, lignes 282–318.

Correction. Poser $I_r = \mathrm{Fitt}_r(\mathfrak{M})$ et

$$J = \prod_r \bigl(I_r + \mathrm{Ann}(I_r)\bigr).$$

La cohérence donne des annulateurs de type fini. Chaque somme est ouverte, car elle devient l'idéal unité sur la fibre générique, où $\mathscr{M}$ est localement libre. Sur chaque carte, les I_r sont l'idéal unité pour r assez grand. Le produit définit donc un idéal cohérent ouvert sur tout $\mathfrak{X}$.

Après l'éclatement admissible de J, le produit est localement principal et engendré par un non-diviseur de zéro. Dans un anneau local, un produit formé d'un générateur de chaque facteur engendre cet idéal. La simplification par les autres facteurs montre que chaque facteur est inversible. En divisant ses deux termes, issus de I_r et de $\mathrm{Ann}(I_r)$, par un générateur local, on obtient deux idéaux d'idempotents complémentaires. Ils déterminent les strates ouvertes et fermées de rang.

Sur la strate de rang r, l'image de $\mathrm{Ann}(I_r)$ disparaît par accord sur la fibre générique et absence de torsion. Un mineur pivot engendre alors I_r, et les rapports des mineurs de même taille par ce pivot sont entiers. Par la règle de Cramer, les relations génériques d'une présentation locale forment ainsi le graphe d'une matrice à coefficients dans l'anneau formel. Leur intersection avec le module libre du modèle est ce même graphe sur l'anneau formel. Le quotient, qui est le transformé strict, est localement libre. C'est donc l'éclatement admissible de l'idéal global J qui donne le résultat.

501. Compacité et égalité correcte dans la descente stricte

Texte visé. Remarque B.3.3, p. 582.

`app-descente.tex`, lignes 73–82.

Correction. Supposer k non trivialement valué, X strictement k-analytique et topologiquement séparé, et $W \subset X_K$ un domaine strictement K-analytique compact. Avec les conventions de B.3.1, il existe un sous-corps de type fini $k' \subset K_0$ sur k, d'adhérence K' dans K, et un domaine strictement K'-analytique $V' \subset X_{K'}$ tels que $W = V'_K$. Dans le cas de B.3.2, on peut prendre k' fini et séparable sur k.

Recouvrir la projection de W par un nombre fini de cartes strictement affinoïdes et utiliser, sur chacune, des domaines rationnels stricts en nombre fini. À une présentation par les inégalités $|f_i| \leq |g|$, ajouter $|g| \geq c$ avec $c \in |k^\times|$ strictement inférieur au minimum de $|g|$ sur le domaine non vide. Approcher g et les f_i par des tenseurs à coefficients dans K_0, à une erreur uniforme strictement inférieure à c. L'ultramétrie conserve la région de coupure, la norme du dénominateur sur cette région et les inégalités. Le numérateur constant de norme c empêche tout zéro commun. Prendre le corps engendré par tous les coefficients retenus, puis la réunion des domaines descendus sur son adhérence dans K. Son changement de base à K est W.

502. Domaines strictement affinoïdes et réductions canoniques

Texte visé. § B.4 et lemme B.4.2, pp. 582–583.

`app-formel.tex`, lignes 3–5 et 23–31.

Correction. Dans les conventions initiales du § B.4, préciser que les espaces analytiques considérés sont stricts. Dans le lemme B.4.2, prendre V domaine strictement affinoïde de l'espace strictement affinoïde X. Le critère rigide de Bosch s'applique alors aux réductions canoniques ordinaires et l'immersion de la deuxième condition est ouverte. Pour des rayons non stricts, la réduction graduée retient des informations que la réduction ordinaire peut perdre.

503. Affinoïdicité pour la structure formelle choisie

Texte visé. Lemme B.4.6, p. 584.

`app-formel.tex`, lignes 125–132.

Correction. Fixer la structure formelle analytique de X et prendre sa réduction pour cette structure. Alors X est un domaine affinoïde formel de lui-même si et seulement si cette réduction est un schéma affine. C'est la conclusion d'affinoïdicité formelle du théorème 3.1 de Bosch pour l'atlas choisi.

504. Atlas formel du produit

Texte visé. § B.4.10, p. 585, `app-formel.tex`, lignes 212–218.

Correction. Les produits de domaines des cartes formelles engendrent la structure formelle du produit. Son atlas maximal contient aussi les domaines affinoïdes formels compatibles avec ces cartes.

Exemple. Sur $k = \mathbb{C}_p$, prenons deux disques unités fermés, chacun muni de sa carte formelle. Dans leur produit Z, le domaine

$$V = \{|T_1 - T_2| = 1\} = \pi^{-1}(D(t_1 - t_2))$$

est l'image réciproque d'un ouvert principal affine de la réduction du bidisque par π. Il appartient donc à l'atlas maximal par B.4.1 et B.4.2. Sa présentation rationnelle est $k\{T_1, T_2, S\}/((T_1 - T_2)S - 1)$. Les points rationnels $(0, 1)$ et $(1, 0)$ appartiennent à V. Tout produit de domaines contenant ces deux points contient $(0, 0)$, qui est hors de V.

505. Déploiement fini séparable d'un tore affinoïde

Texte visé. § B.5.3, p. 587.

`app-abeloid.tex`, lignes 55–82.

Correction. Partir d'une extension complète K/k qui déploie T. Sur le produit tensoriel complété $K\widehat{\otimes}_k K$, les changements de coordonnées du groupe sont monomiaux sur les composantes déterminées par un nombre fini d'idempotents. Les changements permutent les coefficients de Laurent en préservant leurs valeurs absolues sur ces composantes.

Pour un élément de l'algèbre affinoïde de départ et un seuil strictement positif, les exposants dont les coefficients atteignent ce seuil forment un ensemble fini stable sous ces permutations. La projection sur cet ensemble descend par l'égalisateur affinoïde. Pour $A = \mathscr{O}(T)$, la densité de $A \otimes_k K$ dans A_K permet, en réunissant assez de tels ensembles, d'inclure les monômes générateurs et leurs inverses. La projection descendue a pour image une coalgèbre de dimension finie. Son dual se décompose sur K en un produit de corps égaux à K, donc il est

étale sur k. Un sous-corps $L \subset K$, fini séparable sur k, scinde ce dual. Sur L, la base duale des idempotents donne des éléments g de norme 1 dont la comultiplication est $g \otimes g$. Parmi eux figurent les générateurs et les inverses du tore déployé. La complétion de leur algèbre de Laurent redonne l'algèbre de Hopf affinoïde, par descente de l'isomorphisme après extension à K.

Si l'on dispose déjà d'un bon modèle formel, le déploiement du tore résiduel sur une extension non ramifiée se relève aussi sur les troncatures principales non nulles, avec des relèvements compatibles.

506. Connexité géométrique dans la maximalité du domaine de Néron

Texte visé. Lemme B.5.6, p. 588.

`app-abeloid.tex`, lignes 125–148.

Correction. Dans a), supposer de plus que la fibre spéciale du groupe formellement analytique compact Z à bonne réduction est géométriquement connexe. Appliquer alors la proposition 5.4.6 de Lütkebohmert au modèle formel lisse de Z et au point identité pour obtenir $f(Z) \subset N$.

Dans b), prendre le plus grand sous-groupe qui soit un domaine analytique compact et un groupe formellement analytique à bonne réduction, avec fibre spéciale géométriquement connexe. Le candidat $N_{k'}$ possède ces propriétés après chaque extension complète k'/k. Appliquer a) à l'inclusion de chaque domaine concurrent dans $A_{k'}$. C'est cette maximalité qui intervient dans la descente de B.5.7.

507. Descente du candidat au domaine de Néron

Texte visé. Preuve de la proposition B.5.7, p. 589.

`app-abeloid.tex`, lignes 230–244.

Correction. Choisir une extension finie galoisienne K/k sur laquelle est construit le candidat M, avec réduction semi-abélienne connexe. Pour $g \in \mathrm{Gal}(K/k)$, comparer le conjugué gM directement à M. La maximalité connexe de B.5.6 donne l'égalité des domaines. La pleine fidélité formelle appliquée aux conjugués donne alors la donnée de descente semi-linéaire sur M.

Utiliser la descente galoisienne effective des domaines affinoïdes invariants, valable ici aussi pour une valuation non discrète. On obtient le domaine N sur k, muni de sa structure de groupe formellement analytique, avec $N_K = M$. L'unicité donne la compatibilité avec les extensions complètes ultérieures.

508. Critère d'amplitude et modèle formel abélien

Texte visé. Lemme B.6.5, énoncé pp. 593–594 et preuve p. 594.

`app-abeloid.tex`, lignes 655–698, en particulier 675–679.

Correction du critère. Une même puissance positive M du fibré doit être effective et le morphisme θ_M vers le dual doit avoir un noyau fini. En dimensions égales, ce morphisme est une isogénie. Le critère suffisant pour une variété abéloïde effective est le lemme 7.1.9 de Lütkebohmert. Pour une variété abéloïde projective, GAGA ramène la finitude du stabilisateur d'un fibré ample au cas algébrique.

Sur $\mathbb{C}_3$, la courbe $y^2z = x^3 - xz^2$ a bonne réduction, car son discriminant est 64. Le fibré $\mathscr{O}(2[0])$ est effectif et ample. Il se prolonge au modèle abélien et sa translation vers le dual correspond, au signe près, à la multiplication par 2. Son noyau contient les quatre points de $E[2]$, ce qui réfute l'injectivité du critère imprimé.

Fibre générique et fibre spéciale. Gardons le corps complet non trivialement valué k de l'appendice et son anneau $R = k^\circ$. Pour une puissance $M = \mathfrak{L}^a$ dont la fibre générique est effective et ample, prenons une section générique non nulle. Sur des ouverts formels affines qui trivialisent M, le lemme A.2.2 de Conrad normalise chaque coefficient non nul sous la forme ca, avec $c \in k^\times$ et a entier de réduction non nulle. La taille de c est unique. Les réductions spéciales de ces ouverts sont des ouverts d'une même variété abélienne intègre, donc la normalisation se conserve sur les intersections et par les unités de transition. Un seul scalaire normalise la section. La platitude des algèbres des cartes assure le recollement des coefficients intégraux, donnant une section spéciale non nulle sur le modèle fixé.

Après extension à un corps complet algébriquement clos, la dualité formelle et le fibré de Poincaré aux niveaux adiques identifient θ_M aux translations sur les deux fibres. Sur la fibre générique, le noyau est fini par amplitude et GAGA, et le morphisme propre, entre variétés lisses connexes de même dimension, est surjectif. Les points spéciaux du dual se relèvent par lissité formelle et complétude. Un antécédent générique rationnel existe sur ce corps algébriquement clos et se spécialise. Le morphisme spécial est ainsi surjectif de même dimension et a un noyau schématique fini. Avec l'effectivité, le critère algébrique donne l'amplitude spéciale, qui descend du corps résiduel étendu et de la puissance à $\mathfrak{L}_s$.

Amplitude formelle sur R. Pour $0 < |\varpi| < 1$, l'anneau $R/(\varpi)$ a un spectre à un point. L'amplitude spéciale implique l'amplitude sur ce premier niveau par le critère fibre par fibre (Stacks, 0D2S). Les réductions propres, plates et de présentation finie sur $R/(\varpi^j)$ sont compatibles. Leurs transitions ont des noyaux de carré nul et R est complet. L'effectivité formelle polarisée (Stacks, 0D4T) algébrise le couple sur R avec un fibré ample, ce qui donne l'amplitude relative formelle. Celle-ci se restreint aux deux fibres. Les trois conditions du lemme sont donc équivalentes sur le corps de départ, y compris en valuation non discrète.

Erreurs mineures

509. Fondements métriques et existence dans les premiers textes de BFJ

Texte visé. § 0.1.2, p. 10.

`intro.tex`, lignes 131–132.

Correction. Citer arXiv:1201.0187 pour les fondements métriques et arXiv:1201.0188 pour le théorème d'existence. Dans ce dernier, le corps de base complet est discrètement valué et de caractéristique résiduelle nulle. La variété projective lisse intègre descend à un corps de fonctions d'une variable dont le complété est le corps de base. Le fibré est ample et la mesure de Radon positive, de masse $c_1(L)^{\dim X}$, est portée par le complexe dual d'un modèle à croisements normaux stricts. Sous ces hypothèses le théorème donne une métrique continue semi-positive réalisant la mesure.

510. Intégrales sur les fibres

Texte visé. § 0.2.6, comparaison avec Stoll, p. 12.

`intro.tex`, lignes 299–302.

Correction. Lire « des intégrales sur les fibres » dans la phrase qui annonce le résultat de continuité et de lissité. Les hypothèses de support, de platitude et de bord sont celles de l'énoncé analytique auquel renvoie cette annonce.

511. Comparaison avec les intégrales complexes limites

Texte visé. § 0.2.6, p. 13.

`intro.tex`, lignes 307–310.

Correction. Lire « des intégrales au sens du présent travail » dans la phrase sur les limites de familles à un paramètre d'intégrales complexes. Conserver le corps $\mathbf{C}((T))$ et la référence à l'article cité.

512. Attribution de la polyédralité algébrique

Texte visé. § 0.2.9, p. 14.

`intro.tex`, lignes 390–400.

Correction. Attribuer à Bieri et Groves la polyédralité des tropicalisations algébriques. Lorsque X est connexe, la connexité de son image tropicale résulte séparément de la continuité. Dans la phrase suivante, prendre la polyédralité comme sujet et lire « a ensuite été redémontrée » dans la présentation des preuves ultérieures.

513. Références distinctes aux altérations dans les deux arguments tropicaux

Texte visé. §0.2.9, p. 14.

`intro.tex`, lignes 395–398.

Correction. Pour l'argument local de Berkovich, citer le lemme 9.2 de Berkovich (1999), qui applique le théorème 5.9 de A. J. de Jong, *Families of curves and alterations* (1997). C'est la référence utilisée dans le théorème 6.2.1 de Berkovich (2004).

Pour l'argument distinct de Gubler sur les domaines analytiques d'une variété algébrique, conserver A. J. de Jong, théorème 4.1 de *Smoothness, semi-stability and alterations* (1996). Employer ce titre dans la bibliographie. Garder la portée algébrique de l'attribution à Bieri–Groves et les hypothèses de compacité ou de localisation pour la polyédralité analytique, suivant n° 78 et n° 512.

514. Coordonnées de la tropicalisation complexe

Texte visé. §0.2.10, p. 14.

`intro.tex`, lignes 410–412.

Correction. L'application du tore complexe composée avec f dans la définition de f_{trop} est

$$(\mathbb{C}^\times)^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad (z_1, \dots, z_n) \longmapsto (\log|z_1|, \dots, \log|z_n|).$$

515. Harmonicité et exemple de tropicalisation non lisse

Texte visé. § 0.3.1, tropicalisation des variétés abéliennes, pp. 16–17.

`intro.tex`, lignes 609–612.

Correction. Dans la phrase d'introduction, lire « comme déjà remarqué dans ». La proposition 16.2 de Gubler, Jell et Rabinoff établit l'harmonicité de la tropicalisation canonique d'une variété abélienne dans le cadre du § 16. Le corollaire 17.5 donne une jacobienne de genre trois dont la tropicalisation canonique est non lisse. Cet exemple est construit sur un corps non archimédien complet algébriquement clos, de valuation non triviale, dont le corps résiduel n'est pas une clôture algébrique d'un corps fini. Proposition 16.2 et corollaire 17.5

516. Signe d'un générateur fortement positif

Texte visé. Proposition 1.2.13, pp. 27–28.

`lagerberg.tex`, lignes 693–694 et 747, et phrase de positivité qui suit le calcul.

Correction. Pour $|I| = p$, le générateur est $\sigma_p \beta_I \wedge J\beta_I$, où $\sigma_p = (-1)^{p(p-1)/2}$. Employer σ_p dans le premier membre et dans l'affirmation de forte positivité qui suit. En effet, le réordonnement des p facteurs $\beta_i \wedge J\beta_i$ donne ce signe. L'autre facteur garde σ_{n-p}. Les signes diffèrent par exemple pour $n = 3$ et $p = 1$. Dans le calcul de la page 27, le produit de degré maximal est nul par l'orthogonalité déjà établie. Écrire cette égalité à zéro pour conclure $c = 0$.

517. Signe de la formule conjuguée pour la dérivation première

Texte visé. Lemme 1.3.6, (1.3.6.3), p. 30, `lagerberg.tex`, ligne 951.

Correction. Conserver les deux premières égalités et remplacer la dernière, sur le bidegré (p, q), par

$$d' = (-1)^{p+q+1} J d'' J.$$

En composant $Jd'' = -d'J$ à droite par J, on obtient $Jd''J = -d'J^2$. Sur le bidegré considéré, $J^2 = (-1)^{p+q}$, ce qui donne le signe. En degré zéro sur la droite, la fonction coordonnée vérifie $Jd''Jx = -d'x$.

518. Limites des approximations de l'identité

Texte visé. §1.6.6, pp. 38–39, `lagerberg.tex`, lignes 1881, 1899 et 1921.

Correction. Dans les deux passages sur les fonctions, écrire $\rho_\varepsilon * f \to f$. Dans le passage sur les formes, écrire $\rho_\varepsilon * \omega \to \omega$. Après changement de variable, la convolée d'une fonction est l'intégrale de $f(x - \varepsilon z)$ contre $\rho(z)\,dz$. La masse unitaire du noyau et la continuité uniforme sur les compacts donnent la convergence, avec chaque dérivée si f est lisse. Le calcul vaut coefficient par coefficient pour les formes. Dans un ouvert propre, chaque compact est inclus dans la région d'échantillonnage pour les rayons assez petits, selon n° 85.

519. Encadrement du maximum régularisé

Texte visé. Lemme 1.7.6(c), p. 42, `lagerberg.tex`, ligne 2224.

Correction. Pour $g = \max_i f_i$ et m fonctions affines, écrire

$$g \le g_\varepsilon \le g + \varepsilon \log m.$$

Dans la somme des exponentielles, factorisons $e^{g/\varepsilon}$. La somme restante est comprise entre un et m, d'où l'encadrement après logarithme. Dans la réduction aux coordonnées de $\mathbf{R}^n$, le nombre de termes est n. L'estimation donne la convergence uniforme vers g.

520. Paramètre réciproque du maximum régularisé

Texte visé. Lemme 1.7.6(c), p. 42, `lagerberg.tex`, ligne 2232.

Correction. Prendre $0 < a < b$ et identifier la fonction dérivée dans la preuve à

$$h(t) = g_{1/t}(x) = t^{-1} \log \sum_i e^{t x_i}.$$

L'inégalité $t x_i \le \log \sum_j e^{t x_j}$ donne $h'(t) \le 0$ après multiplication par $e^{t x_i}$ et sommation. Comme $1/a > 1/b$, on obtient $g_a(x) = h(1/a) \le h(1/b) = g_b(x)$.

521. Dimension du domaine et masse du cône tangent

Texte visé. Proposition 1.7.7, pp. 43–44.

`lagerberg.tex`, lignes 2260 et 2270.

Correction. Compléter par $\dim D = n$ l'hypothèse du critère de stricte positivité. Le cône tangent a alors dimension pleine. Pour une famille très séparante, la hessienne du maximum régularisé est définie positive et sa densité donne une masse positive à ce cône. Une famille qui n'est pas très séparante donne une hessienne dégénérée. Sans dimension pleine, $D = \{0\}$ sur la droite donne masse nulle même pour la famille très séparante $(0, x)$. Dans la première égalité de la preuve, rétablir aussi μ dans $\langle (d'd'' g_\varepsilon)^n, \mu \rangle$.

522. Réunion des intérieurs dans le corollaire 2.1.8

Texte visé. Corollaire 2.1.8, pp. 62–63 (imprimées et PDF), pl.tex, lignes 160–169. La dernière réunion est aux lignes 167–168.

Étape manquante. Pour un sous-espace PL σ-compact Y d'un espace PL X, la preuve recouvre Y de compacts Q_n et choisit des voisinages PL compacts Q'_n de Q_n dans X. La réunion imprimée $\bigcup_n Q'_n$ est bien un voisinage σ-compact de Y, comme l'indique la dernière phrase. Elle peut manquer d'ouverture. Dans $X = \mathbf{R}$ muni de sa structure PL usuelle, prendre $Y =$

$Q_n = \{0\}$ et $Q'_n = [-1,1]$ pour tout n. Ces choix remplissent les conditions de la construction et leur réunion est l'intervalle fermé $[-1,1]$.

Correction. Prendre

$$U = \bigcup_n \mathrm{Int}_X(Q'_n).$$

Chaque Q'_n est un voisinage de Q_n, donc U est ouvert dans X et contient Y. L'intérieur de Q'_n est un sous-espace PL ouvert du compact PL Q'_n. Le lemme 2.1.7 implique qu'il est σ-compact. Une réunion dénombrable de tels intérieurs est σ-compacte. Le critère de paracompacité pour les espaces PL donne la paracompacité de U. Si Y est vide, on peut prendre U vide. On obtient ainsi le voisinage ouvert annoncé sous les hypothèses du corollaire.

523. Voisinage domanial compact de trace prescrite

Texte visé. Lemme 3.2.8(f), p. 77, `espgtrop.tex`, lignes 386–387.

Correction. À la fin de la preuve de (f), lire $W \cup U'$ pour « la réunion ». L'énoncé du lemme est conservé.

Contre-exemple à la formule imprimée. Dans le plan paralinéaire usuel $X = \mathbf{R}^2$ de paramètres $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$, prenons $\Sigma = \mathbf{R} \times \{0\}$, $x = (0,0)$, $T = W = [-1,1] \times \{0\}$, $U = (-1/2, 1/2)^2$ et $U' = [-1/4, 1/4]^2$. La projection rend Σ fidèle. Le domaine compact W a pour trace le voisinage paralinéaire compact T de x dans Σ. On a $U \cap \Sigma \subset T$ et $U' \subset U$ est un voisinage domanial compact de x. Or $W \cap U'$ est le segment $[-1/4, 1/4] \times \{0\}$, de trace strictement plus petite que T et d'intérieur vide dans X.

Preuve. Munissons Σ de sa structure paralinéaire canonique.

(a) G-recouvrons Σ par des traces fidèlement paralinéaires $P_i = \Sigma \cap W_i$. Choisissons leurs cartes fidèles f_i et restreignons chaque W_i à son intersection avec un domaine de définition de f_i. Si $P \subset \Sigma$ est fidèlement paralinéaire dans X, alors $P \cap P_i = P \cap W_i$ est paralinéaire dans P et f_i y est paralinéaire, par le test de fidélité dans X. Sa restriction est aussi un plongement topologique. Sur une cellule où elle est affine, l'injectivité implique l'injectivité de la partie linéaire sur la direction de l'enveloppe affine, par un petit segment dans l'intérieur relatif. L'élimination linéaire donne un inverse sur l'enveloppe de l'image avec les coefficients et translations permis. Le transport des G-recouvrements par cellules donne la paralinéarité de l'image et de l'inverse. Les structures sur $P \cap P_i$ induites par P et P_i coïncident. Ces traces G-recouvrent P, qui est donc paralinéaire dans Σ avec sa structure canonique.

(b) Par (a), deux parties fidèlement paralinéaires contenues dans Σ sont paralinéaires dans Σ et leur intersection est paralinéaire dans chacune avec la même structure induite.

(c) Pour un domaine W de X et une fonction paralinéaire g sur W, travaillons sur les morceaux fidèles P_i. Le test de fidélité contre la carte (W, g) donne la paralinéarité de $P_i \cap W$ et de g sur cette trace. Le recollement donne la paralinéarité de la trace dans Σ et de g sur cette trace.

(d) Soit $T \subset \Sigma$ localement fermée dans X. Si T est paralinéaire dans Σ, les $T \cap P_i$ sont paralinéaires dans les P_i, donc fidèlement paralinéaires dans X par 3.2.4. Ce sont les traces $T \cap W_i$, qui G-recouvrent T. Réciproquement, les morceaux fidèles d'une partie T paralinéaire dans X sont paralinéaires dans Σ par (a) et y donnent le G-recouvrement voulu. La dernière phrase de cette preuve vise ainsi la paralinéarité dans Σ.

(e) Si T est une partie paralinéaire compacte de Σ, utilisons les traces $P_i = \Sigma \cap W_i$ et domaines W_i compacts fournis par 3.2.7, avec f_i définie sur W_i. Par compacité et G-recouvrement, un nombre fini de P_i recouvre T. L'image $f_i(T \cap P_i)$ est paralinéaire et compacte. Son image réciproque W'_i est un domaine fermé dans W_i, donc compact.

L'injectivité de f_i sur P_i donne $\Sigma \cap W_i' = T \cap P_i$. La réunion finie des W_i' est un domaine compact de trace T.

(f) Si T est en outre un voisinage de x dans Σ, prenons W comme en (e), puis un voisinage ouvert ambiant U de x tel que $U \cap \Sigma \subset T$. Un témoin fini du G-recouvrement de U par des domaines compacts donne par réunion un voisinage domanial compact $U' \subset U$. Alors $W \cup U'$ est un domaine compact qui contient U' et a pour trace $T \cup (U' \cap \Sigma) = T$.

524. Dimension tropicale dans la borne sur le support

Texte visé. Proposition 3.3.6, démonstration, p. 80.

`espgtrop.tex`, lignes 616–635.

Correction. Supposer $d_{\mathrm{trop}}(x) < \max(p, q)$. Prendre une famille finie de domaines de G-cartes contenant x dont la réunion contient un voisinage ordinaire de x. Rétrécir chaque domaine dans sa propre topologie pour que son image ait dimension au plus $d_{\mathrm{trop}}(x)$. La forme sur chaque image est nulle, puisque l'un des deux degrés extérieurs dépasse cette dimension. La réunion des domaines rétrécis est encore un voisinage ordinaire de x, et la propriété de G-faisceau y donne l'annulation.

525. Signe gradué du produit extérieur des G-formes

Texte visé. §3.3.10, p. 80, `espgtrop.tex`, ligne 695.

Correction. Pour des bidegrés (p, q) et (p', q'), le signe d'échange est $(-1)^{(p+q)(p'+q')}$. La permutation échange deux blocs de ces degrés totaux. Sur le plan standard, les formes $d'x_1$ et $d'x_2$ de type $(1, 0)$ anticommutent, ce qui sépare les deux signes. Le calcul local se recolle pour les G-formes.

526. Compatibilité du tiré en arrière et de la restriction

Texte visé. §3.3.14, p. 81, `espgtrop.tex`, lignes 792–794. Les applications occupent les lignes 796–798.

Condition corrigée. Soit $f : Y \to X$ un morphisme d'espaces G-tropicaux, T une partie paralinéaire de Y et Σ une partie paralinéaire de X. Lire $f(T) \subset \Sigma$ pour définir $f_T = f|_T : T \to \Sigma$.

La condition imprimée $f(\Sigma) \subset T$ peut appliquer f hors de son domaine. Même lorsqu'elle a un sens, elle ne suffit pas. Prenons $X = Y = \mathbf{R}$ avec leur structure paralinéaire standard sur $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$, $f = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$, $T = \mathbf{R}$ et $\Sigma = \{0\}$. Les deux parties sont paralinéaires et $f(\Sigma) \subset T$. Pourtant $f|_T$ ne prend pas ses valeurs dans Σ, donc le tiré en arrière du membre de droite de l'égalité imprimée est indéfini.

Preuve. Sous la condition corrigée, choisissons des coordonnées fidèles sur des traces $\Sigma \cap W$, prolongées aux domaines W de X. Leurs images réciproques par f sont des domaines de Y. La restriction des coordonnées composées à leurs traces dans T est paralinéaire par la propriété des traces. Le G-recouvrement de Σ par ses morceaux fidèles se tire en arrière sur T et établit la paralinéarité de f_T. Écrivons j_T, j_Σ pour les inclusions. On a $f \circ j_T = j_\Sigma \circ f_T$. Le calcul sur des morceaux affines communs et le recollement dans le G-faisceau donnent pour toute G-forme ω sur X

$$(f^*\omega)|_T = j_T^*(f^*\omega) = f_T^*(j_\Sigma^*\omega) = (f|_T)^*(\omega|_\Sigma).$$

Si Y est un domaine de X, prenons pour f son inclusion et pour T la trace $\Sigma \cap Y$. Pour la seconde application, prenons $Y = X$, $f = \mathrm{id}_X$ et T une partie polyédrale de Σ, munie de sa

structure induite. Dans les deux cas la condition corrigée est satisfaite et l'identité donne la restriction annoncée.

527. Espace d'arrivée de la carte restreinte

Texte visé. Lemme 3.5.3, p. 85, `espgtrop.tex`, ligne 1284.

Correction. Dans la première implication de la preuve, écrire les cartes $(f_i : X_i \to E, P_i)$, avec $f_i = f|_{X_i}$ et $P_i = f_i(X_i)$. La restriction de la carte $(f : X \to E, P)$ à un domaine compact X_i garde l'espace affine d'arrivée E, et P_i est un polyèdre compact dans E.

Si les restrictions de α aux images de tous les domaines compacts sont positives, prenons un G-recouvrement par de tels domaines. Sur chacun d'eux,

$$(f^*\alpha)|_{X_i} = f_i^*(\alpha|_{P_i}).$$

Pour cette G-forme sur P_i, prenons des représentants ordinaires positifs sur un G-recouvrement. Leurs domaines se tirent en arrière sur X_i et les cartes se composent, ce qui atteste la positivité de $f^*\alpha$. Le même argument vaut pour la positivité faible et la positivité forte.

Dans la réciproque, les cartes de représentation $f_i : V_i \to E_i$ sont introduites séparément. Pour un domaine compact V, on les combine avec $f|_{V_i}$ sur un G-recouvrement compact fini de V. Sur les images des cartes produits, l'injectivité du tiré en arrière sur images compactes identifie les deux G-formes représentées. La somme disjointe de ces images se projette sur $f(V)$ et cette projection admet des sections G-locales paralinéaires. Le tiré en arrière par ces sections conserve chacun des trois cônes et donne le critère réciproque. Le changement de T en E vise la première implication.

528. Bidegré du produit extérieur dans la proposition 3.7.8

Texte visé. Proposition 3.7.8, p. 94, `espgtrop.tex`, lignes 2417–2421.

Correction. Pour α de bidegré (p', q') et ω de bidegré (p, q), écrire

$$\alpha \wedge \omega \in \mathscr{A}_{\Gamma,\Psi}^{p+p',q+q'}(X).$$

Le produit extérieur ajoute les deux degrés séparément, comme l'indique la flèche affichée. Par exemple, deux formes constantes $d'x_1$ et $d''x_2$ sur $\mathbb{R}^2$ donnent un produit non nul de bidegré $(1, 1)$.

529. Renvoi pour la continuité de la restriction

Texte visé. Proposition 3.7.12(c), p. 96, `espgtrop.tex`, ligne 2616.

Correction. Citer la proposition 3.7.9 sous son étiquette distincte. La restriction est un tiré en arrière et sa continuité doit être utilisée pour les familles filtrantes de cartes G de l'énoncé. C'est le cadre de la proposition 3.7.9.

530. Comparaison de cartes pour une densité borélienne

Texte visé. §4.4.3(a), p. 106, `calibrages-pl.tex`, lignes 857–863.

Correction. Comme $\alpha^\sharp$, le second coefficient $\beta^\sharp$ doit être borélien. L'identité à démontrer pour la mesure positive est

$$f^*(|\alpha^\sharp|)\,\lambda_{X,f} = g^*(|\beta^\sharp|)\,\lambda_{X,g}.$$

La restriction à des cellules plus petites ne permet pas d’exiger un coefficient lisse. Sur $[0,1]$, avec la carte identité et la forme-volume positive standard de niveau 1, prenons le coefficient borélien $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$. En reprenant la même carte, le coefficient est imposé point par point sur chaque cellule de dimension 1. Il est discontinu en tout point intérieur d’un intervalle non dégénéré. L’égalité des densités comme sections est ponctuelle, donc un représentant égal presque partout ne répond pas à cette exigence.

Preuve. Prenons un G-raffinement par cellules compactes sur lesquelles les deux cartes sont affines. Sur une cellule de dimension n, la transition de f à g est un isomorphisme affine. Si $c > 0$ est la valeur absolue de son déterminant, la forme-volume standard et la mesure de Lebesgue de référence sont multipliées par c sous le changement de carte. En posant $a = f^{*}\alpha^{\sharp}$ et $b = g^{*}\beta^{\sharp}$, l’égalité des densités donne $a = cb$ sur la cellule, y compris sur son bord. Comme $\lambda_{X,g} = c\,\lambda_{X,f}$ sur cette cellule, on obtient $|a|\lambda_{X,f} = |b|\lambda_{X,g}$, même si la masse est infinie. Sur une cellule de dimension $< n$, les deux mesures de référence sont nulles. Les restrictions concordent donc sur tout le G-recouvrement. La régularité intérieure de la mesure pondérée suit en approchant son poids par des fonctions simples positives et leurs ensembles de niveau par des compacts. Le recollement des mesures boréliennes régulières de l’appendice A.3 identifie les mesures positives.

Dans le cadre de §4.4.4, si la densité est localement intégrable, la même loi s’applique séparément à ses parties positive et négative, car $c > 0$. Leur différence donne l’identité signée comme identité de mesures de Radon. L’identité positive ci-dessus vaut pour les coefficients boréliens sans hypothèse d’intégrabilité locale.

531. Incidence dans la somme des termes de bord

Texte visé. Proposition 4.6.6, preuve, p. 113.

`calibrages-pl.tex`, lignes 1647–1657.

Correction. Dans la première somme du bord, prendre les couples (F, C) où F est une cellule de dimension $n-1$ et une face de la cellule C de dimension n. Il faut donc écrire $F \subset C$. C’est l’incidence employée pour définir le terme de C le long de F et dans la somme qui suit. Les inclusions propres des domaines sont traitées en n° 126.

532. Contraction de bord sur une face orientée

Texte visé. §4.6.13, p. 115, `calibrages-pl.tex`, lignes 1920–1922.

Correction. Pour une n-cellule C incidente à une face F, notons L_C la partie linéaire de $f|_C$. Fixons l’orientation de F et choisissons $\tilde{\mu}_C|_F$ selon la convention de la direction sortante en premier. Dans la ligne médiane, le second bloc se contracte selon

$$\langle L_C^{*}(d''x_J),\, \tilde{\mu}_C|_F\rangle = \langle d''x_J,\, (\Lambda^n L_C)(\tilde{\mu}_C|_F)\rangle.$$

La puissance extérieure porte sur l’application L_C, puis s’applique au vecteur. La somme des vecteurs images sur les cellules incidentes est le représentant orienté $\tilde{\mu}_F$ de la discordance de F. Dans la dernière ligne, contracter $d''x_J$ avec $\tilde{\mu}_F$.

Le coefficient $f^{*}\alpha_{IJ}|_F$ et le premier bloc $f^{*}(d'x_I)|_F$ ont la même restriction pour toutes les cellules incidentes. Ils sortent donc de la somme sur C. Le signe $(-1)^{n(n-1)/2}$ est conservé. Une inversion de l’orientation change du même signe le représentant de discordance et l’identification du premier bloc avec une forme-volume. Le résultat en forme-volume est donc indépendant de l’orientation. En particulier, une discordance nulle donne une contribution de bord nulle.

Par exemple, sur $[0,1]$ avec le calibrage unitaire et $f(t) = 2t$, la contraction de $d''y$ au bord droit donne 2, le facteur apporté par L_C.

533. Application affine du tube de coupure

Texte visé. Proposition 4.6.15, preuve, p. 116.

`calibrages-pl.tex`, lignes 1996–2004.

Correction. Dans l'espace affine local V, choisir $u : V \to \mathbb{R}^2$ affine surjective, nulle sur la face F de codimension deux, de partie linéaire de noyau $\operatorname{span}(F - F)$. On obtient cette application par le quotient des directions et le choix de l'origine sur F. Appliquer la coupure à $(1 - \theta_\varepsilon \circ u)\omega$.

Sur le support compact du test, le volume du tube est $O(\varepsilon^2)$, sa section sur une facette est $O(\varepsilon)$, et la dérivée de la coupure est $O(\varepsilon^{-1})$. Les erreurs tendent donc vers zéro dans l'induction locale. Le calcul de Stokes conserve la constance G-locale du calibrage exigée en n° 9.

534. Annulation hors de la partie pure du support fort

Texte visé. Proposition 5.3.3, p. 127, `espcalibres.tex`, lignes 757–758.

Correction. Lire $x \in X \setminus \Sigma^{(n)}$ avant de prouver l'annulation au voisinage de x. La forme $d't$ sur la droite paralinéaire usuelle, de niveau 1, est non nulle et a pour support fort la droite entière. Elle montre que l'annulation ne peut être demandée au point de la partie pure choisi dans le texte imprimé.

Soit ω de bidegré (p, q), $\max(p, q) = n$, fortement supportée par Σ. Pour un test squelettique fermé T contenant $\Sigma^{(n)}$, comparons d'abord sur l'union squelettique fermée $T \cup \Sigma$. Dans une décomposition compatible, les cellules hors de Σ portent l'extension nulle donnée par le support fort, et les cellules de dimension inférieure à n donnent zéro par degré. Les cellules de dimension n contenues dans Σ sont dans sa partie pure. En restreignant à T, on obtient l'égalité de prolongement voulue pour le support fort.

Pour le support ordinaire, soit x dans le complément ouvert de $\Sigma^{(n)}$. Choisissons-y un témoin pointé fini de domaines compacts portant des présentations de ω. Sur l'un d'eux, noté V, écrivons $\omega|_V = f^*\alpha$ sur l'image compacte $f(V)$. La trace de Σ est de dimension inférieure à n. Son union avec le lieu squelettique compact de variation maximale $\Sigma_f^{(n)}$ permet d'appliquer le support fort à ce test. Sur les n-cellules de la subdivision adaptée, la restriction est nulle par prolongement de la trace de dimension inférieure. Elle est donc nulle sur le squelette maximal.

La proposition 5.2.5 identifie l'image de ce squelette à la partie pure de dimension n de $f(V)$. Sur les pièces d'immersion, les inverses affines et la détection sur images compactes donnent $\alpha = 0$ sur cette partie. Les autres cellules donnent zéro par degré extérieur. Ainsi $\omega|_V = 0$. Les domaines choisis contiennent x et leur réunion contient un voisinage ordinaire de x. L'annulation G-locale sur leurs traces donne l'annulation ordinaire près de x. Le support est donc contenu dans $\Sigma^{(n)}$, qui supporte fortement ω.

535. Référence pour la projection de la forme-volume de bord

Texte visé. §5.9.4, p. 138, `espcalibres.tex`, ligne 1871.

Correction. Citer la proposition 4.6.5(a), qui porte sur le degré de bord $(n - 1, n)$.

Soient $S = \Sigma_f^{(n)}$ et $g = f|_S : S \to \Pi_f$. L'hypothèse de propreté topologique et l'immersion par morceaux sur le squelette maximal font de g une immersion par morceaux propre dans le cadre de 4.6.5(a). La forme-volume sur S est $\tilde{\omega} = \langle g^*(\alpha|_{\Pi_f}), \mu_S \rangle$. La formule de projection donne

$$g_*\tilde{\omega} = \langle \alpha|_{\Pi_f}, g_*\mu_S \rangle = \langle \alpha|_{\Pi_f}, \mu_{\Pi_f} \rangle.$$

C’est l’identité (5.9.4.2) dans la cible calibrée. La contraction sur une face orientée se calcule comme en §4.6.13.

536. Référence pour l’affinage analytique

Texte visé. Exemple 6.1.5, p. 141, `esptrop.tex`, ligne 49.

Correction. Renvoyer au §12.4.6 pour la construction de l’affinage et au §12.4.1 pour la structure G-tropicale sous-jacente. Dans le cadre analytique topologiquement séparé de cette construction, les fonctions affines sur un domaine analytique s’écrivent localement pour sa topologie ordinaire

$$r \log |u| + c, \qquad r \in \mathbf{Q}, \quad c \in \mathbf{R},$$

avec u une unité analytique. La constante réelle figure déjà dans l’exemple 6.1.5. Sur la réunion disjointe de deux points analytiques sur un corps trivialement valué, on peut choisir des constantes différentes sur les deux composantes. Cela donne une fonction affine selon la prescription locale.

537. Bidegré du produit extérieur sur un espace raffiné

Texte visé. Proposition 6.4.2, p. 146, `esptrop.tex`, lignes 459–463.

Correction. Dans le texte précédant l’application affichée, placer $\alpha \wedge \omega$ dans $\mathscr{A}_{\Psi}^{p+p',q+q'}(X)$. Sur les cartes de l’espace raffiné, le produit d’une forme de bidegré (p', q') et d’une forme de bidegré (p, q) a pour bidegré $(p + p', q + q')$. La formule affichée donne ce bidegré et conserve la famille de supports Ψ.

538. Renvoi pour la continuité du produit extérieur

Texte visé. Proposition 6.4.2, p. 146, `esptrop.tex`, ligne 467.

Correction. Donner à la proposition 3.7.8 sa propre étiquette et la citer à cet endroit. C’est son produit extérieur pour la famille de cartes spécialisée Γ_X qui justifie la continuité. Le renvoi de §7.1.5 à la proposition 6.4.2 garde sa cible.

539. Renvoi pour la continuité du tiré en arrière ordinaire

Texte visé. Proposition 6.4.3, p. 146, `esptrop.tex`, ligne 490.

Correction. Donner à la proposition 3.7.9 une étiquette distincte et la citer dans cette preuve. Le tiré en arrière continu pour les G-formes y est établi avec les familles de cartes générales. Les familles Γ_X, Γ_Y utilisées ici en donnent la spécialisation.

540. Extrémités dont le centre est adhérent

Texte visé. § 6.7.4, p. 152.

`esptrop.tex`, lignes 1069–1072.

Correction. Les extrémités extérieures des branches finies sont $p(a, -1)$, pour $a \in A$. Ce sont des points du bord. Si A est infini, un voisinage du centre contient toutes les branches sauf un nombre fini, éventuellement avec des troncatures sur ces dernières. Il rencontre donc les extrémités $p(a, -1)$. Le bord étant fermé, il contient le centre η. Les points $p(a, 0)$ représentent tous η lui-même.

541. Cylindres ouverts de la limite projective

Texte visé. § 6.7.5, p. 153.

`esptrop.tex`, lignes 1092–1094.

Correction. Dans la condition suffisante d'ouverture, écrire $U = f_i^{-1}(U_i)$, où U_i est ouvert dans X_i. Ces cylindres forment une base. Toute intersection finie se ramène à un cylindre en un indice qui majore les indices concernés. Un ouvert quelconque est une réunion de cylindres. La construction tropicale et la descente globale à un étage relèvent d'arguments distincts.

542. Références pour l'image directe des courants

Texte visé. §7.1.11, p. 159, `courants-trop.tex`, lignes 423–427.

Correction. Pour le tiré en arrière des formes lisses ordinaires, citer la proposition 6.4.3. Pour la continuité sur les tests ordinaires à support compact lorsque $\phi : Y \to X$ est propre, citer le corollaire 6.4.4.

Le tiré en arrière d'un test porté par le compact $K \subset X$ est porté par le compact $\phi^{-1}(K)$. Les estimations pour les cartes affines ordinaires donnent la continuité à chaque ordre dans les topologies de cartes et de supports. La dualité donne

$$\langle \phi_* T, \alpha \rangle = \langle T, \phi^* \alpha \rangle.$$

Les contrôles à ordre fixé conservent la borne sur l'ordre du courant. Il s'agit des espaces de tests ordinaires utilisés pour les courants.

543. Image directe propre sur le support d'un courant

Texte visé. §7.1.11, p. 159, `courants-trop.tex`, lignes 445–446.

Correction. Dans le cadre tropical abstrait, supposer que les deux espaces sont localement différentiellement séparés. La séparation holomorphe locale fournit cette séparation dans le cadre analytique. Soit $S = \operatorname{supp} T$ et supposons que $\phi|_S$ est propre. Pour un compact K de l'espace d'arrivée, choisissons une coupure lisse χ à support compact, égale à un près de $S \cap \phi^{-1}(K)$. Pour un test α porté par K, posons

$$\langle \phi_* T, \alpha \rangle = \langle T, \chi \phi^* \alpha \rangle.$$

La différence de deux choix donne un test compact qui s'annule près de S. Sur chaque étage de tests à support fixé, le tiré en arrière ordinaire et la multiplication par cette coupure fixe sont continus à chaque ordre. La formule conserve donc la borne sur l'ordre de T et commute à J. La propreté de $\phi|_S$ donne une image fermée, et les tests hors de cette image donnent zéro. Ainsi $\operatorname{supp}(\phi_* T) \subseteq \phi(S)$.

544. Bidegrés des courants associés aux formes

Texte visé. §7.3.4, p. 164, `courants-trop.tex`, ligne 1050, et §7.3.5, p. 165, lignes 1095–1106, 1120–1122 et 1125.

Correction. Pour une forme ω de type (p, q) sur un espace de niveau n, le courant $[\omega]$ a bidegré (p, q) et bidimension $(n-p, n-q)$. La cible ordinaire est $\mathscr{D}^{p,q} = \mathscr{D}_{n-p,n-q}$. Employer cet indice complémentaire pour les cibles des applications tensorielles. L'application ordinaire d'intégration ainsi typée est celle définie sur les ouverts ordinaires par les appariements pondérés, selon n° 186 et n° 187.

Pour calculer $J[\omega]$, prendre un test lisse compact α de type $(n-q, n-p)$. Alors $J^{-1}\alpha$ est de type $(n-p, n-q)$ et convient pour tester $[\omega]$. La multiplicativité de J donne

$$\omega \wedge J^{-1}\alpha = J^{-1}(J\omega \wedge \alpha).$$

L'involution est l'identité sur les formes de type (n,n) intégrées sur les cellules supérieures. Pour l'appariement pondéré bien défini, on obtient $J[\omega] = [J\omega]$.

545. Topologie des coefficients pour les applications d'intégration

Texte visé. §7.3.4, p. 164, `courants-trop.tex`, lignes 1071–1073.

Correction. Sur des étages de cartes et de porteurs compacts fixés, munir les présentations des formes de la convergence uniforme locale des coefficients sur les cellules fermées pertinentes. Pour les courants de bord, les semi-normes doivent contrôler les traces sur les faces fermées contributrices. Fixons un test lisse compact. Sur une subdivision compacte finie commune, chaque différence d'appariement se majore par une somme de semi-normes uniformes des différences de coefficients, multipliées par des constantes de changement de coordonnées, des bornes des coefficients du test et les variations pondérées finies des cellules ou des faces. Ces majorants tendent vers zéro. On obtient ainsi la continuité vers la topologie de convergence simple des courants sur ces étages.

546. Cible des injections de formes dans les courants

Texte visé. Corollaires 7.3.8 et 7.3.9, p. 167.

`courants-trop.tex`, lignes 1354 et 1376.

Correction. Aux deux lignes, écrire $(\mathscr{D}^{p,q})_X = (\mathscr{D}_{n-p,n-q})_X$. Le courant d'intégration d'une forme de type (p,q) est évalué sur des tests de type $(n-p, n-q)$. Par exemple, sur la droite de poids unitaire, le scalaire un définit un courant de bidimension $(1,1)$. Les formes testées dans la preuve du corollaire 7.3.8 sont des sections sur l'ouvert ordinaire U.

Sur chaque ouvert ordinaire, utilisons l'intégration supérieure pondérée bien définie. Si $\max(p,q) = n$, un porteur fort pur détecte une forme à coefficients tropicalement continus, par détection sur les cellules supérieures et égalité des supports. Dans le cas très riche, une forme non nulle a une restriction non nulle à un squelette compact pur de dimension n, et cette restriction est détectée par le même appariement. Ces injections commutent aux restrictions ordinaires et fournissent les morphismes de faisceaux sous les hypothèses du faisceau ordinaire des courants.

547. Prolongement par zéro avec une seule coupure

Texte visé. Preuve du lemme 7.5.4, p. 173.

`courants-trop.tex`, lignes 2280–2290.

Correction. Conserver la forme ω sans coupure et poser $\eta' = \rho' f^{*}\alpha'$, prolongement par zéro de $\rho\omega$. Le calcul à écrire est

$$\langle T|_W, \rho\omega\rangle = \langle T, \eta'\rangle = \int_{P_f} \eta' = \int_{P_f \cap W} \rho\omega.$$

Le facteur ρ' est déjà présent dans η'.

548. Porteurs locaux pour la carte conjointe

Texte visé. Proposition 7.5.7, p. 174, `courants-trop.tex`, lignes 2363–2365.

Correction. La définition d'un courant squelettique fournit pour $h = (f, g)$ des porteurs fermés purs sur des ouverts ordinaires. Travailler sur ces ouverts. Le porteur global de h sera construit dans la proposition 7.5.8 à l'aide de la présente comparaison.

Sur un ouvert de la famille, un test ordinaire de la carte f est aussi un test de h par projection. Il s'annule sur les cellules de rang f inférieur à p, si bien que le porteur local de h réduit au plein rang de f décrit le courant pour les tests de f. De même pour g. Comparons avec les deux porteurs donnés par les tests ordinaires compacts localisés sur les cellules de plein rang. Sur un raffinement commun, les deux réductions successives gardent les mêmes cellules de rang p pour les deux cartes, avec les mêmes poids. L'égalité des descriptions calibrées sur le recouvrement ordinaire donne l'égalité recherchée.

549. Restriction du porteur à l'ouvert de la carte

Texte visé. §7.5.9, p. 176, `courants-trop.tex`, lignes 2575–2578.

Correction. Pour une carte tropicale f sur V, prendre un ouvert ordinaire $U \subset V$. Si U est un ouvert quelconque de X, effectuer la restriction sur $U \cap V$. À la ligne 2578, rétablir le renvoi au lemme 7.5.4. Ce lemme donne le porteur

$$P^{T|_U}_{f|_U} = P^T_f \cap U$$

avec le calibrage restreint. La partie reste réduite, donc le porteur est minimal dans l'ouvert de restriction. Pour la localisation de la mesure qui suit, employer des coupures lisses à support compact dans ces ouverts de cartes restreintes.

550. Carré de la coupure dans le test de positivité

Texte visé. Preuve du lemme 7.5.10, p. 177.

`courants-trop.tex`, lignes 2639–2646.

Correction. Avec la forme ω définie comme le prolongement par zéro de $\rho f^*\alpha$, le test $\rho\omega$ donne $\rho^2\langle\alpha, \mu\rangle$ dans la dernière intégrale sur C. On peut aussi tester avec ω et conserver le facteur ρ dans cette intégrale. Dans les deux cas la coupure a une intégrale strictement positive sur la cellule choisie, ce qui permet de lire le signe du coefficient de calibrage.

551. Séparation locale dans la reconstruction squelettique

Texte visé. Proposition 7.5.11, p. 177.

`courants-trop.tex`, lignes 2670–2686.

Correction. Pour employer « courant squelettique » au sens littéral de la définition 7.5.1, demander la séparation affine locale. La construction donne aussi un unique courant ordinaire d'ordre zéro sous la séparation différentielle locale, avec les mêmes formules de description si l'on étend explicitement la définition à ce cadre.

La distinction apparaît sur l'étoile corrigée dans n° 170. Tout voisinage ordinaire du centre contient toutes les branches compactes sauf un nombre fini. Sur une branche entière ainsi contenue, une fonction affine est affine dans la coordonnée de branche et constante près du bout idéal, donc constante avec sa valeur au centre. Des coupures lisses le long des branches, constantes près du centre et des bouts, séparent néanmoins localement les points.

Pour construire le courant, comparons deux produits tests égaux sur la carte conjointe. Les règles de factorisation calibrées conservent les cellules de plein rang, et les termes tropicalisés sont nuls sur les cellules contractées. Les valeurs coïncident donc. Une partition lisse finie près du support compact donne la valeur sur tout test ordinaire. Le raffinement commun et les restrictions aux recouvrements ordinaires donnent l'indépendance des choix et l'unicité. Sur chaque étage compact, les coefficients sont bornés par les semi-normes d'ordre zéro des cartes, à des constantes de coordonnées près. L'intégration contre les variations calibrées finies des morceaux compacts donne l'ordre zéro.

552. Domaine d'intégration des multiplicateurs boréliens

Texte visé. §7.5.14, p. 179, `courants-trop.tex`, lignes 2815–2816.

Contre-exemple. Sur la droite affine de poids unitaire, prenons le courant d'intégration, la carte identité et $\omega = d't \wedge d''t$. La fonction borélienne $\rho(t) = 1/t$ pour $0 < |t| < 1$, nulle ailleurs, a un support compact, mais ses parties positive et négative ont toutes deux une intégrale infinie. Son intégrale signée est indéfinie.

Correction. L'appariement de la forme de type (p, p) avec le calibrage signé G-localement constant du porteur fermé pur donne une mesure de Radon signée de variation localement finie. Sur les compacts, cela découle de la subdivision affine finie et des bornes des coefficients. Les évaluations sur les scalaires lisses compacts sont celles du courant, donc la densité à support contrôlé identifie cette mesure à μ_ω^T. La formule borélienne vaut sur le domaine de l'intégrale signée. Pour une valeur finie, demander $\rho \in L^1(|\mu_\omega^T|)$, ce qui comprend les scalaires boréliens bornés à support compact.

553. Domaine de la description squelettique locale

Texte visé. Preuve de la proposition 7.6.2, p. 181.

`courants-trop.tex`, lignes 2992–2994.

Correction. À la ligne 2994, poser $P_i = |P_{g_i}^T \cap V_i|$, avec la partie p-calibrée pure. Sur $V_i \cap V_j$, les cartes coïncident avec f et le lemme 7.6.1 donne l'accord des restrictions pures. Dans le calcul de la restriction à W, aux lignes 3024–3026 utiliser $V_i \cap W$ et V_i pour les deux découpes correspondantes.

554. Référence pour l'intégration sur les domaines d'intersection

Texte visé. Proposition 7.6.9, démonstration, p. 186.

`courants-trop.tex`, lignes 3593–3596.

Correction. Dans la somme d'inclusion-exclusion, appliquer la proposition **7.6.8** sur chaque domaine U_I à la restriction f_I-tropicale de ω. Les types homogènes sont $(p - r, p)$ pour ω et $(r, 0)$ pour ρ. Suivant n° 205, le produit $\rho \wedge \omega$ est à support compact contenu dans F. La proposition 7.6.8 fournit l'accouplement squelettique avec les G-formes sur ce domaine. La proposition 7.5.15 concerne une carte sur un ouvert ordinaire.

555. Degré du test dans la formule de Leibniz

Texte visé. Lemme 7.7.7, p. 188, `courants-trop.tex`, ligne 3909.

Correction. Si T est de bidimension (p, q) et si le facteur lisse ordinaire α est de type (p', q'), prendre un test lisse ordinaire à support compact β de type

$$(p - p' - 1, q - q')$$

dans les degrés admissibles. Alors $\alpha \wedge d'\beta$ et $d'\alpha \wedge \beta$ ont le type (p, q). Posons $t = p + q$ et $s = p' + q'$. La transposition apporte le signe $(-1)^{t-s+1}$, et le développement de Leibniz apporte $(-1)^s$. Le terme $T(d'(\alpha \wedge \beta))$ reçoit donc le signe $(-1)^{t+1}$, et le terme $T(d'\alpha \wedge \beta)$ le signe $(-1)^t$. Cela donne la formule de Leibniz imprimée.

556. Signe de la différentielle du courant d'intégration

Texte visé. Proposition 7.7.9, p. 189.

`courants-trop.tex`, lignes 3937–3940.

Correction. Pour le morphisme compact $\phi : Y \to X$ et un calibrage G-localement constant sur Y, écrire

$$d'(\phi_* \delta_Y) = -\phi_*(\delta_Y^{\partial}).$$

La différentielle du courant place un signe moins devant l'évaluation de δ_Y sur la différentielle du test tiré en arrière. Stokes donne alors la formule, comme dans la dernière ligne de la preuve.

Sur l'intervalle compact $[0, 1]$, de calibrage unitaire, avec $\phi = \mathrm{id}$ et le test $x\, d''x$, la différentielle du courant donne $-\int_0^1 dx = -1$, alors que le courant de bord donne $1 - 0 = 1$.

557. Suite décalée à partir des erreurs finies

Texte visé. Lemme 8.1.10, p. 197, `bt-trop.tex`, lignes 193–200.

Correction. Former la suite décalée sur la queue où $e_j = \|f_j - f\|_\infty$ est fini. Si l'on veut la suite entière de fonctions réelles décalées, supposer toutes les erreurs finies. Sur $\mathbf{R}$, $f_1(t) = t$ et $f_j = f = 0$ pour $j \geq 2$ illustrent la possibilité d'une première erreur infinie malgré la convergence uniforme.

Les inégalités

$$f + e_j \leq f_j + 2e_j \leq f + 3e_j$$

donnent la convergence uniforme sur la queue. Une infinité d'erreurs nulles donne une sous-suite constante. Sinon, choisissons des indices successifs d'erreurs strictement positives avec $3e_{j_{k+1}} \leq e_{j_k}$. Les deux inégalités rendent la sous-suite décalée décroissante. La suite utile à la preuve locale de stabilité des fonctions psh s'obtient ainsi après retrait des termes initiaux.

558. Fonctions psh localement intégrables avant quotient

Texte visé. Proposition 8.1.12, p. 198, `bt-trop.tex`, lignes 269–287.

Correction. Pour utiliser l'intégrabilité squelettique, travailler sur un espace G-tropical affiné vertébré de niveau n. Former les intersections locales de l'induction avec $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}$, faisceau des fonctions effectivement définies, avant le passage aux classes de L^1_{loc}.

Au rang successeur, si $u_j \downarrow u$ et si u est localement intégrable, chaque u_j est semi-continue supérieurement. Sur un morceau squelettique compact, elle est donc majorée par un réel M_j. Sa partie positive est majorée par $\max(M_j, 0)$ et sa partie négative par u^-. La mesure de référence du morceau est finie, d'où l'intégrabilité de chaque prédécesseur. La suite décroissante effective est alors formée de sections localement intégrables de rang précédent. Les générateurs lisses localement bornés donnent le rang initial. La localité ordinaire donne les rangs limites. La stabilisation et la fermeture par les limites décroissantes localement intégrables donnent le plus petit sous-faisceau annoncé.

559. Bidimension dans l'estimation de Chern–Levine–Nirenberg

Texte visé. Proposition 8.4.1, p. 202.

`bt-trop.tex`, lignes 914–923.

Correction. Prendre T positif fermé de **bidimension** (p,p). Le produit des q hessiens avec T a alors pour bidimension $(p-q,p-q)$, avec $0 \le q \le p$, et s'évalue sur ω de type $(p-q,p-q)$. Si (p,p) désigne le bidegré de T au niveau n, les indices correspondants sont $0 \le q \le n-p$ et le type test est $(n-p-q,n-p-q)$. Le courant étant symétrique, on peut prendre la partie symétrique de ω dans l'estimation.

560. Bidimension et type du test dans la règle de Leibniz

Texte visé. Lemme 8.5.3, énoncé et démonstration, p. 206.

`bt-trop.tex`, lignes 1180–1218.

Correction. Prendre S fermé symétrique de bidimension (p,p) et α lisse symétrique de type (q,q), avec $0 \le q \le p-1$. Les deux membres de

$$d'd''(\alpha \wedge S) = (d'd''\alpha) \wedge S$$

s'évaluent sur une forme test de type $(p-q-1,p-q-1)$. L'identité découle des deux règles de Leibniz, puisque $d'S = d''S = 0$. Avec un bidegré initial (p,p) au niveau n, les mêmes indices s'écrivent en remplaçant la bidimension p par $n-p$.

561. Nom de la seconde fonction tirée en arrière

Texte visé. Lemme 8.8.1, fin de la démonstration, p. 211.

`bt-trop.tex`, lignes 1601–1613.

Correction. Pour les deux fonctions lisses convexes v_1, v_2 de la preuve et la carte tropicale f, poser $u_1 = v_1 \circ f|_U$ et $u_2 = v_2 \circ f|_U$. Les deux fonctions ainsi définies sont lisses psh sur U et vérifient $u|_U = u_1 - u_2$.

562. Domaine compact fixé dans la décomposition G-lisse

Texte visé. Proposition 8.8.2(a), p. 211.

`bt-trop.tex`, lignes 1616–1624.

Correction. Soit W le domaine compact donné et f la carte tropicale qui tropicalise u sur W. Appliquer à la fonction G-lisse induite sur le compact $f(W)$ les résultats cités de prolongement et de décomposition en différence de deux fonctions convexes sur son enveloppe convexe. Pour les fonctions convexes v_1, v_2 ainsi obtenues, la conclusion est $u|_W = f^*v_1 - f^*v_2$. Le domaine et la carte sont ceux de l'énoncé.

563. Domaine compact fixé dans la décomposition paralinéaire

Texte visé. Proposition 8.8.2(b), p. 211.

`bt-trop.tex`, lignes 1626–1648.

Correction. Conserver le domaine compact W et la carte tropicale f donnés. La décomposition paralinéaire sur l'image compacte $f(W)$ fournit deux fonctions paralinéaires convexes v_1, v_2 sur son enveloppe convexe, dont la différence représente la fonction d'origine sur $f(W)$. En les tirant en arrière par cette carte, on obtient $u|_W = f^*v_1 - f^*v_2$.

564. Bidegré du test de la dérivée du courant

Texte visé. Proposition 8.10.1, p. 215.

`bt-trop.tex`, lignes 2065–2076.

Correction. Pour un courant squelettique fermé de bidimension (p,p), avec $p \geq 1$, prendre $0 \leq r \leq p-1$. La forme ρ reste de type $(r,0)$ et ω a le type $(p-1-r,p)$. Alors $\rho \wedge \omega$ a le type $(p-1,p)$ requis pour tester $d'(uT)$, et $d'_G u \wedge \rho \wedge \omega$ est de type (p,p) sur le squelette. L'identité conserve les hypothèses du calcul tangentiel des G-formes et de Stokes sur l'espace sans bord à calibration ambiante G-localement constante. Pour $p = 0$, la dérivée est nulle par degré.

565. Égalité dans la définition du produit itéré

Texte visé. Corollaire 8.10.5, démonstration, p. 220.

`bt-trop.tex`, lignes 2379–2382.

Correction. Insérer l'égalité suivante dans la récurrence, sous les hypothèses du produit squelettique fermé sur l'espace sans bord.

$$d'd''u_1 \wedge \cdots \wedge d'd''u_m \wedge T = d'd''(u_1\, d'd''u_2 \wedge \cdots \wedge d'd''u_m \wedge T)\,.$$

Dans les parenthèses, u_1 agit par multiplication par la fonction continue.

566. Types des formes pour les deux identités de Stokes

Texte visé. Proposition 8.11.1, démonstration, p. 220.

`bt-trop.tex`, lignes 2427–2434.

Correction. Noter (p,p) la bidimension du courant squelettique T. Après absorption de la forme test ω, la forme α a le type $(p-1,p)$ pour d' et $(p,p-1)$ pour d''. Le squelette P_f^T est pur de dimension p, et la dérivée de l'intégrande a le type (p,p). Le calcul harmonique conserve l'action tangentielle des G-formes sur le courant squelettique et les hypothèses du Stokes calibré. Le cas $p = 0$ est nul par degré.

567. Renvoi aux hypothèses du théorème tropical

Texte visé. Corollaire 8.12.2, p. 224.

`bt-trop.tex`, lignes 2727–2729.

Correction. Renvoyer au théorème tropical 8.12.1. Tout point possède une base de voisinages ouverts U, chacun muni d'une fonction psh lisse ρ dont le sous-niveau $\{\rho < 0\}$ est un voisinage relativement compact du point dans U. Conserver aussi les hypothèses d'approximation pour les potentiels et pour la fonction à intégrer. Dans la démonstration du corollaire, prendre la partie symétrique de α avant d'appliquer l'estimation en ordre des formes positives. La partie antisymétrique s'annule dans l'accouplement avec le courant symétrique. L'intégrabilité utilise les estimations corrigées et le produit de Bedford–Taylor à potentiels continus.

568. Seconde sous-cellule dans l'inclusion d'images

Texte visé. Lemme 9.1.6, p. 228 (page imprimée et PDF), intertrop.tex, ligne 294.

La preuve relève les points de $C' \times D'$. Le produit $C' \times D$ peut être trop grand, même lorsque ϕ est définie sur l'espace affine ambiant. Avec les cartes identités des deux intervalles unité, prenons ϕ égale à l'identité, $R = [0,1] \times [0,1/2]$, $C' = C = D = [0,1]$ et $D' = [0,1/2]$. L'image

de $W' \cap \Sigma$ est alors contenue dans R, tandis que $\phi(C' \times D)$ contient des points de seconde coordonnée supérieure à $1/2$.

Correction de la preuve. À la ligne 294, écrire

$$h(W' \cap \Sigma) \supset \phi(C' \times D').$$

Les deux identités d'image de la proposition 5.2.5(c), appliquées aux domaines compacts K et L, fournissent, pour chaque point de $C' \times D'$, un relèvement de la première coordonnée dans le squelette de f et de la seconde dans celui de g. L'image du couple appartient à R, puisque $C' \times D' \subset R$. Il appartient donc au squelette produit découpé et se trouve dans $W' = (K \times L) \cap (f, g)^{-1}(C' \times D')$. L'application ϕ est injective sur le sous-espace affine produit et les deux sous-cellules ont les dimensions maximales m et n. L'inclusion corrigée donne donc la dimension voulue.

569. Bord de l'espace produit

Texte visé. § 9.1.8, intertrop.tex, lignes 348–349, p. 229 (page imprimée et PDF).

Dans le point (ii), remplacer $\partial(X)$ par le bord de l'espace produit, défini aux lignes 339–340. Pour des facteurs de niveaux m et n, posons $Z = X \times Y$ et

$$B_Z = (\partial X \times Y) \cup (X \times \partial Y).$$

Pour toute partie squelettique Σ de Z et tout domaine W de Z, les deux traces dont il faut établir la $(m+n)$-négligeabilité sur Σ sont celle de B_Z et celle du bord topologique relatif $\partial(W/Z) = W \setminus \mathrm{Int}_Z(W)$.

Par exemple, pour la droite affine $X = \mathbb{R}$ et l'intervalle $Y = [0, 1]$ munis de leurs bords usuels, ∂X est vide tandis que B_Z contient les deux droites $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\mathbb{R} \times \{1\}$. Dans une présentation squelettique locale par un produit, la trace de $\partial X \times Y$ est contenue dans le produit de la trace négligeable de ∂X avec la partie squelettique du second facteur. Les dimensions s'additionnent et donnent une borne strictement inférieure à $m + n$. Le second terme de B_Z se traite de la même façon. La trace du bord topologique de W fait l'objet de l'argument distinct du § 9.1.9.

570. Compacts à couvrir dans le raffinement des cartes

Texte visé. Proposition 9.2.1, intertrop.tex, lignes 640–641, p. 232 (page imprimée et PDF).

Les compacts $K \subset X$, $L \subset Y$ et $M \subset X \times Y$ sont donnés séparément. En particulier, pour $X = Y = \mathbb{R}$, $K = L = \{0\}$ et $M = \{(1, 1)\}$, le produit $K \times L$ ne couvre aucun point de M. Effectuer la réduction en remplaçant K, L par

$$K^* = K \cup p_X(M), \qquad L^* = L \cup p_Y(M).$$

Ainsi $M \subset K^* \times L^*$. Si les deux compacts agrandis sont non vides, appliquer la construction à leur produit compact. S'il en est un qui est vide, M est vide. Prendre la famille vide sur ce facteur et une famille finie de cartes raffinantes couvrant le compact de l'autre facteur.

Dans le cas non vide, prendre un voisinage rectangulaire ouvert de chaque point. Pour chaque facteur, réunir les coordonnées des cartes à raffiner et les composantes correspondantes des coordonnées de la carte produit prescrite. Les coordonnées de cette dernière s'obtiennent par une application affine sur les coordonnées jointes, en additionnant les contributions des facteurs. La construction finie permet alors d'utiliser, pour chaque paire retenue, un rectangle initial contenant son produit de domaines et la projection convenable des coordonnées jointes. La vérification finale de ces inclusions et de ces raffinements est aux lignes 691–693, p. 233.

571. Sommes finies de produits séparés

Texte visé. Corollaire 9.2.4, intertrop.tex, lignes 785–789, p. 234 (page imprimée et PDF).

À la ligne 787, écrire que c est approchable par des sommes finies de fonctions de la forme $p_1^*a \cdot p_2^*b$. L'énoncé du corollaire parle déjà du sous-espace vectoriel engendré par les produits.

Sur deux droites affines, prenons des fonctions lisses à support compact a_i, b_i, pour $i = 0, 1$, telles que $a_i(j) = b_i(j) = \delta_{ij}$ pour $j = 0, 1$. La matrice des valeurs de $c(x, y) = a_0(x)b_0(y) + a_1(x)b_1(y)$ aux quatre couples $(j, k) \in \{0, 1\}^2$ est l'identité. Pour un seul produit $a(x)b(y)$, cette matrice a rang au plus un. Les évaluations ponctuelles sont continues sur chaque espace de formes associé à des cartes et à un support compact fixés, donc pour la topologie finale des formes à support compact. Les limites de produits isolés donnent encore une matrice de déterminant nul.

Dans les conditions de coupure de n° 257, représenter chaque coefficient joint localisé sur un rectangle compact de cartes. L'approcher par des polynômes dans les coordonnées numériques des deux facteurs, avec convergence des dérivées de tout ordre fixé sur un pavé contenant l'image compacte. Chaque polynôme est une somme finie de produits de monômes, un dans chaque liste de coordonnées. Prendre les images réciproques des monômes par les cartes des facteurs. Multiplier chaque terme par les coupures fixes et le prolonger par zéro. On obtient les sommes finies voulues. Le passage aux espaces de formes à support compact est précisé en n° 258.

572. Faisceaux ordinaires dans la décomposition du produit

Texte visé. Proposition 9.2.7, intertrop.tex, ligne 936 et répétition à la ligne 951, p. 235 (page imprimée et PDF).

Aux deux endroits, employer les faisceaux ordinaires $\mathscr{A}_X^{p',q'} \boxtimes \mathscr{A}_Y^{p'',q''}$, comme au § 9.2.6. La décomposition en blocs de degrés $(p', q'; p'', q'')$ vaut sur les ouverts ordinaires de $X \times Y$. Sur un domaine G muni de ses formes intrinsèques, deux blocs peuvent avoir une même image non nulle. Pour la diagonale $i(t) = (t, t)$ de deux droites affines, $d'x$ et $d'y$ appartiennent à deux blocs distincts dans le produit, mais

$$i^*(d'x) = i^*(d'y) = d't \neq 0.$$

Pour l'unicité, construire des représentants de degrés prescrits sur un rectangle commun. Chaque composante s'y écrit localement comme somme finie de produits extérieurs de générateurs des facteurs, avec des coefficients lisses ordinaires. Joindre les coordonnées des cartes nécessaires aux générateurs et aux coefficients, puis prendre des voisinages domaniaux compacts U, V dans ce rectangle. Sur l'image compacte effective $f(U) \times g(V)$, le critère de nullité des cartes compactes identifie l'annulation d'une forme représentée avec celle de son représentant.

Sur une cellule produit $C \times D$, l'espace tangent se décompose comme $T_C \oplus T_D$. Dans les deux algèbres extérieures de cet espace, les blocs de degrés distincts sont donc indépendants. L'annulation de la somme entraîne celle de chacune des composantes sur l'image compacte, puis sur le rectangle source. La localité ordinaire donne l'unicité au niveau des faisceaux.

573. Longueurs des multi-indices dans la base produit

Texte visé. Proposition 9.2.7, intertrop.tex, ligne 999, p. 236 (page imprimée et PDF).

Dans l'ordre affiché

$$d'x_I \wedge d''x_J \wedge d'y_K \wedge d''y_L,$$

les longueurs de I, J, K, L sont respectivement p', q', p'', q'', pour le bloc $(p', q'; p'', q'')$. À la ligne 999, les longueurs de J et K sont interverties. Pour le bloc $(0, 1; 0, 0)$, le monôme voulu est $d''x$, alors que les longueurs imprimées sélectionnent $d'y$.

Pour placer en tête les deux blocs de différentielles d', on permute $d'y_K$ et $d''x_J$. Cette permutation introduit le signe $(-1)^{q'p''}$. Dans l'ordre affiché, qui groupe les deux blocs de chaque facteur, aucun échange de ces blocs n'est effectué.

Pour former l'image réciproque du monôme pondéré sur $X \times Y$, utiliser la carte produit (f, g) pour le coefficient et les cartes $f \circ p_1$ et $g \circ p_2$ pour les deux facteurs extérieurs. Ainsi, pour un coefficient ρ sur la cible,

$$((f,g)^*\rho)\,(f\circ p_1)^*(d'x_I \wedge d''x_J) \wedge (g\circ p_2)^*(d'y_K \wedge d''y_L)$$

est un terme du bloc indiqué.

574. Degré et support de l'espace restreint

Texte visé. Théorème 9.3.6, partie (b), intertrop.tex, ligne 1443, p. 241 (page imprimée et PDF).

La démonstration emploie à cet endroit un espace de degré zéro. Les formes d'essai de S gardent le degré produit $(p, q; 0)$ sur $X \times W$.

Pour le domaine compact W de la carte du paramètre, poser $\mathscr{D}_W = \mathscr{D}|_{X\times W}$ et $M_W = M \cap (X \times W)$. L'hypothèse de propreté au-dessus de Y rend M_W compact. La restriction

$$\mathscr{A}^{p,q;0}_{\mathscr{D},M}(X \times Y) \longrightarrow \mathscr{A}^{p,q;0}_{\mathscr{D}_W,M_W}(X \times W)$$

est continue pour les semi-normes ordinaires sur les images compactes de cartes. Appliquer l'estimation pour le cas compact à cette restriction. Mesurer la fonction obtenue sur W dans l'espace d'arrivée à cartes fixées. Le degré zéro appartient ainsi à la fonction du paramètre obtenue après l'action du courant.

575. Les ouverts du faisceau à support propre

Texte visé. § 9.3.7, intertrop.tex, ligne 1453, p. 241 (page imprimée et PDF).

Lire « pour tout ouvert U de Y ». À un ouvert ordinaire $U \subset Y$, associer les formes ordinaires de degré $(p, q; p', q')$ sur $X \times U$ dont le support fermé est propre au-dessus de U.

Dans un recollement sur un recouvrement ouvert de U par les U_i, le support de la forme recollée se restreint au support local sur chaque $X \times U_i$. Soit $C \subset U$ compact. Par régularité de l'espace compact séparé C, le recouvrir par un nombre fini de parties compactes, chacune contenue dans un U_i. Au-dessus de chacune de ces parties, le support recollé est compact par l'hypothèse locale. Leur réunion finie est le support au-dessus de C. La forme recollée appartient donc au faisceau à support propre sur l'espace des paramètres.

576. La forme d'essai entière dans l'accouplement fibre

Texte visé. Théorème 9.3.8, intertrop.tex, lignes 1590–1593, p. 242 (page imprimée et PDF). La parenthèse se répète à la ligne 1618, p. 243.

Dans le calcul localisé, réunir dans la forme d'essai le coefficient scalaire localisé et la forme de degré (p, q) du premier facteur. Avec les notations du texte, poser

$$\xi_{\lambda i} = j_!(p_1^*\theta_{\lambda,i}(f_\lambda, g)^*\gamma_{\lambda,i}\, p_1^*\tilde{\alpha}_{\lambda,i}).$$

C'est la forme de degré $(p, q; 0)$, prolongée par zéro, à donner à S_*. La contribution sur le domaine compact W du paramètre est

$$S_*(\xi_{\lambda i})\,(g|_W)^*\beta_{\lambda,i}.$$

Ainsi le facteur extérieur du paramètre multiplie le résultat scalaire de l'accouplement.

Pour le contrôle de continuité, sur une cellule compacte $D \subset W$, prendre l'image réciproque de $\beta_{\lambda,i}$ par $g|_D$ et ses coefficients dans la base extérieure intrinsèque de D. Si b est l'un de ces coefficients, la forme d'essai correspondante sur $X \times D$ est la restriction de $\xi_{\lambda i}$ multipliée par $p_2^* b$. Utiliser le degré et le support de cette forme entière dans les semi-normes de l'espace ordinaire à cartes et support fixés.

577. Bidegré du premier courant positif

Texte visé. Après la définition 9.6.1, p. 250.

`intertrop.tex`, lignes 2261–2263.

Correction. Donner au premier courant positif S le bidegré (p, p). Le second courant T a bidegré (q, q). Leur produit extérieur a donc le bidegré séparé $(p, p; q, q)$, conformément au calcul qui suit.

578. Bidegré du test dans l'intégrale sur le graphe

Texte visé. Proposition 9.6.4, p. 251, `intertrop.tex`, lignes 2304–2305.

Correction. Sur un espace de niveau m, le courant de bidegré $(p + q, p + q)$ se teste sur une forme lisse compacte de bidegré $(m - p - q, m - p - q)$. Chaque bloc complète le bidegré du courant jusqu'à m.

579. Application de tiré en arrière dans l'intersection avec une forme

Texte visé. Proposition 9.6.6, p. 253, `intertrop.tex`, lignes 2623–2627.

Correction. Si $U = [\gamma]$ est sur le but de l'application affine p, écrire

$$T \cap_p U = T \wedge p^*\gamma.$$

C'est p qui a pour source l'espace de T et pour but celui où vit γ. La ligne suivante utilise en conséquence $(p \circ f)^*\gamma$.

580. Courant cible dans la composition des images inverses

Texte visé. Proposition 9.6.9(d), p. 254, `intertrop.tex`, lignes 2671–2690.

Correction. Pour $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ affine, introduire dans (d) un courant positif fermé U sur $\mathbf{R}^p$, puis écrire

$$(g \circ f)^! U = f^!(g^! U).$$

Le courant intermédiaire $g^! U$ est sur $\mathbf{R}^n$ et le résultat est sur X. Ce sont les types dans le cadre où les images inverses considérées sont définies.

581. Degrés des coefficients d'une matrice graduée

Texte visé. § 10.1.4, p. 262, `redgrad.tex`, lignes 66–78.

Correction. Écrire un morphisme $A[s] \to A[r]$, où $A[s] = \bigoplus_j A[s_j]$ et $A[r] = \bigoplus_i A[r_i]$. Ses coefficients homogènes a_{ij} ont un support fini dans chaque colonne et satisfont $\|a_{ij}\| r_i \in \{s_j, 0\}$. En effet $a_{ij} e_i$ a degré $\|a_{ij}\| r_i$, qui doit être celui du générateur de la colonne j lorsqu'il est non nul. Pour un produit de matrices, chaque terme non nul $a_{ij} b_{j\ell}$ a le degré t_ℓ / r_i et les colonnes restent à support fini.

Avec $\deg(t) = 3/2$ sur $k[t, t^{-1}]$, la multiplication par t définit $A[3] \to A[2]$, car $(3/2)\,2 = 3$.

582. Décalages dans le Hom interne gradué

Texte visé. § 10.1.5, p. 262, `redgrad.tex`, lignes 80–88.

Correction. Indexer le Hom interne par $\rho > 0$. Pour des polyrayons finis $r = (r_i)_i$ et $s = (s_j)_j$, écrire

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(A[s], A[r]) \simeq \bigoplus_{i,j} A[r_i s_j^{-1}].$$

L'indice j désigne la source et i la cible. Dans la composante ρ, le terme de matrice $a_{ij} e_i$ doit avoir degré ρs_j dans $A[r]$, donc $a_{ij} \in A^{\rho s_j / r_i}$. C'est bien la composante ρ de $A[r_i s_j^{-1}]$.

583. Critère homogène d'intégrité

Texte visé. § 10.1.6, p. 262, `redgrad.tex`, lignes 92–95.

Correction. Un anneau gradué non nul est intègre si et seulement si tout produit fini d'éléments homogènes non nuls est non nul. En effet, chacun de deux éléments quelconques non nuls a une composante homogène non nulle de degré maximal. La composante du produit au degré produit de ces deux degrés est le produit des composantes maximales. Elle est non nulle d'après le critère, qui suffit donc pour l'intégrité de l'anneau sous-jacent.

584. Corps gradué à conserver dans la récurrence

Texte visé. Lemme 10.1.10, redgrad.tex, lignes 272–273, p. 265 (page imprimée et PDF).

Dans le cas où le rayon r_ℓ est d'ordre infini modulo le groupe des degrés des éléments homogènes non nuls du corps précédent $\breve{L} = L(T_i / r_i)_{i<\ell}$, le texte établit l'égalité $\breve{L}(T_\ell / r_\ell)^1 = \breve{L}^1$, puis affirme que $B = \bigcup_{i<\ell} B_i$ engendre $L(T_\ell / r_\ell)^1$ sur L^1. Ce dernier corps peut avoir perdu les générateurs déjà construits.

Prenons $K = L = k$ trivialement gradué, $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Les groupes de degrés de K et L sont égaux. Au second pas, $\breve{L} = k(T_1/1)$, le rayon 2 est d'ordre infini modulo $\{1\}$ et $B = \{T_1\}$ engendre $\breve{L}^1 = k(T_1)$ sur k. Or

$$\breve{L}(T_2/2)^1 = k(T_1), \qquad L(T_2/2)^1 = k.$$

Remplacer le second corps de degré 1 de la ligne 272 par $\breve{L}(T_\ell / r_\ell)^1$. L'ordre infini de r_ℓ impose qu'un polynôme homogène non nul ait un seul exposant de T_ℓ. Dans un quotient homogène de degré 1, les exposants au numérateur et au dénominateur sont égaux. La fraction appartient donc à $\breve{L}^1$, et l'inclusion réciproque est immédiate. Le corps obtenu est engendré par B sur L^1, ce qui justifie $B_\ell = B$ dans ce cas.

585. Polyrayon des cartes projectives graduées

Texte visé. § 10.2.2, p. 267.

`redgrad.tex`, lignes 412–425.

Correction. Dans la définition de l'espace projectif relatif de polyrayon ρ, employer les degrés déclarés ρ_i. Les deux constructions utilisent respectivement

$$A[T_0/\rho_0, \dots, T_n/\rho_n], \qquad U_j = \operatorname{Spec} A[\tau_{ij}/(\rho_i/\rho_j)]_{i\neq j}.$$

La transition $\tau_{ij} = \tau_{ik}\tau_{jk}^{-1}$ préserve le degré ρ_i/ρ_j. Dans la définition affine voisine (ligne 410), écrire simplement $\operatorname{Spec} A[T/r]$.

586. Décalage local du fibré O(1)

Texte visé. § 10.2.5, p. 268.

`redgrad.tex`, lignes 515–525.

Correction. Sur U_j, lire

$$\mathscr{O}(1)|_{U_j} \simeq \mathscr{O}_{U_j}[\rho_j].$$

Le générateur T_j a le degré ρ_j du polyrayon projectif. Sur $U_j \cap U_k$, la relation $T_j = \tau_{jk}T_k$ préserve ce degré puisque τ_{jk} a degré ρ_j/ρ_k.

587. Liberté après extension des degrés

Texte visé. Lemme 10.3.1(f) et sa preuve, pp. 269–270.

`redgrad.tex`, lignes 546–635.

Correction. Dans (f), A est une K^1-algèbre ordinaire. Pour un A-module M, poser

$$B = A \otimes_{K^1} K, \qquad M_K = M \otimes_{K^1} K.$$

Alors M est libre de rang d sur A si et seulement si M_K possède une base homogène de d éléments sur B. Une base de M s'étend en degré 1. Réciproquement, les degrés des éléments d'une base homogène de M_K appartiennent au groupe des degrés de $K^\times$. Diviser chacun de ces éléments par une unité homogène de même degré, puis prendre la composante de degré 1. On obtient une base de M sur A.

588. Normalisation d'un élément de l'algèbre tensorielle

Texte visé. Preuve du lemme 10.3.1(a), p. 269.

`redgrad.tex`, lignes 578–592.

Correction. Dans la preuve de (a), poser $B = A \otimes_{K^1} K$. Pour $x \in B$ homogène non nul, prendre $y \in K^\times$ homogène de même degré. Alors $y^{-1}x$ est de degré 1 et appartient à $A = B^1$. Pour un idéal homogène I de B, cette normalisation de chaque élément homogène de I prouve que l'injection

$$(I \cap A) \otimes_{K^1} K \longrightarrow B$$

a pour image I.

589. Algèbre d’une carte affine stricte

Texte visé. § 10.3.2, p. 270.

`redgrad.tex`, lignes 639–655.

Correction. Dans la définition d’un K-schéma gradué strict, lire « recouvert par des ouverts affines $\operatorname{Spec} A$, où A est une K-algèbre graduée stricte ». Le critère est que $A^1 \otimes_{K^1} K \to A$ soit un isomorphisme. De façon équivalente, le degré de tout élément homogène non nul de A appartient à $|K^\times|$.

590. Extensions scalaires dans le critère de propreté

Texte visé. § 10.3.2, p. 270.

`redgrad.tex`, lignes 676–684.

Correction. Écrire $X = X^1 \times_{\operatorname{Spec} K^1} \operatorname{Spec} K$. Si X^1 est propre, ce changement de base donne la propreté de X. Pour la réciproque, soient L/K^1 un corps et $R \subseteq L$ un anneau de valuation contenant K^1. Les objets gradués correspondants sont

$$L \otimes_{K^1} K, \qquad R \otimes_{K^1} K.$$

Un L-point de X^1 donne un $L \otimes_{K^1} K$-point de X. Son extension unique au second anneau par le critère valuatif gradué donne l’unique R-point requis.

591. Degrés des décalages d’un fibré strict

Texte visé. § 10.3.2, p. 270.

`redgrad.tex`, lignes 686–692.

Correction. Sur V_i, écrire $\mathscr{O}_{V_i}[\rho_i]$, où les ρ_{ij} appartiennent au groupe de degrés $|K^\times|$. Pour chaque vecteur du repère de degré ρ_{ij}, choisir puis diviser par une unité homogène de K de même degré. Le repère obtenu est de degré 1, ce qui donne $E|_{V_i} \simeq \mathscr{O}_{V_i}^{n_i}$ sans décalage.

592. Base de l’espace affine de degré un

Texte visé. Exemple 10.3.3, p. 271.

`redgrad.tex`, lignes 705–711.

Correction. Pour $r_i \in |K^\times|$, choisir $a_i \in K^\times$ homogène de degré r_i et poser $\tau_i = T_i/a_i$. Les τ_i ont degré 1. La partie de degré 1 de l’anneau de l’espace affine gradué est alors $K^1[\tau_1, \dots, \tau_n]$. Pour $X = \mathbb{A}^r_K$, il faut donc lire $X^1 = \mathbb{A}^n_{K^1}$.

593. Espace projectif et fibré de degré un

Texte visé. Exemple 10.3.3, p. 271.

`redgrad.tex`, lignes 713–718.

Correction. Si $\rho_i \in |K^\times|$ pour tout i, lire

$$(\mathbb{P}^\rho_K)^1 = \mathbb{P}^n_{K^1}.$$

Choisir $a_i \in K^\times$ de degré ρ_i. Les rapports des coordonnées T_i/a_i ont degré 1 et donnent les cartes projectives ordinaires et leurs transitions. Dans la carte j, T_j/a_j est un générateur de degré 1 du fibré gradué. Les mêmes transitions donnent le fibré $\mathscr{O}(1)$ usuel sur $\mathbb{P}^n_{K^1}$.

594. Corps des scalaires qui réalisent le décalage

Texte visé. Remarque 10.4.9, p. 277.

`redgrad.tex`, lignes 1123–1128.

Correction. Choisir $\lambda_i \in L^\times$ homogène de degré r_i, puisque $r_i \in |L^\times|$. Après passage à X_L, la multiplication par λ_i donne l'isomorphisme gradué $(D_i)_L[r_i] \simeq (D_i)_L$. On applique alors l'invariance du nombre d'intersection par extension du corps.

595. Corps de degré un dans le calcul projectif

Texte visé. Exemple 10.4.10, p. 277.

`redgrad.tex`, lignes 1133–1140.

Correction. Choisir l'extension graduée L/K avec $r_i \in |L^\times|$ pour tout i. Diviser les coordonnées par des unités homogènes de leurs degrés. La partie de degré 1 donne l'espace projectif ordinaire $\mathbb{P}^n_{L^1}$ et le fibré $\mathscr{O}(1)$ usuel. Le nombre d'intersection calculé sur ce modèle est 1.

596. Domaine de l'application de restriction des valuations

Texte visé. §10.5.1, p. 278 (page imprimée et PDF). Dans redgrad.tex, ligne 1220.

L'application de restriction a pour source $\mathbb{P}_{L'/(K',v')}$ et pour but $\mathbb{P}_{L/(K,v)}$. Dans la phrase qui donne l'image réciproque, remplacer $\mathbb{P}_{L/K'}(K', v')$ par $\mathbb{P}_{L'/(K',v')}$. Les hypothèses donnent les plongements de K' et de L dans L'. Par exemple, pour deux indéterminées indépendantes s, t, on peut prendre les corps trivialement gradués $K = k$, $K' = k(s)$, $L = k(t)$ et $L' = k(s,t)$. L'image indiquée de K' n'est alors pas contenue dans celle de L. La commande TeX pour le domaine corrigé est `\zr{L'}{(K',v')}`.

Soient $\iota : L \hookrightarrow L'$ le plongement et π l'application de restriction. Pour toute partie finie $S \subset L^\times$, un anneau de valuation gradué de la source appartient à l'image réciproque de l'ouvert défini par S si et seulement s'il contient $\iota(S)$. On obtient ainsi

$$\pi^{-1}\big(\mathbb{P}_{L/(K,v)}\{S\}\big) = \mathbb{P}_{L'/(K',v')}\{\iota(S)\}.$$

Cette identité est celle utilisée pour la continuité et la quasi-compacité de π.

597. Groupe de valeurs de la valuation témoin

Texte visé. Théorème 10.5.7(a), p. 281 (imprimée et PDF). Dans redgrad.tex, lignes 1400–1402.

À la ligne 1401, écrire « à valeurs dans H' ». Le n-uplet $(h_1, \dots, h_n)$ appartient à H^n. La valuation témoin w est à valeurs dans un groupe $H' \in \mathsf{D}_H$. Dans les égalités $w(f_i) = h_i$, on utilise les plongements fixés dans H', compatibles avec la valuation du corps de base.

Les deux sens de la preuve utilisent ce même groupe de valeurs, aux lignes 1483–1485 et 1491–1492. L'équivalence avec la version où la valuation elle-même est imposée à valeurs dans H reste ouverte au niveau de cette correction.

598. Espace de valuations des paramètres normalisés

Texte visé. Preuve du théorème 10.5.7, p. 281.

`redgrad.tex`, lignes 1443–1468.

Correction. Après avoir posé $S' = \{T^{e(\lambda)}\lambda : \lambda \in S\}$ dans $(L')^1$, lire

$$\mathscr{V}' = \mathbb{P}_{L'}\{S'\}, \qquad \mathscr{V}'_1 = \mathbb{P}_{(L')^1}\{S'\}.$$

Les paramètres normalisés vivent dans L', même si ceux de S vivent dans L. L'extension de Gauss w' s'applique à ces paramètres et $w'(T^e) = 1$. Les conditions valuatives restent donc les mêmes après normalisation.

599. Cible du morphisme de multiplication gradué

Texte visé. Preuve du théorème 10.5.7, p. 282.

`redgrad.tex`, lignes 1490–1496.

Correction. Dans le sens réciproque, employer le morphisme naturel

$$(L')^1 \otimes_{(K')^1} K' \longrightarrow L'.$$

Il est un isomorphisme parce que $|(L')^\times| = |(K')^\times|$. Le théorème d'extension des valuations cité dans le texte s'applique aux restrictions compatibles à $(L')^1$ et K' et donne la valuation sur L'.

600. Rayons et domaine de la trivialisation graduée

Texte visé. Remarque 10.6.3, p. 284.

`redgrad.tex`, lignes 1692–1700.

Correction. Imposer $r_{ij} \in |K^\times|$. Choisir alors $a_{ij} \in K^\times$ homogène de degré r_{ij}. La multiplication des coordonnées par les a_{ij} donne l'isomorphisme local $\mathscr{O}_{U_i}[\mathbf{r}_i] \simeq \mathscr{O}_{U_i}^n$ sur chacun des ouverts U_i.

601. Morphismes dans l'équivalence métrique graduée

Texte visé. §10.6.6, redgrad.tex, lignes 1759–1764, p. 285 (imprimée et PDF).

Dans la catégorie des espaces vectoriels gradués métrisés, les morphismes sont les applications linéaires graduées de degré nul qui vérifient

$$\|T(s)\|_v \leq \|s\|_v$$

pour tout vecteur homogène s et toute valuation v de l'ouvert. Une telle application préserve chaque réseau unité et définit ainsi un morphisme des faisceaux reconstruits. Inversement, un morphisme de fibrés préserve le réseau dans chaque germe. Pour $s \neq 0$ homogène, une base orthonormée locale permet de choisir un scalaire homogène de valeur $\|s\|_v$. En divisant s par ce scalaire, on ramène l'inégalité à la préservation du réseau unité. Les isomorphismes de fibrés correspondent aux isométries dans les groupoïdes correspondants.

Pour la valuation z-adique de $k(z)$, de graduation triviale, la multiplication par z^{-1} est linéaire sur l'espace générique de rang un. Elle envoie 1 hors du réseau unité, donc ne relève pas d'un morphisme de fibrés sur un ouvert contenant cette valuation. Le morphisme nul de fibrés montre par ailleurs que les seules isométries ne donnent pas tous les morphismes.

602. Produit tensoriel et métrique graduée

Texte visé. Exemple 10.6.9, redgrad.tex, lignes 1802–1804, p. 285 (imprimée et PDF).

Le produit tensoriel des fibrés sur U s'écrit $E \otimes_{\mathscr{O}_U} F$, et sa fibre générique est $E_\eta \otimes_L F_\eta$. Pour un tenseur homogène $s \neq 0$ et une valuation $v \in U$, la formule devient

$$v(s) = \min_{s=\sum_i t_i \otimes r_i} \max_i v(t_i) v(r_i).$$

On prend les décompositions finies en facteurs homogènes t_i et r_i dont chaque terme non nul est du degré de s pour la graduation du produit tensoriel. On peut omettre les termes nuls. Le tenseur nul a pour valeur zéro.

Sur un corps trivialement gradué k, prenons $E_\eta = k[2] \oplus k[3]$, de base homogène e_1, e_2 de degrés 2 et 3, et $F_\eta = k$. La décomposition

$$e_1 \otimes 1 = (e_1 + e_2) \otimes 1 + (-e_2) \otimes 1$$

fait intervenir le facteur non homogène $e_1 + e_2$, auquel la métrique ne s'applique pas.

À chaque v, choisissons des bases orthonormées homogènes (e_a) et (f_b) pour E_η et F_η. Leur base tensorielle est orthonormée pour la métrique du fibré tensoriel. Écrivons $s = \sum_{a,b} c_{ab} e_a \otimes f_b$ et notons a_{ia} et b_{ib} les coefficients de t_i et r_i dans ces bases. Pour a, b fixés, les termes non nuls de $c_{ab} = \sum_i a_{ia} b_{ib}$ ont tous le même degré. L'inégalité ultramétrique donne alors $v(c_{ab}) \leq \max_i v(t_i) v(r_i)$ pour toute décomposition admise. La décomposition de s en termes $(c_{ab} e_a) \otimes f_b$ est elle-même admise et atteint $\max_{a,b} v(c_{ab})$. Le minimum est donc atteint.

603. Ouverts portant les repères de descente

Texte visé. Lemme 10.6.11(ii)(2), p. 286.

`redgrad.tex`, lignes 1828–1845.

Correction. Au point (ii)(2), lire « une base de E sur $\pi^{-1}(V_i)$ ». Ce sont les ouverts V_i de l'espace inférieur qui sont introduits en (ii). Dans la réciproque, leur réunion est l'ouvert V et $U = \pi^{-1}(V)$.

604. Valeur de la métrique sur le corps de descente

Texte visé. Preuve du lemme 10.6.11, p. 286.

`redgrad.tex`, lignes 1854–1873.

Correction. Dans le repère $(g_{ij})_j$ sur $\pi^{-1}(V_i)$, écrire un vecteur homogène $g \in G$ sous la forme $\sum_j a_j g_{ij}$, avec $a_j \in M$. Pour $w = v|_M$,

$$v(g) = \max_j v(a_j) = \max_j w(a_j).$$

Pour $g \neq 0$, cette valeur appartient à $w(M^\times)$. Les expressions coïncident sur les recouvrements par surjectivité, puisqu'elles donnent la même valeur $v(g)$ pour une valuation au-dessus de w. Elles définissent la métrique de descente sur G, dans laquelle les repères g_{ij} sont orthonormés.

605. Flèches d'adjonction dans la descente du fibré

Texte visé. Preuve du lemme 10.6.11, p. 286.

`redgrad.tex`, lignes 1875–1884.

Correction. Les applications sur les sections $F(W) \to E(\pi^{-1}(W))$ donnent un morphisme $F \to \pi_* E$. Par adjonction, il correspond à $\pi^* F \to E$. Sur chacun des ouverts $\pi^{-1}(V_i)$, ce morphisme envoie le repère tiré en arrière sur le repère de E associé aux mêmes g_{ij}, donc c'est un isomorphisme.

606. Puissance de Frobenius dans la descente

Texte visé. Lemme 10.6.14, p. 287.

`redgrad.tex`, lignes 1915–1920.

Correction. En caractéristique $p > 0$, prendre $q = p^a$, avec a entier naturel, et supposer $M^q \subseteq N$. La puissance q-ième est le Frobenius itéré sur les coefficients. Elle respecte les sommes et les produits, et envoie le degré r sur r^q. On l'applique aux données scalaires du changement de corps.

607. Indice du coefficient au numérateur

Texte visé. Redgrad.tex, ligne 1984, p. 287 (imprimée et PDF), preuve du lemme 10.6.15.

Pour la section fixée $s_j = a_j s$, le numérateur de la fraction porte l'indice j. La formule $v(s)^{-1} = \max_i v(a_i)$ donne

$$v(s_j) = v(a_j) v(s) = \frac{v(a_j)}{\max_i v(a_i)} \leq 1.$$

Il y a égalité exactement lorsque $v(a_j) = \max_i v(a_i)$.

Toutes les sections s_j appartiennent donc au réseau unité. À chaque valuation, l'une d'elles engendre ce réseau.

608. Famille de coefficients et décalage de la droite

Texte visé. Lemme 10.6.18, p. 288.

`redgrad.tex`, lignes 2015–2048.

Correction. Fixer une famille **finie non vide** de scalaires homogènes non nuls $a_i \in L^\times$. Pour un repère homogène non nul t, imposer $v(t)^{-1} = \max_i v(a_i)$. Sur l'ouvert où a_j réalise ce maximum, le repère $a_j t$ a norme 1. Ces ouverts recouvrent l'espace. Pour un indice j fixé, dans ce repère générique la norme inverse est $\max_i v(a_i/a_j)$. Elle est donc définie sur $K(a_i/a_j)_i$, avec le décalage égal au degré de $a_j t$.

609. Corps ambiant de l'application de centre

Texte visé. §10.7.1, redgrad.tex, lignes 2083–2086, p. 289 (imprimée et PDF).

Aux lignes 2083 et 2084, le corps ambiant est L. Le corps des fractions gradué de chaque anneau local du pré-modèle est contenu dans L. Cet anneau local est dominé par un anneau de valuation gradué de L. Cela donne la surjectivité de l'application de centre $\mathbf{P}_{L/K}\{V\} \to V$.

À la ligne 2086, W et V sont deux pré-modèles de L sur K. Les trois occurrences imprimées du symbole F désignent ainsi L.

610. Base du morphisme propre et birationnel

Texte visé. Corollaire 10.7.4, p. 290.

`redgrad.tex`, lignes 2210–2217.

Correction. Pour un pré-modèle W de L/K, le corollaire donne un morphisme propre et birationnel $W' \to W$, avec W' quasi-projectif sur K. Pour appliquer le lemme précédent, le pré-modèle initial est W et le schéma de base est $\operatorname{Spec} K$.

611. Tiré en arrière d'un pré-modèle de fibré

Texte visé. Après la définition 10.7.6, p. 291.

`redgrad.tex`, lignes 2289–2292.

Correction. Pour un pré-modèle (V, F) de E et un morphisme propre $h : W \to V$ de pré-modèles, le couple à prendre est (W, h^*F). Les tirés en arrière le long de $W \to V$ et de l'application de l'espace de valuations se composent, ce qui redonne E.

612. Famille de fibrés dans la comparaison des degrés

Texte visé. §10.7.12, p. 292 (imprimée et PDF), redgrad.tex, ligne 2400.

Lire que $(V, (F_i))$ est un modèle propre de la famille des E_i. C'est de cette famille qu'on prend les images réciproques $E_i' = \pi^* E_i$, définies juste avant. Les classes des E_i' figurent dans la première intégrale et celles des E_i dans la dernière.

613. Modèle propre après changement de corps

Texte visé. § 10.7.13, pp. 292–293.

`redgrad.tex`, lignes 2409–2414.

Correction. Pour le modèle propre V de la construction numérique, de corps des fonctions L de type fini sur K, poser

$$V' = V \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} K'.$$

Les F_i sont tirés en arrière sur V'. Les anneaux locaux aux points génériques de V' s'obtiennent par localisation de $K' \otimes_K L$, qui intervient ainsi dans le calcul générique. Par exemple, si $K' = K$, le modèle $\mathbb{P}^1_K$ reste $\mathbb{P}^1_K$, de corps des fonctions $K(t)$.

614. Corps des fonctions du modèle projectif

Texte visé. Exemple 10.7.15, p. 293.

`redgrad.tex`, lignes 2469–2481.

Correction. Pour une famille algébriquement indépendante (a_i), lire $L = K(a_i)_i$. Dans le modèle propre $(\mathbb{P}^{\mathbf{r}}_K, \mathscr{O}(1)[s])$, $\mathbf{r}$ est le polyrayon des coordonnées et $s > 0$ le décalage de la droite. Le modèle a pour corps des fonctions L par l'hypothèse corrigée. Le calcul projectif de la puissance de $c_1(\mathscr{O}(1))$, invariant par décalage, donne le nombre d'intersection 1.

615. Classe d’un élément dans une réduction graduée

Texte visé. § 10.8.1, p. 294, `redgrad.tex`, lignes 2512–2516.

Correction. Pour un élément m du groupe abélien semi-normé M et un réel $r > 0$ tel que $r \geq \|m\|$, noter $\widetilde{m}_r$ la classe de m dans

$$\widetilde{M}^r = \{u \in M : \|u\| \leq r\} \big/ \{u \in M : \|u\| < r\}.$$

L’inégalité permet de prendre la classe dans le quotient de degré r. Cette classe est nulle si $\|m\| < r$.

616. Famille utilisée pour l’indépendance résiduelle

Texte visé. § 10.8.2, p. 294, `redgrad.tex`, lignes 2564–2568.

Correction. Prendre une famille (m_i) dans le A-module semi-normé M, avec $\|m_i\| \neq 0$ pour tout i. Les combinaisons linéaires à coefficients dans A sont alors des éléments de M. L’indépendance résiduelle porte sur les classes homogènes de m_i dans le module gradué $\widetilde{M}$ sur $\widetilde{A}$.

617. Compatibilité de la semi-norme avec les scalaires

Texte visé. §10.8.3, p. 295 (imprimée et PDF), redgrad.tex, lignes 2605–2608.

Supposer que la semi-norme ultramétrique multiplicative de A prolonge la valeur absolue de k, c’est-à-dire que $\|\lambda 1_A\| = |\lambda|$ pour tout $\lambda \in k$. La multiplicativité donne alors $\|\lambda a\| = |\lambda|\|a\|$ et la réduction graduée est munie de l’application scalaire $\widetilde{k} \to \widetilde{A}$.

Pour voir la nécessité de cette compatibilité, prenons $k = A = \mathbb{Q}_p$, avec sa valeur absolue p-adique sur k et la norme triviale sur l’anneau A. Pour $a_1 = 1$ et le terme constant de coefficient p, la formule imprimée comparerait $\|p\| = 1$ à $|p| < 1$. Les réductions de degré un sont

$$\widetilde{k}^1 = \mathbb{F}_p, \qquad \widetilde{A}^1 = \mathbb{Q}_p.$$

Leurs caractéristiques sont distinctes. Il n’existe donc aucune application scalaire graduée unitaire.

Chaque monôme a donc pour norme le produit des normes de ses facteurs. Le critère d’indépendance linéaire résiduelle s’applique aux monômes. Une relation polynomiale homogène est une relation linéaire entre monômes réduits. La formule de réduction garde les termes de norme maximale.

618. Images des variables dans le corps résiduel gradué

Texte visé. Exemple 10.8.4, p. 295.

`redgrad.tex`, lignes 2649–2651.

Correction. L’isomorphisme des réductions polynomiales envoie τ_i sur $\widetilde{T}_i$. Son extension aux corps gradués des fractions conserve ces images. Dans l’isomorphisme $\widetilde{k}(\tau/r) \simeq \widetilde{K}$, lire donc $\tau_i \mapsto \widetilde{T}_i$.

619. Relèvements de la base de transcendance graduée

Texte visé. § 10.8.5, preuve de l'inégalité d'Abhyankar, p. 296.

`redgrad.tex`, lignes 2685–2689.

Correction. Pour chaque j, choisir un élément $b_j \in L^\times$ dont la forme initiale est $\tilde{b}_j = \beta_j$, où (β_j) est la base de transcendance graduée indiquée. Dans une relation polynomiale non triviale entre les b_j, prendre les termes de norme maximale et passer à leurs formes initiales. On obtiendrait une relation polynomiale non nulle entre les β_j. Ainsi, les b_j sont algébriquement indépendants sur k.

620. Indice du maximum dans l'identité de Gauss

Texte visé. § 10.8.5, p. 296.

`redgrad.tex`, lignes 2688–2691.

Correction. Pour une famille $(\lambda_J)_J$ à support fini, écrire

$$\left|\sum_J \lambda_J b^J\right| = \max_J |\lambda_J|\,|b|^J.$$

Le maximum porte sur le même multi-indice J que la somme.

621. Décroissance des coefficients dans l'algèbre de Tate

Texte visé. § 11.1.2, p. 298.

`rappels-ga.tex`, lignes 106–110.

Correction. Dans la définition de $k\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\}$, écrire $|a_\nu| r^\nu \to 0$ lorsque $|\nu| \to \infty$, avec $r^\nu = \prod_i r_i^{\nu_i}$. La valeur absolue est celle de k et la convergence est celle de quantités réelles.

622. Groupe engendré par les rayons choisis

Texte visé. §11.1.4, p. 299 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, ligne 162.

Dans le produit indexé par $j \in J$, lire

$$|k^\times| \prod_{j \in J} r_j^{\mathbf{Z}}.$$

Si la classe de r_i modulo ce sous-groupe était d'ordre infini, on pourrait adjoindre r_i à la famille k-libre choisie. En effet, une relation avec un exposant non nul de r_i contredirait l'ordre infini de sa classe. Une relation avec exposant nul contredirait la k-liberté de la famille initiale. La maximalité de cette famille donne donc la torsion voulue.

623. Cohérence du faisceau structural

Texte visé. §11.1.8, rappels-ga.tex, lignes 282–284, p. 300 (imprimée et PDF).

Le faisceau structural $\mathscr{O}_X$ est cohérent sur le G-site de tout espace analytique X. Sa restriction au site topologique usuel est cohérente lorsque X est bon, c'est-à-dire lorsque tout point possède un voisinage affinoïde.

Pour la correction signalée par Jérôme Poineau dans la preuve du lemme 0.1 de Ducros (2009), lire, dans *Families of Berkovich spaces* [52], §1.3.1, note 1, p. 20 (p. 30 du PDF de l'auteur), à la place du §1.1.1. Les deux preuves partaient d'une surjection. La cohérence exige de traiter le noyau d'un morphisme quelconque $\mathscr{O}_X^n \to \mathscr{O}_X$. Sur un domaine affinoïde, la noethérianité donne un noyau de type fini et la platitude en préserve la description par restriction à un sous-domaine affinoïde. Sur le site usuel d'un espace bon, on utilise des voisinages affinoïdes contenus dans l'ouvert considéré. Note dans le PDF de l'auteur · Note dans arXiv v6

Le mémoire laisse ouverte la cohérence sur le site usuel pour les espaces qui ne sont pas bons (introduction, p. 3).

624. Domaine de départ de l'image réciproque

Texte visé. § 11.1.8, p. 300.

`rappels-ga.tex`, lignes 287–289.

Correction. Pour $f\colon Y \to X$, prendre V domaine analytique de X. Alors $f^{-1}(V)$ est un domaine analytique de Y et le morphisme de sections est $f^*\colon \mathscr{O}_X(V) \to \mathscr{O}_Y(f^{-1}(V))$.

625. Voisinages qui définissent la tige

Texte visé. §11.1.10, p. 301 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, lignes 345–347.

Dans la définition de la tige $\mathscr{O}_{X,x}$, faire parcourir à U les voisinages ouverts de x dans X. On prend ainsi la colimite des $\mathscr{O}_X(U)$ le long des restrictions.

626. Variables de la carte affinoïde

Texte visé. §11.1.11, p. 302 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, ligne 414.

Posons $B_R = k\{T_1/R, \dots, T_m/R\}$, avec une variable pour chacun des générateurs $a_1, \dots, a_m$ fixés plus haut. L'algèbre du domaine V_R est B_R/IB_R, où IB_R est l'idéal fermé engendré par l'image de I dans B_R. Les points du spectre de ce quotient correspondent aux semi-normes sur A telles que $|a_i| \leq R$ pour chaque i. Une borne R strictement supérieure aux valeurs des coordonnées place le point dans l'intérieur de V_R. Les V_R donnent ainsi le G-recouvrement indiqué.

627. Développement de Gauss centré

Texte visé. §11.1.13, p. 303 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, ligne 449.

Rétablir l'exposant i dans le développement du polynôme. La formule de Gauss est

$$\eta_{a,r}\Big(\sum_i a_i(T-a)^i\Big) = \max_i |a_i| r^i.$$

Le rayon est non négatif, conformément à n° 317. Pour $r = 0$, la formule donne la valeur absolue de l'évaluation en a.

628. Image générique d'un point de type IV

Texte visé. §11.1.13, p. 303 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, ligne 515.

Le point x de type IV se trouve au-dessus du point générique de la droite affine algébrique $\mathbf{A}^1_k$. En effet, sa semi-norme est une norme sur $k[T]$. Le morphisme d'analytification envoie x sur le noyau de cette norme, qui est l'idéal premier nul de $k[T]$.

629. Quantification dans le lieu des zéros

Texte visé. §11.2.2, p. 305 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, ligne 630.

Dans la définition de $V(I)$, fixer le point x et faire varier les fonctions f dans l'idéal I. On lit

$$V(I) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \text{ pour tout } f \in I\}.$$

630. Faisceau des fonctions qui s'annulent sur le fermé

Texte visé. §11.2.2, p. 305 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, ligne 649.

Rétablir la variable x et fermer l'accolade. Pour un domaine analytique V, lire

$$\mathscr{J}(V) = \{f \in \mathscr{O}_X(V) \mid f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in Y \cap V\}.$$

631. Références à la réduction et à la localité de Zariski

Texte visé. §11.2.2, p. 305 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, lignes 651 et 669.

Aux deux endroits, lire « Ducros 2009, proposition 4.2 », pp. 1497–1498 de la publication. Ses trois énoncés donnent la G-localité des fermés de Zariski, la cohérence de l'idéal des fonctions qui s'annulent sur un fermé et sa structure réduite. Pour les ouverts, on passe aux complémentaires. La remarque 4.3 précise le point de vue G-local.

632. Référence aux composantes après extension

Texte visé. §11.2.5, p. 308 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, lignes 806–807.

Lire « Ducros 2009, lemme 4.25 et théorème 7.16(i)–(iii) ». Le lemme donne la comparaison des dimensions. Les trois parties du théorème, pp. 1545–1546 de la publication, décrivent les familles finies de composantes après extension et les projections sur les composantes de départ.

633. Point choisi dans l'extension des scalaires

Texte visé. §11.3.1, p. 309 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, lignes 899–906.

Une fois défini le morphisme $\pi\colon X_L \to X$, fixer un point $x \in X$ et un point quelconque $y \in X_L$ d'image x. Supprimer la répétition de « si ». La comparaison des propriétés porte sur ces deux points, avec l'hypothèse de séparabilité analytique dans les cas où le texte la demande.

634. Composition et intérieurs relatifs

Texte visé. Formule 11.4.1.1, p. 310.

`rappels-ga.tex`, lignes 956–961.

Correction. Pour $g\colon Z \to Y$ et $f\colon Y \to X$, écrire

$$\mathrm{Int}(Z/Y) \cap g^{-1}\big(\mathrm{Int}(Y/X)\big) \subseteq \mathrm{Int}(Z/X).$$

L'image réciproque est celle de l'intérieur relatif dans Y.

635. Formule de composition sous séparation locale

Texte visé. Formule (11.4.1.2), p. 310.

`rappels-ga.tex`, lignes 962–968.

Correction. Pour $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ et f localement séparé, lire dans (11.4.1.2)

$$\mathrm{Int}(Z/Y) \cap g^{-1}\big(\mathrm{Int}(Y/X)\big) = \mathrm{Int}(Z/X).$$

L'image réciproque porte sur l'intérieur relatif $\mathrm{Int}(Y/X)$, qui est une partie de Y.

636. Composition des morphismes sans bord

Texte visé. §11.4.1, p. 310 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, ligne 987.

Citer l'inclusion (11.4.1.1), dans la forme corrigée par n° 634. Si $Z \to Y$ et $Y \to X$ sont sans bord, les deux ensembles dont on prend l'intersection dans le membre de gauche valent Z. L'inclusion donne donc $\mathrm{Int}(Z/X) = Z$.

637. Rayon du disque fermé

Texte visé. §11.4.2, p. 310 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, ligne 994.

Lire « Soit $r > 0$ un nombre réel ». Le disque fermé et son domaine extérieur utilisent le même rayon r.

638. Sens du morphisme entre les algèbres de Banach

Texte visé. § 11.4.4, note, p. 311.

`rappels-ga.tex`, lignes 1057–1066.

Correction. Dans la note, pour k trivialement valué et $0 < r < s < 1$, la bijection bornée est

$$k\{T/s\} \longrightarrow k\{T/r\}.$$

Les deux anneaux sont $k[[T]]$, donc $k\{T/r\}$ est un module algébrique libre de rang un sur $k\{T/s\}$. En revanche, le rapport des normes de T^N est $(r/s)^N$ et tend vers zéro. La norme de $k\{T/r\}$ ne peut être équivalente à la norme quotient d'un module fini sur $k\{T/s\}$. Ainsi $k\{T/r\}$ n'est pas une $k\{T/s\}$-algèbre de Banach finie.

639. Référence au critère des morphismes finis

Texte visé. §11.4.4, p. 311 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, ligne 1076.

Lire « Berkovich 1993, lemme 1.3.7 », pp. 27–28 de la publication. Le G-recouvrement du but par des domaines affinoïdes fournit la condition de voisinage fini employée dans la démonstration.

640. Référence pour le lieu quasi-lisse de dimension fixée

Texte visé. §11.4.8, p. 313, `rappels-ga.tex`, ligne 1184.

Correction. Dans Ducros, *Families of Berkovich spaces*, citer le lieu $E'_{\infty,d}$ du théorème 10.7.2, pp. 218–219. La preuve est au §10.7.2.9, p. 224. Ces passages occupent les pages physiques 228–229 et 234 dans les deux éditions intégrales de l'auteur vérifiées. Le lieu est l'intersection

du lieu plat et du lieu de quasi-lissité dans la fibre en dimension locale d. Son ouverture ordinaire et sa constructibilité locale donnent l'ouverture de Zariski. Le corollaire 5.3.2 fournit séparément le rang du faisceau des différentielles sur ce lieu.

641. Égalité des intérieurs dans le lemme de voisinage

Texte visé. §11.4.10, p. 313 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, ligne 1219.

Citer l'égalité relative (11.4.1.2), corrigée par n° 635. Muni de sa structure analytique fermée réduite, Y se factorise par V. L'inclusion $V \to X$ est un monomorphisme séparé et l'immersion fermée $Y \to X$ est sans bord. L'égalité relative place donc Y dans $\mathrm{Int}(V/X) = \mathrm{Int}_X(V)$. Cela donne le résultat pour tout domaine analytique V.

642. Référence au résultat de localité sur le but

Texte visé. §11.4.12, p. 314 (imprimée et PDF), rappels-ga.tex, ligne 1248.

Lire « proposition 3.2.3 », pp. 58–59 de Berkovich 1993. Cette proposition traite de la platitude d'un morphisme fini. Les références adjacentes donnent séparément les propriétés de finitude et la G-localité de la condition de bord.

643. Translation du point de la cible

Texte visé. Preuve du lemme 11.5.2, p. 314.

`rappels-ga.tex`, lignes 1286–1294.

Correction. Après avoir rendu $x = f(y)$ rationnel, composer avec la translation par $-x$ dans la cible $\mathbb{A}^d_k$. À la ligne 1289, lire $x = 0$ après cette translation. Les composantes $f_1, \dots, f_d$ ainsi translatées donnent la fibre $\mathscr{M}(\mathscr{B}/(f_1, \dots, f_d))$.

644. Stabilité après complétion de Gauss

Texte visé. Lemme 11.5.4(c), démonstration, p. 315.

`rappels-ga.tex`, lignes 1355–1357.

Correction. Pour un corps complet stable F de valuation non triviale, la complétion de Gauss à un rayon r est de type 2 si r est de torsion modulo $|F^\times|$, et de type 3 sinon. Dans le premier cas, une puissance normalisée de la coordonnée fournit un résidu transcendant. Dans le second, le rang rationnel relatif du groupe des valeurs est un et le degré de transcendance résiduel ordinaire est nul. Le corollaire 6.3.6 de Temkin donne la stabilité dans ces deux cas.

Si F est trivialement valué, la complétion est $F(T)$ trivialement valué pour $r = 1$, et un corps complet discret de séries de Laurent en T ou T^{-1} pour $r < 1$ ou $r > 1$. Le premier cas est sans défaut. Dans le cas discret, l'équivalence des normes en dimension finie encadre l'anneau de valuation d'une extension finie entre deux réseaux pleins. Il est donc fini libre de rang le degré de l'extension. La filtration modulo l'uniformisante du corps de base, par les puissances de celle du corps étendu, donne pour ce même rang le produit de l'indice de ramification et du degré résiduel. Le défaut vaut un.

Itérer les complétions à une variable, puis utiliser la stabilité des extensions finies, qui suit par multiplicativité des trois indices dans les tours. Cela donne la stabilité de $\mathscr{H}(x)$.

645. Base de voisinages affinoïdes irréductibles

Texte visé. Lemme 11.5.7, p. 316.

`rappels-ga.tex`, lignes 1393–1406.

Correction. Dans la deuxième phrase de l'énoncé, lire « domaines affinoïdes irréductibles ». Si x admet un voisinage affinoïde, on peut choisir un tel voisinage à l'intérieur d'un voisinage prescrit et du lieu normal de X_{red}. Sa composante connexe contenant x est encore affinoïde, et elle est irréductible car sa réduction est normale et connexe.

646. Degré de la branche finie plate

Texte visé. Lemme 11.6.4, démonstration, p. 317.

`rappels-ga.tex`, lignes 1544–1552.

Correction. Noter $f_V : V \to U$ la branche finie plate autour de y fournie par la preuve. L'image par f_V de $V \setminus \mathrm{Int}_Y(V)$ est fermée dans U et évite $x = f(y)$, car la fibre de la branche en x est $\{y\}$. Restreindre la branche au-dessus d'un voisinage de x disjoint de cette image. Les degrés locaux des points de la branche sont alors ceux de f, puisque ces points sont intérieurs à V. Pour η dans cette branche et $\xi = f(\eta)$, le rang fini plat donne

$$\deg^{y}(f) = \deg_{\xi}(f_V) = \sum_{\zeta \in f^{-1}(\xi) \cap V} \deg^{\zeta}(f).$$

Les termes sont positifs. En particulier $\deg^{\eta}(f) \leq \deg^{y}(f)$ près de y.

647. Point où se calcule la dimension relative

Texte visé. Lemme 11.6.5(a) et preuve de (b), p. 318.

`rappels-ga.tex`, lignes 1556–1587.

Correction. Dans (a), écrire « si f est de dimension relative nulle en y ». Le critère de finitude locale s'applique au point y de la source, dans $\mathrm{Int}(Y/X)$. Au début de la preuve de (b), poser $x = f(y)$ avant d'écrire la fibre $f^{-1}(x)$.

648. Anneau de départ de l'évaluation graduée

Texte visé. §11.7.1, p. 319.

`rappels-ga.tex`, lignes 1678–1685.

Correction. Pour un idéal premier homogène ξ de $\widetilde{A}$, l'évaluation $a \mapsto a(\xi)$ est la composée

$$\widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{A}/\xi \longrightarrow \mathrm{Frac}_{\mathrm{gr}}(\widetilde{A}/\xi) = \kappa(\xi).$$

La deuxième flèche localise aux éléments homogènes non nuls. Elle est injective, donc un élément homogène a une valeur non nulle en ξ exactement quand ξ appartient à son ouvert de base.

649. Point du germe dans la remarque 11.7.4

Texte visé. Remarque 11.7.4, p. 321.

`rappels-ga.tex`, lignes 1804–1807.

Correction. Écrire $\widetilde{(Y,x)}$ dans le membre gauche de l'inclusion et comme ouvert sur lequel la section est définie. Le domaine analytique du germe (X,x) introduit dans la remarque est (Y,x). L'inversibilité de la section requiert en outre l'hypothèse de n° 325.

650. Renvois sur les réductions affines et strictes

Texte visé. §§ 11.7.5–11.7.7 et lemme 11.8.3, pp. 321–323.

`rappels-ga.tex`, lignes 1811–1936.

Correction. Attribuer au § 11.7.5 l'étiquette unique `ss-redgerm-strictement-affinoide` et au § 11.7.6 l'étiquette `ss-redgerm-affine-strict`. À la ligne 1825, renvoyer au § 11.7.5, qui établit l'implication utilisée. Aux lignes 1842, 1850 et 1936, renvoyer au § 11.7.6.

Dans le texte imprimé, le premier renvoi pointe vers le paragraphe qui le contient, § 11.7.6. Les trois autres destinations imprimées sont celles qu'il faut conserver après attribution des deux étiquettes.

651. Domaine défini par toutes les inégalités

Texte visé. § 11.8.6, p. 324.

`rappels-ga.tex`, lignes 2007–2009.

Correction. Après avoir défini $V_i = \{|f_i| \leq 1\}$, poser $V = \bigcap_i V_i$. Le membre droit de la formule impose simultanément les conditions valuatives sur tous les résidus des f_i. La correspondance de réduction commute avec cette intersection finie, ce qui donne la formule pour V.

652. Anneau de la fibre spéciale

Texte visé. § 11.9.1 et preuve du lemme 11.9.2, p. 325.

`rappels-ga.tex`, lignes 2070–2079, 2147–2155.

Correction. L'algèbre formelle A est une k°-algèbre. Écrire l'anneau de la fibre spéciale sous la forme

$$A \otimes_{k^\circ} \tilde{k}^{\,1}$$

aux six occurrences des lignes 2072, 2079, 2148, 2149, 2152 et 2154. C'est l'anneau obtenu par changement de base du modèle formel au corps résiduel et celui dont sont issus les morphismes utilisés dans la spécialisation. Par exemple, pour $k = \mathbb{Q}_p$ et $A = \mathbb{Z}_p$, la multiplication par p n'est pas inversible sur A, si bien que A n'a pas la structure compatible de k-algèbre nécessaire au produit tensoriel imprimé.

653. Degré un dans le critère d'intériorité

Texte visé. Lemme 11.9.2(d), démonstration, p. 326.

`rappels-ga.tex`, lignes 2176–2181.

Correction. Comparer la réduction de degré un du germe à l'espace des valuations de degré un.

$$\widetilde{(\mathfrak{X}_\eta, x)}^{\,1} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(x)}^{\,1}/\tilde{k}^1}.$$

Dans cette fibre générique séparée stricte, la réduction graduée du germe est l'image réciproque de sa réduction de degré un par la restriction surjective des valuations. L'égalité ci-dessus équivaut donc à la plénitude de la réduction graduée, soit à l'intériorité de x. Le

point (b) décrit le membre de gauche par les valuations centrées sur V, et le critère valuatif donne l'équivalence avec la propreté de V.

654. Référence pour les fibres qui décrivent le bord

Texte visé. Exemple 11.10.2, p. 326.

`rappels-ga.tex`, lignes 2205–2209.

Correction. Utiliser le **lemme 3.1** de Ducros, avec tous les rayons réels strictement positifs autorisés. Pour un affinoïde X de dimension $n > 0$, il écrit ∂X comme une réunion finie de fibres $f_i^{-1}(\eta_{r_i})$, où $f_i : X \to \mathbf{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ est analytique. Le rang résiduel de la coordonnée gaussienne donne la borne $n-1$ pour la dimension de chaque fibre sur $\mathscr{H}(\eta_{r_i})$. Pour un domaine analytique compact W, utiliser les restrictions de ces fonctions à W dans la définition 11.10.1. En dimension zéro, le bord est vide. Le théorème 3.2 porte sur l'image tropicale du bord.

655. Coordonnées multiplicatives de la section de Gauss

Texte visé. § 12.1.5 et preuve du lemme 12.1.11, pp. 330, 333.

`squelettes.tex`, lignes 115–118.

Correction. Écrire $r = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ pour les rayons utilisés dans η_r et dans les monômes r^I. Dans le test de continuité du lemme, aux lignes 349–350, les couples (r, x) appartiennent donc à $(\mathbb{R}_{>0})^n \times X$. Le maximum d'un nombre fini de termes $|a_I(x)|r^I$ y est continu. En coordonnées logarithmiques $s = \log r$, la section s'écrit $\eta_{\exp(s)}$ et les facteurs r^I deviennent $\exp(\langle I, s\rangle)$.

656. Rayons utilisés dans la comparaison au point de Gauss

Texte visé. Preuve du lemme 12.1.6(a), p. 331.

`squelettes.tex`, lignes 160–166.

Correction. Pour x dans le tore, poser $r_i = |T_i(x)|$ pour chaque i. L'inégalité ultramétrique borne la norme en x d'une somme de Laurent par $\max_I |a_I|r^I$, sa norme en η_r. Ainsi $x \leq \eta_r$ dans l'ordre de la preuve, et un point maximal x est égal à η_r.

657. Point initial et relèvement dans le tore étendu

Texte visé. Corollaire 12.1.8(b), démonstration, p. 332.

`squelettes.tex`, lignes 248–252.

Correction. Poser $x = \eta_{k,r}$ et prendre un antécédent arbitraire y de x dans $(\mathbf{G}_{m,K}^n)^{\mathrm{an}}$. On a $|T_i(y)| = |T_i(x)| = r_i$. L'application isométrique des corps résiduels complétés envoie les formes initiales en x sur celles en y. Elles sont algébriquement indépendantes sur $\widetilde{k}$ et le restent sur l'extension graduée algébrique $\widetilde{K}$. Le critère de Gauss donne donc $y = \eta_{K,r}$.

658. Référence pour l'indépendance des coordonnées du tore

Texte visé. §12.1.9, p. 332.

`squelettes.tex`, lignes 284–289.

Correction. Dans le premier paragraphe, citer le **corollaire 12.1.7**. Si f et g sont deux identifications du tore déployé avec T, la transition $f^{-1} \circ g$ est un automorphisme fini plat de degré un. Le corollaire 12.1.7 montre qu'il préserve le squelette standard S, d'où $f(S) = g(S)$. Le renvoi suivant au corollaire 12.1.8 concerne le changement de corps.

659. Portée du corollaire 6.2.2 de Berkovich

Texte visé. Comparaison historique après le théorème 12.2.4, p. 335.

`squelettes.tex`, lignes 558–563.

Correction. Attribuer à Berkovich le cas où la source compacte est strictement analytique et quasi-algébrique au sens de cet article. Chaque point possède un voisinage qui est une réunion finie de domaines strictement affinoïdes, chacun isomorphe à un domaine affinoïde de l'analytification d'un schéma de type fini. Le corollaire 6.2.2 applique cette hypothèse à des fonctions analytiques inversibles globales et donne la polyédralité de l'image, de dimension au plus celle de la source. La correction n° 47 porte sur la dimension dans l'énoncé général de CLD.

660. Dimension du tore cible et rang des formes initiales

Texte visé. Proposition 12.2.8, pp. 335–336.

`squelettes.tex`, lignes 615–642.

Correction. Écrire au début « Soit $f : X \to T$ un moment et notons $n = \dim T$ ». Garder d pour le degré de transcendance gradué du sous-corps engendré sur $\tilde{k}$ par les formes initiales des coordonnées du moment en x. On a $d \leq n$. L'égalité $d = n$ signifie que ces n formes initiales sont indépendantes, ce qui est le critère $f(x) \in S(T)$. C'est ce n qui intervient dans (iii) et (iv).

661. Point de base du germe d'image tropicale

Texte visé. Remarque 12.2.9, p. 336.

`squelettes.tex`, lignes 654–660.

Correction. Le point de base de l'image est $\xi = f_{\mathrm{trop}}(x)$. Pour le voisinage compact V pris dans le cadre de la proposition 12.2.8, le germe considéré est $(f_{\mathrm{trop}}(V), \xi)$ dans l'espace tropical cible.

662. Catégorie des groupes de valeurs et foncteur sous-jacent

Texte visé. Remarque 12.2.9, p. 336, `squelettes.tex`, lignes 668–670.

Correction. Écrire $D \subseteq \Gamma_{\{1\}}^{n}$, où $\Gamma_{\{1\}}$ est le foncteur ensemble sous-jacent. Pour tout groupe H objet de $\mathsf{D}_{\{1\}}$ et tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in H^n$, on teste $h \in D(H)$. Dans la condition équivalente, la valuation du germe réduit prend ses valeurs dans une extension H' objet de D_H et les valeurs prescrites sont les h_i. Ainsi $D(H) \subseteq H^n$. Les inégalités monomiales à exposants rationnels demeurent sans paramètres et définissent le même cône rationnel sur $\mathbf{R}_{>0}$.

663. Implication de dimension maximale vers le squelette

Texte visé. Lemme 12.2.13, démonstration, p. 337.

`squelettes.tex`, lignes 775–785.

Correction. Appliquer la proposition **12.2.8(iv)** au moment sur $W = f_{\mathrm{trop}}^{-1}(C)$. Puisque l'image de W est C de dimension $n = \dim T$, choisir un point dont l'image tropicale locale a dimension n. La dimension locale s'entend sur le germe stabilisé, suivant n° 48. L'implication directe de (iv) place l'image du point dans $S(T)$, y compris si le point est au bord de W.

664. Image ouverte du germe dans l'espace des valuations

Texte visé. Proposition 12.2.14, p. 338, `squelettes.tex`, lignes 826–828.

Obstruction. Collons deux exemplaires de la couronne fermée de rayons $[1/2, 2]$ le long de la couronne fermée de rayons $[1, 2]$ et marquons le point de Gauss commun de rayon un. Dans chacune des deux cartes le point est intérieur. Dans la réduction du germe commun à leur intersection, la condition est $w(\widetilde{T}) \geq 1$. Pour une valuation T-adique où $w(\widetilde{T}) < 1$, les deux relevés restent distincts. La réduction du germe peut donc avoir plusieurs points au-dessus d'une même valuation relative.

Correction. Employer l'image de la réduction de (Y, y) dans l'espace des valuations graduées relatives. Les applications de cartes donnent un homéomorphisme local et une image ouverte. Un recouvrement poncté fini par des cartes affinoïdes donne la quasi-compacité de l'image. Recouvrons-la par un nombre fini d'ouverts de base relatifs et prenons la réunion $\mathscr{V}$ des ouverts de base absolus correspondants. Sa trace relative est exactement l'image voulue. Les égalités de valeurs utilisées ensuite se tirent en arrière à la réduction effective du germe. Deux relevés de la même valuation satisfont les mêmes égalités.

665. Quantification du point de départ

Texte visé. Énoncé de la proposition 12.3.1, p. 339.

`squelettes.tex`, lignes 918–925.

Correction. Pour tout $x \in X$, il existe $y \in X$ tel que $d_k(y) = n$ et $f_{\mathrm{trop}}(X, y) = f_{\mathrm{trop}}(X, x)$. Les hypothèses sur le bon espace X de dimension pure n et sur le moment f sont celles de l'énoncé.

666. Base du degré de transcendance gradué

Texte visé. Preuve de la proposition 12.3.1, p. 339.

`squelettes.tex`, lignes 928–943.

Correction. Le corps gradué F est engendré sur $\tilde{k}$ par les $\widetilde{f_i(x)}$ dans $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$. Après renumérotation, prendre $\widetilde{f_1(x)}, \dots, \widetilde{f_\delta(x)}$ comme base de transcendance graduée de F sur $\tilde{k}$.

667. Fibre du point d'Abhyankar choisi

Texte visé. Preuve de la proposition 12.3.1, p. 340.

`squelettes.tex`, lignes 969–983.

Correction. Le moment $g = (f_1, \dots, f_\delta)$ envoie x sur le point de Gauss η_r de $\mathbb{A}_k^\delta$. L'ouvert U contenant x rencontre donc $g^{-1}(\eta_r)$. Choisir y d'Abhyankar de rang maximal dans $U \cap g^{-1}(\eta_r)$, relativement à $\mathscr{H}(\eta_r)$.

668. Espace ambiant dans l'égalité de dimensions

Texte visé. Preuve de la proposition 12.3.1, p. 340.

`squelettes.tex`, lignes 982–989.

Correction. L'équidimensionnalité de l'espace analytique donne $n = \dim_y X$. La platitude de g sur la fibre considérée donne $\dim_y X = \dim_y g^{-1}(\eta_r) + \delta$. Avec le rang relatif du point y, l'égalité suivante s'écrit $n = d_{\mathscr{H}(\eta_r)}(y) + d_k(\eta_r) = d_k(y)$.

669. Déduction de l'égalité avec l'image du bord

Texte visé. Proposition 12.3.4(c), attribution, p. 341.

`squelettes.tex`, lignes 1152–1154.

Correction. Dans le cadre commun d'un espace strictement affinoïde de dimension pure n sur un corps complet non trivialement valué et d'une tropicalisation lisse, appliquer le théorème 6.6 de Gubler et Rabinoff avec la borne de 12.3.4(a). En effet, si $r > 0$, l'image totale a dimension au plus $n-r$. Si le complémentaire de l'image du bord était non vide dans cette image, le théorème 6.6 lui donnerait la dimension pure n, d'où une contradiction. Cela donne $f_{\mathrm{trop}}(X) = f_{\mathrm{trop}}(\partial X)$ sous ces hypothèses. La preuve de 12.3.4 garde sa portée propre. Théorème 6.6

670. Corollaire de Raynaud sur l'image d'un morphisme plat

Texte visé. Proposition 12.3.5, p. 343, `squelettes.tex`, ligne 1325.

Correction. Citer le corollaire 5.11 de Bosch et Lütkebohmert, *Formal and rigid geometry. II. Flattening techniques*, pp. 428–429, correspondant aux pages physiques 433–434 du fac-similé de Göttingen. Dans le cadre rigide, ce corollaire donne l'image d'un morphisme plat entre espaces rigides quasi-compacts comme réunion finie de sous-variétés affinoïdes ouvertes. C'est le résultat de Raynaud employé pour le cas strictement analytique compact, via la comparaison avec les espaces rigides associés. Le résultat analytique général de la même phrase est le théorème 9.2.1 de Ducros.

671. Moment scalaire dans la définition d'une fonction affine

Texte visé. §12.4.6, p. 346.

`squelettes.tex`, lignes 1513–1524.

Correction. Dans la formule locale $u = a f_{\mathrm{trop}} + c$, prendre un moment $f : U \to \mathbf{G}_m^{\mathrm{an}}$, $a \in \mathbb{Q}$ et $c \in \mathbb{R}$. Le logarithme choisi donne $f_{\mathrm{trop}} = \log|f|$. Pour une fonctionnelle rationnelle sur les coordonnées d'un moment de rang supérieur, chasser les dénominateurs puis regrouper les exposants entiers dans un seul caractère de Laurent. On retrouve la formule scalaire, avec le facteur rationnel correspondant.

672. Comparaison locale des deux unités

Texte visé. Preuve du lemme 12.5.3, p. 347.

`squelettes.tex`, lignes 1626–1643.

Correction. Écrire $f = \log|f_i|$ sur V_i et $g = \log|g_j|$ sur W_j. Dans $V_i \cap W_j$, poser

$$V_{ij}^{-} = \{|f_i| \le |g_j|\}, \qquad V_{ij}^{+} = \{|g_j| \le |f_i|\}.$$

Ces domaines stricts donnent le recouvrement voulu. Sur V_{ij}^{-}, le maximum vaut $\log|g_j|$ et le minimum $\log|f_i|$. Sur V_{ij}^{+}, le maximum vaut $\log|f_i|$ et le minimum $\log|g_j|$.

673. Obstruction de norme pour toutes les puissances

Texte visé. Remarque 12.5.5, p. 348.

`squelettes.tex`, lignes 1698–1741.

Correction. Fixer un entier arbitraire $m \geq 1$. Si une unité f avait la norme constante r^m près de $x = \eta_{r,r}$, alors $g = f/T_1^m$ serait de norme un sur la face $|T_1| = r$. La réduction de degré un de g et de son inverse dans le disque affinoïde sur k_r donne un élément inversible de $\tilde{k}^1[\tau]$, donc une constante non nulle. On utilise ici $\widetilde{k_r^{\times}}^1 = \tilde{k}^1$, puisque r a un ordre infini modulo le groupe des valeurs.

Relever la constante en $a \in k^{\times}$ de norme un. L'inégalité $|f - aT_1^m| < r^m$ vaut en x, donc dans un voisinage ordinaire de x dans la réunion. Sur la face $|T_2| = r$, un tel voisinage contient des points où $|T_1| < r$. L'inégalité ultramétrique y donne $|f| < r^m$, une contradiction pour chaque exposant m.

674. Moment et projections dans la réunion des polyèdres

Texte visé. Énoncé de la proposition 12.6.3, p. 351.

`squelettes.tex`, lignes 2062–2083.

Correction. Sur l'espace X de niveau n, fixer un moment $f : X \to \mathbb{G}_m^m$. Pour chaque partie $I \subset \{1, \dots, m\}$ de cardinal n, noter $q_I : \mathbb{G}_m^m \to \mathbb{G}_m^I$ la projection sur les coordonnées d'indices I. Alors

$$\Sigma_f = \bigcup_{|I|=n} (q_I \circ f)^{-1}(S(\mathbb{G}_m^I)).$$

Le rang gradué n est détecté par n formes initiales algébriquement indépendantes parmi les coordonnées.

675. Relèvement des coefficients avant l'évaluation analytique

Texte visé. Preuve de la proposition 12.6.5, p. 352.

`squelettes.tex`, lignes 2127–2178.

Correction. Écrire $\bar{c}_d$ pour les coefficients monomiaux gradués, et choisir des monômes C_d sur k ayant ces formes initiales. Évaluer ensuite les termes analytiques $C_d(g_1, \dots, g_{m-1})g_m^d$. En x, ils ont même norme et la relation homogène annule la somme de leurs formes initiales. La norme de la somme est donc strictement inférieure au maximum des normes des termes. Cette inégalité persiste sur un ouvert W.

En chaque $y \in W$, réduire les termes de norme maximale. Leurs formes initiales ont une somme nulle, ce qui donne un polynôme non nul en l'initiale de $g_m(y)$, car les puissances d sont distinctes et les coefficients monomiaux sélectionnés sont non nuls. L'initiale de $g_m(y)$ est donc algébrique sur le corps gradué engendré par les précédentes. Le critère par les degrés de transcendance donne l'égalité des polyèdres caractéristiques utilisée dans la récurrence.

676. Projections de coordonnées pour les polyèdres caractéristiques

Texte visé. Proposition 12.6.7, démonstration, p. 353.

`squelettes.tex`, lignes 2220–2249.

Correction. Après réduction G-locale à une famille finie, remplacer chaque moment f_i dans les coordonnées de son tore par les moments $q_I \circ f_i$ pour $|I| = n$. Le domaine de chacun reste X_i. D'après la proposition 12.6.3, leur réunion de polyèdres caractéristiques est celle du moment initial. Une cible de dimension inférieure à n donne une contribution vide.

Effectuer sur cette nouvelle famille l'approximation des unités et la concaténation de la preuve. Le lemme 12.6.6 s'applique à chaque moment de rang n. Le moment concaténé peut avoir un rang plus grand, traité par la proposition 12.6.5. Les pièces obtenues sont ainsi paralinéaires dans le même polyèdre caractéristique et leur réunion donne la conclusion.

677. Niveau fixé dans les tests après changement de corps

Texte visé. Proposition 12.7.2, démonstration, p. 354.

`squelettes.tex`, lignes 2307–2321.

Correction. Conserver le niveau n assigné à la source et tester les sous-familles de n coordonnées selon la proposition 12.6.3. Si y est au-dessus de x, la flèche isométrique des corps résiduels complétés identifie les formes initiales en x à leurs images en y. Une même sous-famille est indépendante sur $\widetilde{k}$ si et seulement si elle l'est sur son extension algébrique $\widetilde{L}$. Les ensembles caractéristiques se correspondent donc, y compris lorsqu'ils sont vides parce que la dimension analytique est inférieure au niveau.

678. Éléments testant l'ordre du spectre de Banach

Texte visé. § 12.7.3, p. 354.

`squelettes.tex`, lignes 2323–2332.

Correction. Pour $x, y \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$, écrire $x \preceq y$ si $|f(x)| \leq |f(y)|$ pour tout $f \in \mathscr{A}$. Un plus grand élément x domine tout y pour tous ces mêmes f. Si la norme de $\mathscr{A}$ est multiplicative, elle définit ce plus grand élément.

679. Algèbre de la fibre au-dessus du point source

Texte visé. Preuve du lemme 12.7.4, pp. 354–355.

`squelettes.tex`, lignes 2348–2377.

Correction. Pour $t = f(x)$ et $s = f_L(y)$, poser

$$\mathscr{A} = \mathscr{O}(q^{-1}(t)) = \mathscr{H}(t)\widehat{\otimes}_k L, \qquad \mathscr{B} = \mathscr{O}(p^{-1}(x)) = \mathscr{H}(x)\widehat{\otimes}_k L.$$

La dimension nulle de la fibre analytique donne la finitude de $\mathscr{H}(x)/\mathscr{H}(t)$ et celle de $\mathscr{B}$ sur $\mathscr{A}$. Le changement de base ultérieur au point s est pris dans la cible de la flèche de ces fibres.

680. Point intermédiaire dans la comparaison des dimensions

Texte visé. Preuve de la proposition 12.7.7, p. 356.

`squelettes.tex`, lignes 2449–2481.

Correction. La première immersion par morceaux a pour cible Σ_f. Dans le diagramme sur $M = LF$, projeter $z \in \Sigma_{f_M}$ sur $t \in \Sigma_{f_F}$. La stabilisation sur F et le quotient galoisien donnent

$$\dim_z \Sigma_{f_M} = \dim_t \Sigma_{f_F} = \dim_x \Sigma_f.$$

Les deux immersions par morceaux, via $y \in \Sigma_{f_L}$, encadrent sa dimension locale entre ces valeurs égales.

681. Nombre de composantes du premier moment représentant

Texte visé. Preuve du lemme 12.9.2, p. 358.

`squelettes.tex`, lignes 2815–2834.

Correction. Pour $g : X \to \mathbb{R}^m$, les m composantes se représentent sur W_j après avoir chassé leurs dénominateurs rationnels. Prendre un moment $f_j : W_j \to \mathbb{G}_m^m$ et $a_j \in \mathbb{R}^m$, de sorte que $d_j g|_{W_j} = f_{j,\mathrm{trop}} + a_j$ pour un entier $d_j \neq 0$. Les moments h_i obtenus ensuite par projection ont n composantes.

682. Axiome de réunion finie des squelettes élémentaires

Texte visé. Théorème 12.9.4, p. 359.

`squelettes.tex`, lignes 2865–2881.

Correction. Pour le troisième axiome actif de §5.1.2, appliquer la proposition 12.6.7. Les squelettes élémentaires proviennent d'un nombre fini de moments à $\mathbf{G}_m^n$ sur des domaines analytiques fermés. La proposition donne un G-recouvrement poncté et, sur ses membres, des porteurs élémentaires communs définis par des moments à $\mathbf{G}_m^n$ et contenant la réunion des traces. Le lemme 12.6.6 donne la structure paralinéaire de chaque squelette séparément.

Le paragraphe qui suit vérifie la condition distincte de vertébration de §5.2.2, en recouvrant le lieu de variation maximale de la carte. Dans ce paragraphe, employer les notations corrigées suivant n° 683, avec g et $\Sigma_g^{(n)}$.

683. Carte intervenant dans l'axiome squelettique

Texte visé. Preuve du théorème 12.9.4(d), p. 359.

`squelettes.tex`, lignes 2882–2902.

Correction. Pour la carte G-tropicale réelle (V, g), l'axiome se vérifie sur $\Sigma_g^{(n)} \cap W_j$. Sur le domaine W_j, écrire $d_j g|_{W_j} = f_{j,\mathrm{trop}} + a_j$, avec $d_j \neq 0$. Le lemme 12.9.2 et la proposition 12.6.7 appliqués aux moments f_j donnent le recouvrement local par les parties squelettiques élémentaires.

684. Relèvement du recouvrement squelettique à travers les nilpotents

Texte visé. Preuve de la proposition 12.9.7, p. 360.

`squelettes.tex`, lignes 3023–3035.

Correction. Partir du G-recouvrement pointé de la partie squelettique dans X_{red}. Dans les cartes affinoïdes, raffiner localement ses domaines par des domaines rationnels. Pour chaque tel domaine V_i du réduit, relever les numérateurs et le dénominateur de sa présentation à l'algèbre de X. La relation de Bézout se relève en une relation égale à 1 modulo l'idéal nilpotent,

donc à une unité. La localisation rationnelle commute à la réduction. Le domaine relevé W_i appartient à X, avec $(W_i)_{\mathrm{red}} = V_i$.

Les unités du moment se relèvent aussi modulo l'idéal nilpotent. Elles ont les mêmes normes aux points sous-jacents, donc les mêmes supports caractéristiques et les mêmes traces paralinéaires fermées. On conserve ainsi le recouvrement pointé initial.

685. Espaces du produit fibré squelettique

Texte visé. Preuve du théorème 12.9.11, p. 362.

`squelettes.tex`, lignes 3173–3182.

Correction. Pour le moment $f : V \to T$ et sous l'hypothèse $\Sigma_f \subseteq \Sigma$, écrire

$$\Sigma_L \times_\Sigma \Sigma_f = \Sigma_{f_L}.$$

Si deux moments f et g conviennent à un même point x, l'étape suivante compare les fibres de Σ_{f_L} et Σ_{g_L} au-dessus de x.

686. Dimension de la fibre au-dessus du point de Gauss

Texte visé. Lemme 12.9.13, p. 363.

`squelettes.tex`, lignes 3231–3245.

Correction. Dans la preuve, écrire $\dim f^{-1}(\eta_r) \leq n - d$. Pour x dans la fibre, le calcul qui précède donne $d_{\mathscr{H}(\eta_r)}(x) = d_k(x) - d \leq n - d$. C'est le niveau annoncé pour la fibre et la borne portée par l'énoncé.

Pour $X = (\mathbf{G}_m^3)^{\mathrm{an}}$, son squelette standard et f la première coordonnée vers $\mathbf{A}^1$, on a $n = 3, d = 1$. La fibre au-dessus de η_r est un tore analytique de dimension 2 sur $\mathscr{H}(\eta_r)$, et la borne $d = 1$ de la preuve imprimée est fausse.

687. Image d'un ouvert par tropicalisation graduée

Texte visé. §12.10.3, p. 365.

`squelettes.tex`, lignes 3448–3460.

Correction. Pour l'ouvert quasi-compact $\mathscr{U}$, prendre un cône rationnel $C \subseteq \Gamma^n$. Pour chaque $H \in \mathsf{D}$ et $h = (h_1, \dots, h_n) \in H^n$, la condition $h \in C(H)$ équivaut à l'existence d'une extension ordonnée $H' \in \mathsf{D}_H$ et d'une valuation w à valeurs dans H', représentant un point de $\mathscr{U}$, telle que $w(f_i) = h_i$ pour tous les $i = 1, \dots, n$. La même valuation réalise simultanément les n valeurs. Ce cône est $f_{\mathrm{trop}}(\mathscr{U})$.

688. Coordonnées d'un point du cône exceptionnel

Texte visé. Lemme 12.10.4, démonstration, p. 366.

`squelettes.tex`, lignes 3492–3498.

Correction. Pour $H \in \mathsf{D}$, écrire $h = (h_1, \dots, h_n) \in E(H)$, où $E = \tau_{\mathrm{trop}}(\mathscr{U}) \setminus D$ est un sous-foncteur de Γ^n. Une valuation de $\mathscr{U}$ réalisant h et la valuation de Gauss η_h sont ainsi comparées sur le même n-uplet. Les égalités monomiales exceptionnelles $h^I = h^J$ et leur estimation de dimension s'entendent dans Γ^n.

689. Ouvert auxiliaire de valuations et germe de domaine

Texte visé. Proposition 12.10.5, p. 367, `squelettes.tex`, lignes 3638–3640.

Obstruction. Sur $\mathbf{Q}_3$, prenons la couronne $X = \{1 \leq |T| \leq 3\}$, le point $x = \eta_1$ et le moment T. Pour le cône de dimension pleine $t \leq 1$ dans l'image de l'espace entier des valuations, l'ouvert auxiliaire $\mathscr{U}$ contient des valuations avec $w(\widetilde{T}) < 1$. La réduction du germe de X impose $w(\widetilde{T}) \geq 1$. La réduction d'un germe de domaine de (X, x) est contenue dans celle de (X, x), et ne peut donc représenter cet ouvert auxiliaire.

Correction. Supprimer (U, x) et U des listes. Le germe source effectif (V, x) est défini par la trace de $\mathscr{U}$ dans la réduction de (X, x). Conserver (V, x), les germes cibles (U', y) et (V', y) et leurs représentants. La construction de la projection plate sur des représentants compacts utilise V et V'. Dans la comparaison finale, l'ouvert auxiliaire intervient par son image cible $\mathscr{U}'$.

690. Tropicalisation du tore cible

Texte visé. Proposition 12.10.5, démonstration, p. 367.

`squelettes.tex`, lignes 3684–3689.

Correction. Noter trop la tropicalisation du tore cible $(\mathbb{G}_{m,k}^n)^{\mathrm{an}}$, en coordonnées multiplicatives. La condition graduée donnée par D' se relève au germe

$$(V', y) = (U', y) \cap \mathrm{trop}^{-1}\big(\mathrm{trop}(y) \cdot D'(\mathbb{R}_{>0})\big),$$

où l'image réciproque est prise en germe en y. L'image tropicale de $(V' \cap S(\mathbb{G}_m^n), y)$ est donc le germe de $\mathrm{trop}(y) \cdot D'(\mathbb{R}_{>0})$ en $\mathrm{trop}(y)$.

691. Type de Berkovich du point marqué

Texte visé. Remarque 12.11.3, p. 369, `squelettes.tex`, lignes 3824–3825.

Correction. Lire « Cela entraîne que x est de type (2) ou (3). » Sur la courbe X, la condition $d_k(x) = 1$ porte sur le point marqué. Pour le type (2), la structure locale de la courbe fournit une branche aboutissant à x. Pour le type (3), l'hypothèse que ce point n'est pas isolé donne une telle branche. L'argument qui suit s'applique au même point x.

692. Norme de la première coordonnée dans le bidisque

Texte visé. Remarque 12.11.4, p. 369.

`squelettes.tex`, lignes 3847–3852.

Correction. Écrire $|T_1(x)| = r$. En effet, $|T_1(x)|/r$ et $r|T_2(x)|$ sont positifs, au plus un, et de produit un. Ils valent donc tous deux un. Comme r est en dehors de l'enveloppe divisible du groupe des valeurs de k, pour $i \neq j$ et $a_i, a_j \neq 0$, les normes monomiales $|a_i|r^i$ et $|a_j|r^j$ sont distinctes. La première projection est donc le point de Gauss η_r.

693. Égalité des bornes pour la dimension centrale

Texte visé. §13.1.1, p. 371.

`complements-ga.tex`, lignes 16–19.

Correction. La conséquence de la chaîne d'inégalités s'écrit

$$\dim_{\mathrm{c}}(X_{\mathrm{G}}, x) = \dim_x X \quad \text{dès que} \quad d_k(x) = \dim_x X.$$

Sous cette condition les deux termes extrêmes sont égaux, donc tous les termes intermédiaires ont cette valeur.

694. Point marqué du morphisme des anneaux G-locaux

Texte visé. §13.1.4, p. 372.

`complements-ga.tex`, lignes 97–104.

Correction. Choisir $y \in Y$ tel que $f(y) = x$. L'image réciproque de chaque domaine analytique passant par x est un domaine analytique passant par y. Les images réciproques de fonctions, compatibles aux restrictions, donnent sur les colimites filtrantes la flèche $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x} \to \mathscr{O}_{Y_{\mathrm{G}},y}$. Lorsque les espaces sont k-analytiques, le critère de platitude applique le théorème 7.5 de Ducros au faisceau structural.

695. Point de l'anneau G-local après extension des scalaires

Texte visé. §13.1.5, p. 372.

`complements-ga.tex`, lignes 107–113.

Correction. À la ligne 112, le dernier anneau est $\mathscr{O}_{X_{K,\mathrm{G}},y}$. Pour un bon domaine V de X contenant x, considérer

$$\mathscr{O}_{V,x} \longrightarrow \mathscr{O}_{V_K,y} \longrightarrow \mathscr{O}_{X_{K,\mathrm{G}},y}.$$

La première flèche est plate par extension des scalaires et la seconde par la régularité G-locale de 13.1.3. La composition est plate et, en passant à la colimite filtrante sur V, on obtient la platitude sur $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$.

696. Point marqué dans la réduction du germe image réciproque

Texte visé. Lemme 13.1.7, démonstration, p. 373.

`complements-ga.tex`, lignes 166–170.

Correction. Pour $W = f^{-1}(U)$, la réduction est celle du germe au point source y.

$$\widetilde{(W, y)} = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathscr{H}(y)}/\tilde{k}}\{\mathsf{W}\}.$$

L'inclusion $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{V}$ donne l'inclusion de germes $(W, y) \subseteq (V, y)$ utilisée ensuite.

697. Domaine de base du produit fibré

Texte visé. Proposition 13.1.9(a), (b), démonstration, p. 374.

`complements-ga.tex`, lignes 240–246.

Correction. Lorsque la base a été remplacée par le domaine affinoïde $V \subseteq X$ contenant x, prendre le domaine affinoïde source contenant y dans $Y \times_X V$. Le morphisme restreint a ainsi pour cible le domaine choisi, auquel on applique le corollaire de localisation quasi-finie 13.1.8.

698. Faisceau cohérent de l’image directe finie

Texte visé. Corollaire 13.1.10, démonstration, p. 375.

`complements-ga.tex`, lignes 314–327.

Correction. Pour $W = f^{-1}(V)$, poser $H = F|_W$. L’image directe finie de H sur V est $(f_*F)|_V$. La formule ordinaire des germes de l’image directe donne $(f_*H)_x = \prod_{i=1}^{r} H_{W,y_i}$ pour les germes ordinaires. Le produit étant fini, tensoriser par $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{G}},x}$ commute avec ce produit. La proposition 13.1.9(c) identifie chaque facteur à F_{Y_{G},y_i}, ce qui donne la formule de l’énoncé pour F.

699. Module filtré après changement de base artinien

Texte visé. Lemme 13.2.1, démonstration, p. 375.

`complements-ga.tex`, lignes 343–351.

Correction. Poser $\ell = \ell_A(M)$. La série de composition $0 = M_0 \subset \cdots \subset M_\ell = M$ donne, par platitude de B sur A, la filtration

$$0 = B \otimes_A M_0 \subset \cdots \subset B \otimes_A M_\ell = B \otimes_A M.$$

Chaque quotient est $B/\mathfrak{m}B$, le corps résiduel de B par hypothèse. Il y a exactement ℓ quotients simples, d’où $\ell_B(B \otimes_A M) = \ell_A(M)$.

700. Filtration nilpotente d’un faisceau cohérent

Texte visé. Proposition 13.2.4(a), p. 376.

`complements-ga.tex`, lignes 415–430.

Correction. Pour le nilradical I et le faisceau cohérent F, filtrer par les I^iF, jusqu’à $IF \subset F$. Poser r_i égal à la dimension générique de $I^iF/I^{i+1}F$ sur le corps résiduel du point générique de X_{red}. Ces quotients sont des faisceaux cohérents sur X_{red}, car I les annule. Par liberté générique, on se restreint à un ouvert où chacun est localement libre de rang r_i. Aux points génériques analytiques en question, la longueur de la fibre filtrée est la somme des r_i, avec le quotient F/IF.

701. Longueur du même faisceau au point G-générique

Texte visé. Proposition 13.2.6, démonstration, p. 377.

`complements-ga.tex`, lignes 461–466.

Correction. Pour $x \in V^{\mathrm{gen}}$, la restriction au domaine identifie les anneaux G-locaux et les germes cohérents de $F|_V$ et de F. Ces germes ont longueur finie au point G-générique considéré. On a donc $\ell_{V_{\mathrm{G}},x}(F) = \ell_{X_{\mathrm{G}},x}(F)$. Appliquer cette égalité au point choisi dans $V^{\mathrm{gen}} \cap W$.

702. Finitude du degré au-dessus du point cible

Texte visé. §13.3.2, p. 378.

`complements-ga.tex`, lignes 565–575.

Correction. Le degré $\deg_x(f)$ est fini exactement lorsque la fibre est compacte et de dimension analytique locale nulle en tout point. La somme finie exclut tout degré local infini et impose un

nombre fini de points, puisque chaque contribution non vide est un entier strictement positif. Réciproquement, chaque point de dimension locale nulle est ouvert dans la fibre. La compacité donne alors une fibre finie discrète. Son algèbre est le produit des facteurs artiniens locaux, et leurs dimensions sur $\mathscr{H}(x)$ s'additionnent. La fibre vide a degré zéro.

703. Le cas de dimension nulle dans le changement de corps

Texte visé. Lemme 13.3.3(a), démonstration, p. 378.

`complements-ga.tex`, lignes 600–608.

Correction. Après réduction à l'extension du corps de la fibre au-dessus de x, le second cas est $\dim_y Y = 0$. Le singleton ouvert $\{y\}$ est fini sur le corps de la fibre. Son algèbre finie, tensorisée avec le nouveau corps complet, est le produit fini des algèbres artiniennes locales aux points au-dessus de y. Le changement de corps conserve la dimension de l'algèbre, et les dimensions des facteurs s'additionnent.

704. Image du point marqué dans la multiplicativité du degré

Texte visé. Proposition 13.3.10, p. 381.

`complements-ga.tex`, lignes 782–800.

Correction. Après avoir nommé $z \in Z$ et $y = g(z) \in Y$, poser $x = f(y) \in X$. Les conditions sur la dimension centrale de la base et sur la fibre $f^{-1}(x)$ se rapportent alors au point marqué de l'image.

705. Indices du degré au point cible

Texte visé. Proposition 13.4.2, démonstration, p. 382.

`complements-ga.tex`, lignes 983–1005.

Correction. Aux lignes 984–985, employer $\deg_x(f)$ pour le degré au point cible. Au passage à la factorisation en trois morphismes $h \circ j \circ g$, la fonction à étudier est $x' \mapsto \deg_{x'}(h \circ j \circ g)$. Ces indices désignent le degré défini par la somme sur la fibre du point de la cible.

706. Borne uniforme du degré fini sur chaque branche

Texte visé. Proposition 13.4.2, démonstration, p. 383.

`complements-ga.tex`, lignes 1018–1020.

Correction. Rétrécir le voisinage T_i du point w_i de manière que

$$\deg_w(g) \leq \deg_{w_i}(g) \qquad (w \in j^{-1}(T_i)).$$

Ce choix est permis par la semi-continuité supérieure de la dimension de la fibre du faisceau cohérent $g_*\mathscr{O}_V$, donc du degré $\deg_w(g)$. Cette borne fixe est celle des poids dans la somme par branches.

707. Somme pondérée des degrés de la fibre

Texte visé. Proposition 13.4.2, démonstration, p. 383.

`complements-ga.tex`, lignes 1045–1046.

Correction. En prenant $x' = x$ dans la somme précédente, les points de la fibre intermédiaire sont les w_i, et le degré de $h \circ j$ en w_i est d_i. On obtient

$$\deg_x(f) = \sum_i d_i \deg_{w_i}(g).$$

Pour x' voisin de x, la contribution de la branche T_i se borne en utilisant la somme de ses degrés locaux de $h \circ j$, qui est au plus d_i, et la borne uniforme $\deg_w(g) \leq \deg_{w_i}(g)$ de n° 706. On retrouve ainsi la borne par $\deg_x(f)$.

708. Restriction sur un générateur de cycles

Texte visé. Proposition 13.5.3(a), p. 385.

`complements-ga.tex`, ligne 1233.

Correction. Le morphisme ρ s'évalue sur le générateur $[Y]$ du groupe des cycles. Écrire

$$\rho([Y]) = [Y \cap V] = \sum_i [Z_i] = [Y]|_V.$$

Les Z_i sont les composantes irréductibles du domaine analytique $Y \cap V$. Comme Y est intègre, ce domaine est réduit et chaque composante intervient avec coefficient un. La formule détermine la restriction par additivité localement finie.

709. Composantes du recouvrement double pour le recollement

Texte visé. Proposition 13.5.3(c), démonstration, p. 386.

`complements-ga.tex`, lignes 1266–1273.

Correction. Décrire le lieu de coefficient m sur $V_{ij} = V_i \cap V_j$ au moyen des composantes irréductibles de $Y \cap V_{ij}$. L'égalité des cycles locaux sur V_{ij} identifie les unions de ces composantes de coefficient m. On obtient $T_i \cap V_j = T_j \cap V_i$.

710. Coefficient du cycle local dans la preuve de finitude

Texte visé. Proposition 13.5.3(c), démonstration, p. 386.

`complements-ga.tex`, lignes 1294–1299.

Correction. Pour la composante locale T de $Y \cap V_i$ qui rencontre le voisinage choisi, écrire $z(Y) = z_i(T) \neq 0$. Le cycle z_i s'évalue sur cette composante de son domaine. La liste finie des composantes locales T qui rencontrent le voisinage borne ainsi la liste des clôtures globales Y de coefficient non nul. C'est la finitude locale recherchée.

711. Rayons d'une base d'Abhyankar

Texte visé. §13.8.5, p. 390.

`complements-ga.tex`, lignes 1659–1668.

Correction. Poser $n = d_k(L)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$ et $r = (|t_1|, \ldots, |t_n|)$. L'identité des normes identifie la norme sur $k[t_1, \ldots, t_n]$ à la norme de Gauss de rayon r. L'identification se prolonge aux corps de fractions puis à leurs complétés. Lorsque $n = 0$, le tuple est vide et le corps complété est k.

712. Fibre de la correspondance avec les idéaux premiers

Texte visé. Proposition 13.8.8(c), p. 391.

`complements-ga.tex`, lignes 1755–1759.

Correction. La bijection est $y \mapsto \mathfrak{m}_y$ entre $\pi^{-1}(x)$ et $\mathrm{Spec}(L\widehat{\otimes}_k K)$. Les points de cette fibre donnent les idéaux maximaux par évaluation. L'algèbre de la fibre est finie sur $\mathscr{H}(\eta_{K,r})$, comme en n° 380, donc artinienne. Ses idéaux premiers sont tous maximaux.

713. Fibre de l'assertion de finitude résiduelle

Texte visé. Proposition 13.8.8(d), p. 391.

`complements-ga.tex`, lignes 1761–1762.

Correction. Quantifier sur tout $y \in \pi^{-1}(x)$. Pour un tel y, le corps $\mathscr{H}(y)$ est fini sur $\mathscr{H}(\eta_{K,r})$. Son corps résiduel gradué est fini sur $\widetilde{\mathscr{H}(\eta_{K,r})} = \widetilde{K} \cdot \widetilde{\mathscr{H}(\eta_r)}$, donc sur le corps gradué intermédiaire $\widetilde{K} \cdot \widetilde{L}$.

714. Fibre de l'assertion de multiplicité

Texte visé. Proposition 13.8.8(e), p. 391.

`complements-ga.tex`, lignes 1764–1767.

Correction. Quantifier sur tout $y \in \pi^{-1}(x)$. Le facteur artinien local $(L\widehat{\otimes}_k K)_{\mathfrak{m}_y}$ correspond alors au même point y de la fibre après changement de base. La comparaison des anneaux locaux et l'invariance de la longueur artinienne portent sur ce facteur et la multiplicité générique indiquée en ce point.

715. Rayon réel de chaque coordonnée gaussienne

Texte visé. Proposition 13.8.8, démonstration, p. 391.

`complements-ga.tex`, lignes 1778–1782.

Correction. Poser $r_i = |f_i(x)|$ pour chaque i, et $r = (r_i)_i$. La formule de norme de la base d'Abhyankar $(f_i(x))_i$ identifie alors l'image de x par le morphisme f au point de Gauss η_r de polyrayon r.

716. Cible réduite au point de Gauss après extension des scalaires

Texte visé. Proposition 13.8.8(e), p. 392.

`complements-ga.tex`, lignes 1815–1816.

Correction. Le théorème 6.3.7 de Ducros, *Families of Berkovich spaces*, s'applique dans les représentants bons parce que $\mathbf{A}_K^{n,\mathrm{an}}$ est réduit et que le point de Gauss $\eta_{K,r}$ est d'Abhyankar de rang gradué maximal. Le théorème figure aux pp. 137–139, pages physiques 147–149 des deux éditions intégrales de l'auteur vérifiées. Il donne la régularité de

$$\mathscr{O}_{X_K,y} \longrightarrow \mathscr{O}_{f^{-1}(\eta_{K,r}),y}$$

même si X_K est non réduit. Les deux anneaux sont artiniens dans la situation considérée. La fibre fermée géométriquement régulière de dimension zéro est un corps, donc l'idéal maximal de la source s'étend à celui de la cible. La comparaison des longueurs s'applique. L'hypothèse de réduction de X sert plus haut à identifier la fibre avant extension des scalaires.

717. Extension comparée sur les deux corps de coordonnées

Texte visé. Proposition 13.8.9, démonstration, p. 392.

`complements-ga.tex`, lignes 1871–1877.

Correction. Comparer les extensions $L/\widehat{k(t)}$ et $L/\widehat{k(f(x))}$. Le lemme 13.8.6 donne le même degré fini et le même degré résiduel gradué pour ces deux extensions issues des coordonnées approchées. Le quotient de ces deux degrés est le défaut. Les défauts sont donc égaux.

718. Base du produit tensoriel des corps résiduels gradués

Texte visé. §13.8.12, p. 394.

`complements-ga.tex`, lignes 2048–2055.

Correction. Le dernier produit tensoriel est

$$\widetilde{L} \otimes_{\widetilde{k(t)}} \widetilde{k_r(t)}, \qquad \widetilde{k(t)} = \tilde{k}(\tilde{t}).$$

Les formes initiales gaussiennes indépendantes $\tilde{s}$ donnent une extension graduée purement transcendante de cette base. L'extension des scalaires préserve donc le degré fini de $\widetilde{L}$ et donne l'égalité annoncée des degrés résiduels gradués.

719. Partie intérieure du lieu squelettique

Texte visé. Remarque 14.1.4(a), p. 395.

`calibrage.tex`, lignes 617–630.

Correction. Écrire $\Sigma_f \cap \mathrm{Int}(X) = \Sigma_f^{(n)} \cap \mathrm{Int}(X)$. Le théorème 12.8.2(b) donne cette égalité sur l'intérieur, et ce lieu intérieur est pur de dimension n.

Sur une couronne analytique fermée non dégénérée avec moment T, le squelette $\Sigma_f = \Sigma_f^{(1)}$ contient ses deux extrémités de Gauss. Elles sont sur le bord analytique et disparaissent après intersection avec $\mathrm{Int}(X)$. Un sous-segment compact strictement intérieur fournit une cellule commode pour le cadre de la remarque.

720. Partie squelettique recouverte par les cellules

Texte visé. Preuve du corollaire 14.1.6, p. 396.

`calibrage.tex`, lignes 715–721.

Correction. Dans la dernière phrase, écrire « Elles constituent un G-recouvrement de Σ » pour les f-cellules commodes de la décomposition.

721. Séparation topologique de la source analytifiée

Texte visé. Proposition 14.1.9, p. 397, `calibrage.tex`, lignes 778–779.

Correction. En plus du type fini et de la borne $\dim X \leq n$, supposer X^{an} topologiquement séparé. C'est une condition de la définition des espaces analytiques de niveau n. Il suffit que le schéma X soit séparé. On peut alors employer les ouverts très affines denses sur les composantes qui contribuent.

La droite à deux origines est un schéma de type fini de dimension un. Dans son analytification, les points de Gauss de rayon strictement positif sont dans l'ouvert commun des deux droites

privées de l'origine. Lorsque le rayon tend vers zéro, leurs semi-normes polynomiales convergent vers l'évaluation à chacune des deux origines. Ces points distincts ne sont donc pas topologiquement séparés.

722. Domaine de définition du moment auxiliaire

Texte visé. Preuve de la proposition 14.1.9, p. 397.

`calibrage.tex`, lignes 800–818.

Correction. Sur l'ouvert très affine U', on a $\Sigma_f = \Sigma_{f|_{U'}}$ et $f_{\mathrm{trop}}(U'^{\mathrm{an}}) = f_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})$ dans la réduction considérée. Utiliser $h_{\mathrm{trop}}(U'^{\mathrm{an}})$ pour le moment $h = (f, g, g')$. On peut écrire $h_{\mathrm{trop}}(X^{\mathrm{an}})$ après avoir remplacé X par U'.

723. Tore cible du second moment auxiliaire

Texte visé. Proposition 14.1.9, p. 397, `calibrage.tex`, ligne 806.

Correction. Écrire $g' : U' \to \mathbf{G}_m^{m'}$ pour l'immersion fermée très affine. Le premier moment auxiliaire garde la cible $\mathbf{G}_m^m$. Les deux choix sont indépendants. Le moment $h = (f, g, g')$ a alors pour cible $T \times \mathbf{G}_m^m \times \mathbf{G}_m^{m'}$, comme aux lignes 809 et 818.

724. Sous-assertion sur l'image tropicale propre

Texte visé. Proposition 14.1.9, p. 397, `calibrage.tex`, ligne 831.

Correction. Citer le théorème 12.8.2(c), p. 356. L'immersion fermée h^{an} est propre et la tropicalisation standard du tore est topologiquement propre. Leur composée l'est donc. C'est l'hypothèse de (c) qui donne l'égalité entre la partie de dimension maximale de l'image et l'image du squelette, dans le cas de dimension n où la preuve se place.

725. Voisinage ouvert dans la partie pure du polyèdre caractéristique

Texte visé. Proposition 14.1.10, démonstration, p. 398.

`calibrage.tex`, lignes 888–899.

Correction. Écrire $\Sigma_f^{(n)}$. Le sous-espace W est relativement ouvert dans V_2 et évite le bord de V_2 dans V_1. Il est donc ouvert dans V_1. Comme V_2 est contenu dans l'intérieur de V_1 dans $\Sigma_f^{(n)}$, W est ouvert dans $\Sigma_f^{(n)}$. C'est cette partie pure qui se restreint par intersection avec un ouvert ordinaire de la source analytique.

726. Indices des coordonnées du corps résiduel de base

Texte visé. Preuve de la proposition 14.2.3, p. 400.

`calibrage.tex`, lignes 1394–1401.

Correction. Dans l'argument d'indépendance graduée sur la fibre, le corps résiduel gradué de la base est engendré par les formes initiales des $n - d$ dernières coordonnées. L'indice vérifie $i > d$, soit $d + 1 \leq i \leq n$.

727. Intervalle des dimensions dans la récurrence

Texte visé. Preuve du théorème 14.2.5, p. 401.

`calibrage.tex`, lignes 1505–1506.

Correction. Pour $c = \dim C$, écrire « Soit d un entier tel que $c \leq d \leq n$ ».

728. Densité dans le voisinage polyédral

Texte visé. Preuve du lemme 14.2.6, p. 402.

`calibrage.tex`, lignes 1544–1549.

Correction. L'ensemble $Q_1 \cap \Omega$ est d'intérieur vide dans Ω. Par suite, $\Omega \setminus Q_1$ est dense dans Ω. Comme $\Omega \subseteq P \setminus Q_2$, l'adhérence de $P \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ contient Ω, puis $f_{\mathrm{trop}}(C)$.

729. Degré de la restriction finie et plate

Texte visé. Lemme 14.2.6, p. 402, `calibrage.tex`, lignes 1594–1595.

Correction. Pour $g = f|_V : V \to U$, lire

$$\deg^x(f) = \deg_{f(x)}(g) = \deg_u(g) = \sum_{v \in V \cap f^{-1}(u)} \deg^v(f).$$

La finitude et la platitude de g donnent un rang constant sur l'ouvert cible connexe. Le degré local de chaque point est inchangé par la restriction, et la somme des degrés des facteurs artiniens de la fibre donne ce rang. Sur deux copies disjointes d'un tore envoyées par l'identité sur le même tore, le degré de f est deux et celui de la restriction à la première copie est un.

730. Points cibles avant extension des scalaires

Texte visé. Preuve du théorème 14.2.7, p. 403.

`calibrage.tex`, lignes 1756–1759.

Correction. Poser $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$ avant d'introduire leurs relèvements de Gauss y_K et y'_K au-dessus de la clôture algébrique complétée K.

731. Degré du représentant fini et plat marqué

Texte visé. Preuve du théorème 14.2.7, p. 403.

`calibrage.tex`, ligne 1818.

Correction. Sur les voisinages choisis dans la preuve, noter $g = f|_W : W \to V$ le morphisme fini et plat. Écrire

$$\deg_{f(x)}(g) = \deg^x(f).$$

La fibre de g au-dessus de $f(x)$ a pour seul point x, et la localisation conserve le degré local. La platitude finie et la connexité de V identifient ce degré au rang de g sur V.

732. Évaluation dans la fibre du paramètre

Texte visé. Lemme 14.2.8, démonstration, p. 404.

`calibrage.tex`, lignes 1852–1858.

Correction. Écrire $(h_0)_{\mathscr{H}(t)}(z) = \mathfrak{s}_t(r)$ dans les fibres correspondantes au-dessus de t. Chaque facteur de perturbation diffère de 1 d'un élément de valeur absolue strictement inférieure à 1 en z. Il conserve donc les formes initiales des coordonnées. Leurs rayons et le critère de Gauss donnent cette égalité. En projetant sur le tore sur le corps de base, on obtient $h_0(w) = \mathfrak{s}(r)$.

733. Moment et intérieur du voisinage d'homotopie

Texte visé. Preuve du théorème 14.2.7, p. 404.

`calibrage.tex`, lignes 1861–1866.

Correction. Le domaine W est un voisinage affinoïde de x dans $\mathrm{Int}(X)$, ce qui donne $x \in \mathrm{Int}(W)$. Écrire $h_0(x) = f(x)$, dont x est le seul antécédent dans W par h_0. Le pavé ouvert Δ est choisi autour de $f_{\mathrm{trop}}(x)$, avec $\Delta_{\mathrm{sq}} \subseteq V$ et $\Delta_{\mathrm{sq}} \cap h_0(\partial W) = \emptyset$.

734. Anneau local de la fibre au point source

Texte visé. Preuve du lemme 14.2.10(d), p. 405.

`calibrage.tex`, lignes 2777–2779.

Correction. Le degré local $\deg^{y}(g')$ est la dimension sur $\mathscr{H}(g'(y))$ de l'anneau local de la fibre $(g')^{-1}(g'(y))$ en y.

735. Rang du tore de la fibre

Texte visé. Preuve du lemme 14.2.10(d), p. 406.

`calibrage.tex`, lignes 2798–2803.

Correction. La projection vers le tore de base a pour fibre au-dessus de $f(x)$ le tore de rang d sur $\mathscr{H}(f(x))$. Écrire donc $h(y) \in S(\mathbb{G}_{m,\mathscr{H}(f(x))}^{d})$.

736. Projection dans le tiré en arrière du vecteur-volume

Texte visé. § 14.3.2, p. 407.

`calibrage.tex`, lignes 3033–3049.

Correction. Sur W, avec $g = (f, f')|_W$ et p la première projection, on a $(q \circ p) \circ g = q \circ f|_W$. Pour le vecteur-volume e, l'identité à utiliser est

$$\big(((q \circ p) \circ g)_{\mathrm{trop}}\big)^{*} e = \big((q \circ f|_W)_{\mathrm{trop}}\big)^{*} e.$$

Elle s'applique sur la cellule commune avec les mêmes degrés locaux.

737. Décomposition de la partie squelettique restreinte

Texte visé. § 14.3.3, p. 408.

`calibrage.tex`, lignes 3060–3067.

Correction. Prendre $\mathscr{C}'$ comme décomposition de Σ' en f-cellules commodes, raffinant les intersections induites par $\mathscr{C}$. On peut aussi restreindre à Σ' une décomposition adaptée de Σ. On obtient le calibrage $\mu_{\Sigma'} = \mu_{\Sigma}|_{\Sigma'}$.

738. Morphisme utilisé pour le degré calibré

Texte visé. § 14.4.1 et phrase après la proposition 14.4.2, p. 409.

`calibrage.tex`, lignes 3160–3170.

Correction. Employer le morphisme $p\colon Y \to X$ aux lignes 3166–3170. Pour $x \in \Sigma$ et $y \in p^{-1}(x)$, la fibre $p^{-1}(x)$ est de dimension nulle et p est quasi-fini en y. Cette fibre est un espace $\mathscr{H}(x)$-analytique fini, et le degré calibré est $\mathrm{dc}_x(p)$. À la ligne 3195, lire également « les fibres de p en tout point de Σ ».

739. Coefficient nul au-dessus d'une cellule sans antécédent

Texte visé. Proposition 14.4.2 et sa preuve, p. 409.

`calibrage.tex`, lignes 3198–3219.

Correction. Aux deux endroits indiqués, parler d'un calibrage à coefficients non négatifs et G-localement constants. Sur l'intérieur de chaque bonne cellule cible de dimension maximale, le coefficient est la somme des degrés calibrés des feuillets finis. La somme vide vaut zéro. L'identité $p_*\mu_{\mathrm{T}} = \mathrm{dc}(p)\,\mu_{\Sigma}$ conserve ce coefficient. La positivité stricte sur chaque cellule de dimension maximale exige la présence d'un feuillet au-dessus de chacune d'elles.

740. Point test dans la cellule réelle

Texte visé. Preuve de la proposition 14.5.3, p. 411.

`calibrage.tex`, lignes 3401–3414.

Correction. Choisir la cellule Δ assez petite pour avoir $\Delta \subseteq D \cap V$ et $\mathrm{sq}(q_{\mathrm{trop}}(\Delta)) \subseteq W$. Prendre ensuite $y \in \mathring{\Delta}$. Le point analytique $\mathrm{sq}(q_{\mathrm{trop}}(y))$ appartient alors à W, où le degré fini et plat est calculé.

741. Rang du tore cible du moment

Texte visé. Énoncé du théorème 14.6.2, p. 412.

`calibrage.tex`, lignes 3488–3495.

Correction. Les m fonctions données définissent le moment $f\colon (X,x) \to \mathbb{G}_m^m$. L'entier n est la dimension du germe analytique. La comparaison des cônes calibrés concerne le cas où les deux dimensions tropicales valent n.

742. Corps résiduel ordinaire du tore réduit

Texte visé. Théorème 14.6.2, p. 412.

`calibrage.tex`, ligne 3494.

Correction. Écrire

$$\widetilde{f}\colon (V^{\mathrm{an}},\xi) \longrightarrow \mathbf{G}^{m}_{\mathrm{m},\widetilde{k}^{,1}},$$

où $\widetilde{k}^{,1}$ est la composante de degré 1 du corps gradué $\widetilde{k}$, c'est-à-dire le corps résiduel ordinaire de k. Les unités f_i de norme 1 au point marqué ont des réductions non nulles de degré 1. Le moment réduit prend donc ses valeurs dans le tore déployé sur le corps de base ordinaire de V. La convention abrégée sur les réductions ordinaires est introduite plus loin dans la preuve.

743. Tore ambiant du voisinage affinoïde

Texte visé. Preuve du théorème 14.6.2, p. 414.

`calibrage.tex`, lignes 3639–3646.

Correction. Prendre W comme voisinage affinoïde du point de Gauss unité η_1 dans $\mathbb{G}_m^n$, le tore cible du morphisme g.

744. Projection d'une cellule du cône tropical

Texte visé. Preuve du théorème 14.6.2, p. 414.

`calibrage.tex`, lignes 3670–3672.

Correction. Pour une n-cellule ouverte C de $\Pi_{f,x}$, poser $C' = q_{\mathrm{trop}}(C)$. Pour $D = C \cap f_{\mathrm{trop}}(\Omega)$, on prend de même $D' = q_{\mathrm{trop}}(D)$.

745. Point intermédiaire dans la factorisation résiduelle

Texte visé. Preuve de la proposition 14.6.4, p. 415.

`calibrage.tex`, lignes 3785–3795.

Correction. Soit ζ le point de norme triviale de $\widetilde{\mathscr{Y}}^{\mathrm{an}}$ associé à son corps des fonctions $\widetilde{F}$. Dans la factorisation $\tilde{g} = \tilde{p} \circ \tilde{h}$, on a $\tilde{h}(\xi) = \zeta$ et $\tilde{p}(\zeta) = \eta_{1,\tilde{k}}$.

746. Morphismes utilisés pour compter les antécédents

Texte visé. Énoncé du lemme 14.6.5, p. 415.

`calibrage.tex`, lignes 3804–3818.

Correction. Dans (a), compter les antécédents par p dans Y satisfaisant Θ. Dans (b), compter les antécédents par $\tilde{p}$ dans $\widetilde{\mathscr{Y}}^{\mathrm{an}}$ satisfaisant $\widetilde{\Theta}$. Dans les deux cas, le poids d'un antécédent est le degré de son extension de corps résiduel complété.

747. Direction infinitésimale dans la cellule projetée

Texte visé. Preuve de la proposition 14.6.4, p. 416.

`calibrage.tex`, lignes 3878–3885.

Correction. Choisir $c = (c_1, \dots, c_n) \in C'$, où $C' = q_{\mathrm{trop}}(C) \subseteq \mathbb{R}^n$. Pour la valuation de Gauss à valeurs dans le groupe ordonné lexicographiquement, prendre $\mathbf{g} = ((1, c_1), \dots, (1, c_n))$.

748. Nombre de paramètres de la valuation de Gauss

Texte visé. Preuve de la proposition 14.6.4, p. 416.

`calibrage.tex`, lignes 3896–3903.

Correction. Pour tout groupe divisible ordonné Γ contenant $|k^\times|$, faire varier γ dans Γ^n. Les n paramètres donnent les valeurs des n coordonnées de la valuation de Gauss η_γ.

749. Valuation du corps hensélisé de base

Texte visé. Preuve de la proposition 14.6.4, p. 416.

`calibrage.tex`, lignes 3931–3940.

Correction. La multiplicité de chaque prolongement compté est le degré de son hensélisé sur celui de $(k(T_1,\dots,T_n),\eta_{\mathbf{g}})$. Utiliser $\eta_{\mathbf{g}}$ dans ce corps de base.

750. Groupe multiplicatif du corps du point de Gauss

Texte visé. Lemme 14.6.6(c), p. 417, `calibrage.tex`, ligne 4001.

Correction. Placer le signe $\times$ en exposant et lire

$$|\mathscr{H}(y)^\times| = |\mathscr{H}(\eta_1)^\times| = |k^\times|.$$

Le corps complété du point de Gauss de rayon un a le même groupe de valeurs que k. Le groupe de valeurs de l'extension finie en y contient ce groupe avec indice fini. La divisibilité du groupe de départ et l'absence de torsion du groupe de valeurs imposent l'égalité. L'indice de ramification du premier étage vaut donc un et celui de la valuation composée est l'indice du second étage.

751. Morphisme conjoint à valeurs dans le tore et la base

Texte visé. Lemme 14.7.3, pp. 418–419.

`calibrage.tex`, lignes 4443–4518.

Correction. Pour $W = g_{\mathrm{trop}}^{-1}(C)$, poser $F = (p\circ g, f)|_W \colon W \to \mathbb{G}_m^{n-d}\times Y$. Les points des sections de Gauss relatives au-dessus de l'ouvert de la base sont dans cette cible. Dans la preuve, prendre la restriction à W à la ligne 4480 et employer F pour les affirmations de finitude aux lignes 4498–4500. Sur la fibre en u, le tore cible est défini sur $\mathscr{H}(u)$, aussi dans le calcul de la ligne 4512.

752. Image tropicale de la fibre dans le produit

Texte visé. Preuve du théorème 14.7.2(b), pp. 419–420.

`calibrage.tex`, lignes 4622–4628.

Correction. Partir de $C \subseteq g_{\mathrm{trop}}(X_u)$. Puisque la seconde coordonnée tropicale de $h=(g,f)$ vaut γ sur X_u, on a $C\times\{\gamma\}\subseteq h_{\mathrm{trop}}(X_u)$.

753. Point de Gauss dans le tore de la fibre

Texte visé. Preuve du théorème 14.7.2(b), p. 420.

`calibrage.tex`, lignes 4662–4669.

Correction. Poser $u=\mathrm{sq}(\gamma)$. Pour $c\in p_{\mathrm{trop}}(\mathring{C})$, le point utilisé dans le tore de rang $n-d$ sur $\mathscr{H}(u)$ est $\mathrm{sq}_{\mathscr{H}(u)}(c)$. Son image dans le tore total est $\mathrm{sq}(c,\gamma)$.

754. Facteur de degré dans le calibrage produit

Texte visé. Preuve du théorème 14.7.2(b), p. 420.

`calibrage.tex`, lignes 4671–4680.

Correction. Avec la notation des vecteurs-volumes canoniques e_{n-d} et e_d, conclure

$$\mu_{C\times\Gamma} = \delta_C\, \sigma_{C,*}(e_{n-d}) \cdot e_d = \mu_C \cdot e_d.$$

Le facteur δ_C vient du degré fini et plat au-dessus du point de Gauss choisi.

755. Renvoi à la structure G-tropicale affinée

Texte visé. Ouverture du chapitre 15, page PDF 421 (sans folio imprimé).

`fd-berk.tex`, ligne 7.

Correction. À la ligne 7, renvoyer au § 12.4.6, p. 346, qui construit la structure d'espace G-tropical affiné. Le renvoi à la définition 14.3.5 à la ligne 16 concerne le calibrage canonique et reste à sa place.

756. Espace d'arrivée de la carte

Texte visé. Preuve de la proposition 15.1.1, p. 422.

`fd-berk.tex`, ligne 62.

Correction. Définir β_i sur une partie paralinéaire de $\mathbb{R}^{n_i}$ contenant $g_i(W_i)$. C'est l'espace d'arrivée déclaré de g_i. Le tiré en arrière $g_i^*\beta_i$ et le raffinement G-commun utilisent cet espace.

757. Restriction de la carte dans la présentation par un moment

Texte visé. Proposition 15.1.1, démonstration, p. 422.

`fd-berk.tex`, lignes 64–74.

Correction. Poser $g_{i,j} = g_i|_{V_{i,j}}$ et $p_{i,j}(t) = a_{i,j}t + c_{i,j}$. Sur le raffinement commun, on a $g_{i,j} = p_{i,j} \circ f_{i,j,\mathrm{trop}}$. Le tiré en arrière selon cette identité donne la présentation par un moment. Pour une forme ordinaire, effectuer le même calcul sur les coordonnées affines de la carte tropicalisante dans un voisinage ordinaire commun.

758. Restriction sur le domaine du moment relevé

Texte visé. Preuve de la proposition 15.1.3(a), p. 422.

`fd-berk.tex`, ligne 121.

Correction. Écrire $u|_W = \phi \circ g_{\mathrm{trop}}$. Les unités relevées ont les mêmes valeurs absolues que les unités initiales sur W, ce qui permet d'utiliser la même fonction ϕ dans la carte relevée.

759. Voisinages de comparaison centrés au point marqué

Texte visé. Proposition 15.1.3(b), démonstration, p. 422.

`fd-berk.tex`, lignes 125–134.

Correction. Au point x, approcher la valeur de chaque unité f_i sur le réduit par celle d'un germe analytique ordinaire g_i avec une erreur strictement inférieure à $|f_i(x)|$. L'approximant est une unité sur un voisinage ordinaire de x, et l'inégalité stricte persiste sur l'intersection avec la carte du réduit. Rétrécir dans cette carte à un même voisinage ordinaire de x. Les valeurs absolues des coordonnées y coïncident, donc la même fonction de coefficients donne le germe de u à partir du moment formé par les g_i.

760. Ensemble couvert par les ouverts

Texte visé. Corollaire 15.2.9, p. 424.

`fd-berk.tex`, lignes 295–305.

Correction. Dans l'hypothèse sur le recouvrement $(U_i)_{i\in I}$, remplacer K par l'ensemble fermé F introduit au début de l'énoncé. La portée des conditions sur les supports compacts est précisée dans n° 408.

761. Forme-volume sur la base après extension des scalaires

Texte visé. Preuve de la proposition 15.3.1, p. 425.

`fd-berk.tex`, lignes 1394–1401.

Correction. Écrire $p_*\widetilde{\omega_L} = \tilde{\omega}$, où $\widetilde{\omega_L}$ est la forme-volume associée au changement de base et $\tilde{\omega}$ est la forme-volume de dimension n associée à ω sur X. L'égalité de mesures de l'énoncé s'en déduit.

762. Forme-volume de bord sur la base

Texte visé. Preuve de la proposition 15.3.2, p. 425.

`fd-berk.tex`, lignes 1412–1420.

Correction. Écrire $p_*\widetilde{\omega_L} = \tilde{\omega}$ pour les formes-volume de bord associées à la forme de type $(n-1,n)$ et à son changement de base. Le membre de droite est la forme-volume de bord sur X.

763. Image réciproque de la partie squelettique

Texte visé. Lemme 15.4.2, p. 425.

`fd-berk.tex`, lignes 1434–1447.

Correction. Remplacer les trois occurrences de $p^{-1}(\Sigma)$ par $f^{-1}(\Sigma)$. Le symbole p désigne la dimension des formes-volume et f est le morphisme le long duquel on prend l'image réciproque.

764. Article devant « partie squelettique »

Texte visé. Lemme 15.4.2, p. 425.

`fd-berk.tex`, ligne 1435.

Correction. À la première ligne de l'énoncé, écrire « Soit Σ une partie squelettique de X qui supporte fortement ω ».

765. Renvoi pour la forme-volume de bord

Texte visé. Lemme 15.4.2, démonstration, p. 426.

`fd-berk.tex`, lignes 1451–1453.

Correction. Pour $p = n$, citer la proposition **4.5.8(a)** et, pour $p = n-1$, la proposition **4.6.5(a)**. Dans les deux cas, appliquer d'abord la formule d'image directe à la forme appariée au calibrage. La proposition 14.4.2 identifie l'image directe du calibrage au calibrage cible multiplié par le degré calibré. Les deux formules donnent alors les identités correspondantes de formes-volume signées.

766. Critère gradué de l'intérieur relatif

Texte visé. Lemme 15.5.5, p. 428, `fd-berk.tex`, ligne 1641.

Correction. Citer la proposition 3.4 de Temkin, *On local properties of non-Archimedean analytic spaces II*, p. 14 du texte intégral de l'auteur. L'appliquer à l'évaluation affinoïde bornée $B \to \mathscr{H}(y)$ au-dessus de A. L'image graduée de B est $\widetilde{B}/J_{\pi(y)}$ par définition du noyau. Le plongement isométrique $\mathscr{H}(f(y)) \hookrightarrow \mathscr{H}(y)$ donne pour A l'image $\widetilde{A}/I_{\pi(y)}$. Le caractère intérieur de l'évaluation sur A est exactement la condition d'intérieur relatif en y. La proposition donne donc $\mathrm{Int}(Y/X) = \pi^{-1}(E)$. Temkin emploie le même critère dans la preuve du lemme 5.5, p. 22 de cette édition.

767. Relèvement des équations homogènes dans l'algèbre source

Texte visé. Lemme 15.5.5, démonstration, p. 428.

`fd-berk.tex`, lignes 1651–1660.

Correction. Choisir des générateurs homogènes de l'idéal gradué du fermé de $\widetilde{Y}$. Chaque générateur non nul de degré ρ_i se relève en une fonction f_i de norme spectrale ρ_i dans l'algèbre source $\mathscr{B}$. Sa forme initiale appartient donc à $\widetilde{\mathscr{B}}$. Son annulation au réduit de y équivaut à $|f_i(y)| < \rho_i$, et sa non-annulation équivaut à $|f_i(y)| = \rho_i$.

768. Bornes strictes pour la fonction analytique relevée

Texte visé. Proposition 15.5.6, démonstration, p. 429.

`fd-berk.tex`, lignes 1767–1773.

Correction. Dans les deux occurrences où ρ_ℓ désigne une fonction, écrire λ_ℓ. Son lieu d'annulation est un fermé analytique propre puisqu'elle est non nilpotente. Tout point de K est Zariski dense dans Y. Si $K \neq \emptyset$, le minimum de $|\lambda_\ell|$ sur K est donc positif, et le lemme 15.5.5 donne un maximum strictement inférieur à ρ_ℓ. Prendre r_ℓ strictement entre 0 et le minimum, et R_ℓ strictement entre le maximum et ρ_ℓ. Si $K = \emptyset$, prendre le domaine rationnel vide.

769. Virgule après les rayons

Texte visé. Preuve de la proposition 15.5.6, p. 429.

`fd-berk.tex`, ligne 1798.

Correction. Dans le cas $y \in \partial(V/W)$, écrire « Par définition de r_ℓ et R_ℓ, on en déduit » pour introduire l'inégalité de valeurs absolues.

770. Sens du morphisme fini et plat

Texte visé. Preuve du lemme 15.6.2, p. 431.

`fd-berk.tex`, lignes 2368–2376.

Correction. Écrire que $q \circ f$ induit un morphisme fini et plat de U sur V. Le voisinage U est dans la source et V dans la cible. Dans le calcul affiché, le degré du représentant s'obtient en sommant les degrés locaux des antécédents choisis.

771. Verbe dans le calcul du degré

Texte visé. Preuve du lemme 15.6.2, p. 431.

`fd-berk.tex`, ligne 2369.

Correction. Juste avant la somme des degrés sur les cellules du demi-espace positif, écrire « Par définition du degré, on a donc ».

772. Niveau de l'espace analytique

Texte visé. Proposition 16.1.1, page PDF 435 (sans folio imprimé).

`courants-berk.tex`, ligne 23.

Correction. Lire « Soit X un n-espace k-analytique » au début de l'énoncé.

773. Intégrabilité dans la comparaison pondérée

Texte visé. Proposition 16.1.2, remarque après l'énoncé, p. 436.

`courants-berk.tex`, lignes 60–64.

Correction. Écrire « Notons que pour c) ». L'intégrabilité locale de f^*u requise pour cette comparaison est automatique si u est localement bornée ou si f ne contracte aucune composante de dimension n. Dans ce dernier cas, f induit une immersion par morceaux entre parties squelettiques.

774. Dernier accouplement de la comparaison pondérée

Texte visé. Preuve de la proposition 16.1.2(c), p. 436.

`courants-berk.tex`, ligne 89.

Correction. Dans la dernière ligne du calcul, écrire

$$\langle u \ \mathrm{dc}_f[\omega], \alpha \rangle.$$

Ici ω est de bidegré (p, q) et α est une forme lisse à support compact de bidegré $(n-p, n-q)$.

775. Cas initial et cas d'un premier facteur lisse

Texte visé. Preuve de la proposition 16.1.5, p. 437.

`courants-berk.tex`, lignes 184–194.

Correction. Pour $m = 0$, appliquer la proposition 16.1.2(b), qui donne l'identité de degré maximal $f_*\delta_Y = \mathrm{dc}_f \ \delta_X = d\,\delta_X$, avec le degré générique de l'énoncé. Après la phrase qui établit la stabilité par limite uniforme, écrire « démontrons (i) » pour passer au cas où u_1 est lisse.

776. Facteurs tirés en arrière dans l'appariement sur la source

Texte visé. Proposition 16.1.5, démonstration, p. 437.

`courants-berk.tex`, lignes 199–205.

Correction. Dans le produit de courants sous la dérivée extérieure de l'appariement sur Y, écrire $\mathrm{d}'\mathrm{d}''(f^*u_2)$. Tous les facteurs y sont formés à partir des f^*u_j sur Y, conformément à la récurrence de Bedford–Taylor.

777. Ouverture de la section sur les intégrales fibre

Texte visé. § 16.2.1, p. 438.

`courants-berk.tex`, ligne 227.

Correction. Lire « Dans toute cette section » au début du paragraphe.

778. Projection sur la base du produit

Texte visé. Preuve de la proposition 16.2.2, p. 438.

`courants-berk.tex`, ligne 294.

Correction. Appliquer le lemme 14.2.10(a) au morphisme $p_1 \colon X \times \mathbb{G}_m^d \to X$ et aux moments f', $f \circ p_1$ et p_2. Pour z d'image x par p_1, on a ainsi $z \in \Sigma_{f'}$ si et seulement si $x \in \Sigma_f$ et z appartient au squelette canonique du tore $\mathbb{G}^d_{m,\mathscr{H}(x)}$.

779. Forme intégrée sur la cellule tropicale

Texte visé. Preuve de la proposition 16.2.2, p. 439.

`courants-berk.tex`, ligne 367.

Correction. Dans le calcul de $u(x)$ pour $x \in \mathring{C}$, écrire

$$u(x) = \sum_{D \in \mathscr{D}'_C} \frac{e_D}{d_C} \int_{g_{\mathrm{trop}}(D_x)} \lambda_D \alpha_D = \sum_{D \in \mathscr{D}'_C} \frac{e_D}{d_C}\, v_D(x).$$

La forme α_D est celle de la carte qui définit v_D. L'intégrale reste prise avec le calibrage canonique de $\mathbb{R}^d$.

780. Valeur de comparaison à la limite

Texte visé. Preuve de la proposition 16.2.2, p. 440.

`courants-berk.tex`, ligne 391.

Correction. Pour une cellule Γ contenant C, écrire « Nous allons déterminer la limite de $u(\xi)$ lorsque ξ est un point de $\mathring{\Gamma}$ tendant vers x, et la comparer avec $u(x)$ ».

781. Nature du renvoi sur la décomposition cellulaire

Texte visé. Preuve de la proposition 16.2.2, p. 440.

`courants-berk.tex`, ligne 419.

Correction. Pour la décomposition de Δ_x en cellules D_x, écrire « corollaire 2.3.7(b) ».

782. Antécédents dans la fibre du moment composé

Texte visé. Preuve du lemme 16.2.3, p. 441.

`courants-berk.tex`, lignes 462–463.

Correction. Écrire « antécédent de (x,t) » aux deux endroits. Tout antécédent de (x,t) par g' appartient à $\Sigma_h = (g')^{-1}(\Sigma_{f'})$. Les antécédents par $g'|_V$ appartiennent donc à $E = V \cap \Sigma_h$. Chaque cellule de E contient y, et g' est injective sur chacune, de sorte que y est l'unique antécédent dans V.

783. Projection utilisée pour relever un point voisin

Texte visé. Preuve du lemme 16.2.3, p. 442.

`courants-berk.tex`, lignes 533–534.

Correction. Pour la coface $D \subset \Delta$, appliquer le corollaire 1.8.6 à $h_{\mathrm{trop}}(\Delta)$, à la première projection $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ et au point $h_{\mathrm{trop}}(y)$. Pour tout ζ assez proche de $f_{\mathrm{trop}}(x)$ dans $f_{\mathrm{trop}}(\Gamma)$, on obtient $(\zeta, t) \in h_{\mathrm{trop}}(\Delta)$. Ainsi, pour ξ assez proche de x dans Γ, le point (ξ, t) admet un antécédent sur Δ par g'.

784. Espace ambiant des parties squelettiques

Texte visé. Preuve du théorème 16.2.4, ouverture, p. 443.

`courants-berk.tex`, lignes 617–619.

Correction. Écrire « Soit Σ une partie squelettique compacte de Y. Il faut démontrer que Σ est contenue dans une partie squelettique compacte de Y purement de dimension n, ce qui peut se faire G-localement sur Σ ».

785. Référence pour les moments sur la base et la fibre

Texte visé. Preuve du théorème 16.2.4, ouverture, p. 443.

`courants-berk.tex`, ligne 621.

Correction. Lire « D'après la preuve de la proposition 9.1.8 » de Ducros et Thuillier, pp. 58–60 du préprint de septembre 2024. Dans les voisinages affinoïdes de cette preuve, les unités $h_1, \dots, h_m$ sont prises sur la base et les unités $h_{m+1}, \dots, h_n$ sur la source. Ces deux blocs forment une base d'Abhyankar conjointe aux points considérés. La preuve utilise la compacité de la partie squelettique pour obtenir un G-recouvrement fini par des parties squelettiques compactes sur lesquelles on dispose de ces moments. Preuve de la proposition 9.1.8

786. Dimension du squelette de la base

Texte visé. Preuve du théorème 16.2.4, p. 443.

`courants-berk.tex`, lignes 649–653.

Correction. Dans la base X de dimension m, choisir un squelette pur T de dimension m. Cette dimension correspond au niveau de la très grande richesse utilisée et au degré de la forme considérée ensuite.

787. Moment qui définit le squelette de la fibre

Texte visé. Preuve du théorème 16.2.4, p. 443.

`courants-berk.tex`, ligne 660.

Correction. Écrire $p(y) \in \mathrm{T} \subset \Sigma_{f'}$ et $y \in \Sigma_{g|_{Y_{p(y)}}}$. Le lemme 14.2.10(a) donne alors $y \in \Sigma_{p^* f', g}$.

788. Fibre qui intervient dans le critère de platitude

Texte visé. Preuve de la proposition 16.3.1, p. 444.

`courants-berk.tex`, ligne 778.

Correction. Pour $s \in S_x$, le morphisme $f|_{Y_x} : Y_x \to \mathbb{G}^d_{m,\mathscr{H}(x)}$ est plat et de dimension relative nulle en tout point de $(f')^{-1}(s)$, où $f' = (p, f)$. C'est cette fibre qui intervient dans l'application du critère de platitude par fibre à f'.

789. Espace cible dans le calcul des degrés

Texte visé. Preuve de la proposition 16.3.1, p. 445.

`courants-berk.tex`, lignes 794–795.

Correction. Dans la phrase qui introduit la somme alternée des degrés, écrire « pour tout point z de $X \times_k \mathbb{G}^d_m$ ». On peut employer $X \times_k Z$ après avoir défini une polycouronne compacte Z contenant les coordonnées cibles et restreint le but du morphisme en conséquence.

790. Affinoïde ambiant des domaines rationnels

Texte visé. Preuve du lemme 16.3.2, p. 446.

`courants-berk.tex`, lignes 872–873 et 882–883.

Correction. Aux lignes 872–873, situer l'affinoïde $X \times_k Z$ dans $X \times_k \mathbf{G}^d_m$, où Z est la polycouronne compacte choisie. Aux lignes 882–883, après le raffinement rationnel fini, considérer V comme un domaine rationnel non vide de $X \times_k Z$. Les fonctions f_j du système d'inégalités sont analytiques sur ce même affinoïde.

791. Introduction et indices du système d'inégalités

Texte visé. Preuve du lemme 16.3.2, p. 446.

`courants-berk.tex`, ligne 880 et lignes 891–892.

Correction. À la ligne 880, lire « Il suffit ». Aux lignes 891–892, prendre $J \subset \{0, \dots, p\}$, où p est le dernier indice du système d'inégalités affiché.

792. Raffinement commun des décompositions cellulaires

Texte visé. Preuve du théorème 16.3.3(a), p. 447.

`courants-berk.tex`, lignes 1012–1013.

Correction. Sur $X_i \cap Y_j$, prendre le moment (f_i, g_j) et raffiner la trace de $\mathscr{C}_i \times \mathscr{D}_j$ sur $(f_i, g_j)_{\mathrm{trop}}(X_i \cap Y_j)$. Pour chaque nouvelle cellule E, chacune des deux projections de $\mathring{E}$ est contenue dans l'intérieur relatif d'une unique cellule ancienne, C pour la première et D pour la seconde. Sur E, poser $w_E = u_C \circ p_1 + v_D \circ p_2$, avec les deux projections vers ces cellules.

793. Coordonnées constantes du moment relatif

Texte visé. Preuve du théorème 16.3.3, p. 448.

`courants-berk.tex`, lignes 1030–1034.

Correction. Si g a $\delta \leq d$ coordonnées, poser $g' = (g, 1, \dots, 1)$ en ajoutant $d - \delta$ coordonnées égales à 1. Utiliser alors le couple (f, g'), dont la réalisation sur Y est $(f \circ p, g')$. Les nouvelles coordonnées tropicales sont nulles et conservent l'information fournie par g.

794. Signe de la formule d'inclusion–exclusion

Texte visé. Preuve du théorème 16.3.3, p. 448.

`courants-berk.tex`, lignes 1058–1062.

Correction. Pour chaque ensemble non vide J d'indices, donner à l'intégrale u_J sur l'intersection des $W_{j,v}$ le coefficient $(-1)^{|J|+1}$. Le signe résulte de l'identité d'inclusion–exclusion des indicatrices. Avec un seul domaine, le coefficient doit valoir $+1$. Dans la réduction qui suit, considérer chacun des domaines d'intersection $\bigcap_{j\in J} W_j$, pour J non vide.

795. Image de la section squelettique choisie

Texte visé. Preuve du théorème 16.3.3, p. 449.

`courants-berk.tex`, lignes 1108–1140.

Correction. Dans la réduction commune à (a)–(c) et dans celle de (d), remplacer Σ par l'image de la section paralinéaire locale choisie à valeurs dans Σ_Z. Si P' est le morceau de l'image tropicale sur lequel on a choisi la section, la tropicalisation restreinte est alors un isomorphisme de cette image de la section sur P'.

796. Renvois dans la preuve de régularité

Texte visé. Preuve du théorème 16.3.3(d), p. 449.

`courants-berk.tex`, lignes 1135–1143.

Correction. Aux lignes 1135 et 1143, lire respectivement « L'assertion (d) à montrer » et « Pour démontrer (d) ». La semi-continuité supérieure est l'assertion (c).

797. Singleton fermé associé au point rigide

Texte visé. Preuve du corollaire 16.3.4, p. 450.

`courants-berk.tex`, ligne 1218.

Correction. Lire « le singleton $\{x\}$ ». Dans l'argument sur le point rigide, ce singleton est le fermé de Zariski auquel on applique l'assertion (a).

798. Corps de base de la fibre analytique

Texte visé. Proposition 16.4.1(a), p. 451.

`courants-berk.tex`, lignes 1247–1257.

Correction. Considérer $f^{-1}(x)$ comme un espace $\mathscr{H}(x)$-analytique de niveau $n-m$. Pour un point y de la fibre, l'additivité donne

$$d_k(y) = d_k(x) + d_{\mathscr{H}(x)}(y).$$

La pleine transcendance résiduelle de x donne $d_k(x) = m$, et $d_k(y) \leq n$. La dimension de la fibre sur $\mathscr{H}(x)$ est donc au plus $n-m$.

799. Approximation du dénominateur par différence

Texte visé. Preuve de la proposition 16.4.1, p. 451.

`courants-berk.tex`, lignes 1306–1315.

Correction. Exiger $|h' - h| < r$ sur la fibre, avec $|f_i' - f_i| < \lambda_i r$. Si $|h| \geq r$ ou $|h'| \geq r$, l'ultramétrie donne $|h| = |h'| \geq r$. Sur ce lieu, les erreurs sur les numérateurs sont strictement inférieures à $\lambda_i |h|$, donc les deux systèmes d'inégalités rationnelles définissent le même domaine.

800. Relèvement des paramètres du modèle résiduel

Texte visé. Preuve de la proposition 16.4.1, p. 452.

`courants-berk.tex`, lignes 1362–1366.

Correction. Choisir le point fermé ξ dans le lieu régulier non vide de M'. Choisir un système régulier de paramètres $\beta_1, \dots, \beta_m$ en ξ. Chaque paramètre, vu dans le corps des fonctions de M', se relève en un élément de $\mathscr{H}(x)$ de norme un avec réduction β_i. L'approximation au point presque bon donne, sur un voisinage analytique assez petit, des unités b_i telles que $|b_i(x)| = 1$ et $\widetilde{b_i(x)} = \beta_i$. Ce sont ces paramètres qui interviennent dans la valuation choisie ensuite.

801. Moment de base dans le calcul du cône

Texte visé. Preuve de la proposition 16.4.1, p. 452.

`courants-berk.tex`, lignes 1383–1387.

Correction. Le cône décrit par la valuation est celui de $b_{\text{trop}}(X', x)$, où b est le moment sur la base constitué des b_i. La dimension tropicale en x se calcule pour $b|_{X'}$ et vaut m. On obtient $x \in \Sigma^{(m)}_{b|_{X'}}$ et on choisit une b-cellule $C \subset \Sigma_b$ de dimension m, contenant x et contenue dans X'. Le moment g intervient ensuite sur les fibres.

802. Polydisque unité et très grande richesse

Texte visé. Preuve du théorème 16.4.4, p. 454.

`courants-berk.tex`, ligne 1533.

Correction. Écrire « le polydisque unité D est très riche ». Cette propriété est celle de la proposition sur les polydisques qui précède le théorème.

803. Décompositions adaptées sur la source et la base

Texte visé. Théorème 16.5.4, démonstration, p. 456.

`courants-berk.tex`, lignes 1697–1704.

Correction. Nommer $\mathscr{D}$ la décomposition sur la source dès son introduction. Raffiner pour que toute cellule D de $\mathscr{D}$ se projette sur une cellule C de la décomposition $\mathscr{C}$ de la base. Le découpage par fibres utilise cette cellule cible et son poids de calibrage dans le quotient d_D/d_C.

804. Introduction de la fonction méromorphe régulière

Texte visé. § 16.7.1, p. 460.

`courants-berk.tex`, ligne 2064.

Correction. Lire « Soit f une fonction méromorphe régulière sur X ».

805. Prolongement du courant logarithmique

Texte visé. § 16.7.2, p. 460.

`courants-berk.tex`, ligne 2082.

Correction. Lire « le courant $[\log|f|]$ sur U se prolonge en un unique courant de bidegré $(0,0)$ sur X » dans la phrase qui fixe ce prolongement.

806. Recouvrement du support et formes des cartes

Texte visé. Preuve du théorème 16.7.3, p. 461.

`courants-berk.tex`, lignes 2340–2361.

Correction. Écrire « telle que tout point du support de ω soit contenu dans l'intérieur de l'un des V_i ». Pour toute intersection V_E, la présentation de $\omega|_{V_E}$ associée au moment g_E et à la forme α_E sur son image tropicale s'écrit $\omega|_{V_E} = g_E^*\alpha_E$.

807. Support utilisé pour la troncature

Texte visé. Preuve du théorème 16.7.3, p. 461.

`courants-berk.tex`, ligne 2401.

Correction. À la ligne 2401, prendre le support de $d''\omega_1$. Le choix de $s > 0$ donne $|f| > s$ sur ce support, qui est ainsi contenu dans l'intérieur de $V_{\geq s}$.

808. Fibre analytique au-dessus de zéro

Texte visé. Preuve du théorème 16.7.3, p. 462.

`courants-berk.tex`, lignes 2452–2454.

Correction. Poser $X_0 = f^{-1}(0)$ avec sa structure de fibre analytique. La forme $\omega_1|_{X_0}$ est à support dans $V_0 = V \cap X_0$ et coïncide avec $\omega|_{X_0}$ près de V_0. On a donc $\int_{V_0}\omega = \int_{X_0}\omega_1$, en intégrant avec les multiplicités de la fibre analytique.

809. Indices des moments et de la forme sur la tranche

Texte visé. Preuve du théorème 16.7.3, p. 462.

`courants-berk.tex`, lignes 2490–2507.

Correction. Pour E fixé, utiliser h_E comme moment sur $V_{E,[s,t]}$. Les polyèdres calibrés P et Q proviennent respectivement de $g_{E,\mathrm{trop}}(V_{E,0})$ et de $h_{E,\mathrm{trop}}(V_{E,[s,t]})$, en dimensions $n-1$ et n. Dans l'intégrale de bord sur Q, la forme à apparier avec ν est $d''t \wedge u_1\alpha_E$, où t dans la différentielle désigne la dernière coordonnée tropicale.

810. Cellules du produit calibré

Texte visé. Preuve du théorème 16.7.3, p. 462.

`courants-berk.tex`, lignes 2511–2515.

Correction. Lire « L'ensemble des parties de la forme $C\times\{\sigma\}$, $C\times\{\tau\}$ et $C\times[\sigma,\tau]$, où $C\in\mathscr{C}$, est une décomposition cellulaire de $P\times[\sigma,\tau]$ adaptée à son calibrage. » Supprimer le fragment détaché « est la réunion de $P\times\{\sigma\}$, ».

811. Calibrage dans l'intégrale du bord du produit

Texte visé. Preuve du théorème 16.7.3, p. 463.

`courants-berk.tex`, ligne 2524.

Correction. La contribution de $F\times\{\sigma\}$ est celle de cette cellule à l'intégrale $\int_Q^{\partial}\langle d''t\wedge u_1\alpha_E,\nu\rangle$. Dans le calcul par cellules, la discordance de la face inférieure reste le produit de $-\mu_F$ par le vecteur-volume $|e|$.

812. Indice du domaine dans l'intégrale de bord

Texte visé. Preuve du théorème 16.7.3, p. 463.

`courants-berk.tex`, lignes 2547–2550.

Correction. Pour l'ensemble non vide E fixé par l'argument local, écrire

$$\int_{V_{E,\geq s}}^{\partial} d''(\log|f|)\wedge\omega_1=-\int_{V_{E,0}}\omega.$$

Les deux domaines portent le même indice E. Appliquer ensuite les deux formules d'inclusion–exclusion déjà écrites pour obtenir l'identité globale.

813. Accord au pluriel dans l'introduction

Texte visé. § 16.8.1, p. 463.

`courants-berk.tex`, ligne 2564.

Correction. Lire « à certains courants de la forme $T\wedge\alpha$ ».

814. Bidegré complémentaire de la forme test

Texte visé. Théorème 16.9.2, p. 466.

`courants-berk.tex`, lignes 2998–3005.

Correction. Préciser que α est lisse de bidegré $(n-m,n-m)$. Le produit avec les m facteurs de bidegré $(1,1)$ a alors le bidegré (n,n), qui permet de le considérer comme une mesure scalaire. Ce type est aussi celui de la formule de convergence utilisée dans la preuve.

815. Composantes de dimension maximale de l'espace

Texte visé. Preuve du corollaire 16.9.4, p. 467.

`courants-berk.tex`, ligne 3049.

Correction. Après le remplacement de X par l'intérieur de W, écrire « une fonction analytique f sur X qui ne s'annule identiquement sur aucune composante irréductible de dimension n de X et telle que $Y \subset V(f)$ ».

816. Sens du renvoi dans l'égalité des courants

Texte visé. Preuve du corollaire 16.9.5, p. 467.

`courants-berk.tex`, ligne 3076.

Correction. À la ligne 3076, écrire « membre de droite ». L'accouplement de ce membre est l'intégrale sur X pondérée par le degré prolongé.

817. Forme test dans les produits extérieurs

Texte visé. Preuve du corollaire 16.9.5, pp. 467–468.

`courants-berk.tex`, lignes 3085–3150.

Correction. Aux lignes 3085, 3088 et 3150, utiliser la forme lisse α dans le produit extérieur. Pour les potentiels u_i, l'expression de la mesure est

$$\mu_\alpha = d'd''u_1 \wedge \cdots \wedge d'd''u_m \wedge \alpha.$$

La même forme intervient dans le membre de droite de l'égalité des accouplements et dans l'expression avec les approximants lisses. Elle est à support compact et de bidegré complémentaire $(n-m, n-m)$.

818. Domaine de l'intégrale finale sur la source

Texte visé. Corollaire 16.9.5, démonstration, p. 468.

`courants-berk.tex`, lignes 3135–3142.

Correction. Dans la dernière intégrale sur la source, écrire Y. L'intégrande entier est le tiré en arrière d'une forme test de degré supérieur sur X. Cette forme s'annule sur un voisinage du fermé exceptionnel de dimension inférieure, donc son tiré en arrière s'annule sur la préimage de ce voisinage. Sur le complémentaire, l'identité du morphisme fini compare l'intégrale source à l'intégrale cible pondérée par le degré. L'intégrale source se prolonge ainsi à tout Y.

819. Limite des approximants lisses psh

Texte visé. Preuve du corollaire 16.9.5, p. 468.

`courants-berk.tex`, ligne 3146.

Correction. Après localisation, pour chaque i, la suite de fonctions lisses psh $(u_i^j)_j$ converge uniformément vers u_i.

820. Renvoi à la continuité des produits

Texte visé. Preuve du corollaire 16.9.5, p. 468.

`courants-berk.tex`, ligne 3151.

Correction. Écrire « En vertu de la proposition 8.7.2 ». Pour l'appliquer au produit sur Y, utiliser le courant de départ fermé dans la formulation de n° 61.

821. Métrique et espace total du fibré en droites

Texte visé. Preuve de la proposition 17.1.7, p. 473.

`metriques.tex`, lignes 180–189.

Correction. Utiliser $\mathbf{V}(L)$ dans les deux occurrences et écrire « soit $\|\cdot\|$ une métrique continue sur L ». La section inversible s sur U donne un isomorphisme $\mathbf{V}(L)|_U \simeq \mathbb{A}^1 \times U$, qui identifie le complémentaire de la section nulle à $\mathbb{G}_m \times U$. La métrique s'écrit $(t, x) \mapsto |t|\,\|s(x)\|$ dans cette trivialisation.

822. Hypothèses de la partition lisse et approximation de la métrique

Texte visé. Proposition 17.1.8 et sa preuve, p. 473.

`metriques.tex`, lignes 204–215.

Correction. Écrire « peut être approchée ». L'existence de la partition lisse $(\lambda_i)_i$ subordonnée aux ouverts de trivialisation utilise la paracompacité et la séparation holomorphe locale, comme dans la proposition 15.2.8. Pour $f : Y \to X$ et une section inversible s de f^*L, la formule au point $y \in Y$ est

$$\log \|s\|(y) = \sum_i \lambda_i(f(y))\, \log |s/f^*s_i|(y).$$

Chaque produit est prolongé par zéro hors du domaine de son repère. Pour approcher une métrique continue, approcher sur les compacts le logarithme de son rapport à la métrique lisse construite, puis multiplier celle-ci par l'exponentielle de l'approximation.

823. Poids évalués sur la base du fibré tiré en arrière

Texte visé. Proposition 17.1.8, démonstration, p. 473.

`metriques.tex`, lignes 212–220.

Correction. Dans la formule sur Y, écrire

$$\log\|s(x)\| = \sum_i \lambda_i(f(x)) \log |s/f^*s_i|(x).$$

Chaque repère est tiré en arrière sur son domaine et les poids y somment à un. La multiplication de s par une unité ajoute donc le logarithme de sa valeur absolue. Sur des repères ordinaires de X, la somme localement finie de fonctions lisses à facteurs de partition lisses définit bien une métrique lisse.

824. Constantes de norme indexées par la base

Texte visé. Remarque 17.2.4, p. 475.

`metriques.tex`, lignes 364–377.

Correction. Remplacer $c_{i\ell}$ par $c_{ij\ell} > 0$ dans la formule

$$\|e_{ij}\|_{|X_{i\ell}} = c_{ij\ell}|g_{ij\ell}|.$$

Après division par l'unité $g_{ij\ell}$, le j-ième vecteur de la base orthogonale a la norme constante $c_{ij\ell}$. Le cas strictement entier permet une base orthonormée.

825. Recouvrement et bases orthonormales locales

Texte visé. § 17.2.6, p. 476.

`metriques.tex`, lignes 415–416.

Correction. Écrire « il existe un G^{str}-recouvrement (X_i) de X tel que $E|_{X_i}$ soit pour tout i isomorphe à une somme directe orthogonale finie de copies du fibré en droites trivial ».

826. Indépendance des bases orthogonales pour le produit tensoriel

Texte visé. § 17.2.7, p. 476.

`metriques.tex`, ligne 435.

Correction. Écrire « bases orthogonales » dans la phrase sur l'indépendance du choix des bases. Dans les bases orthogonales (e_i) et (f_j), le tenseur $\sum_{i,j} a_{ij} e_i \otimes f_j$ a pour norme

$$\max_{i,j} |a_{ij}| \, \|e_i\| \, \|f_j\|.$$

Pour toute écriture du tenseur comme somme de tenseurs simples, l'inégalité ultramétrique borne ce maximum par le plus grand produit des normes des facteurs. L'écriture dans la base $(e_i \otimes f_j)$ réalise cette borne. La formule donne donc la norme intrinsèque définie par l'infimum sur ces écritures.

827. Métrique sur le fibré dual

Texte visé. § 17.2.7, p. 476.

`metriques.tex`, lignes 450–452.

Correction. Écrire « on munit $E^\vee$ de la métrique pour laquelle la base duale $(e_i^\vee)$ est orthogonale », avec $\|e_i^\vee\| = \|e_i\|^{-1}$. Sur chaque fibre, c'est la norme d'opérateur des formes linéaires pour la métrique donnée sur E. Cette description intrinsèque permet le recollement G-local ou G^{str}-local.

828. Coordonnées analytiques de la section dans le repère orthogonal

Texte visé. §17.2.9, démonstration, p. 476.

`metriques.tex`, lignes 465–475.

Correction. Dans le repère orthogonal choisi écrire $s = \sum_i a_i e_i$, avec a_i analytiques. L'inégalité $\|s\| \leq r$ équivaut aux inégalités sur les produits de $|a_i|$ par les poids des vecteurs de base. Sur les G-domaines où ces poids sont des produits de puissances rationnelles de normes d'unités, chasser les dénominateurs et appliquer les inégalités de domaine analytique. Pour la variante stricte, les seuils appartiennent à l'enveloppe divisible du groupe des valeurs.

829. Image de la base source par l'isomorphisme gradué

Texte visé. Lemme 17.3.2(b), démonstration, p. 477.

`metriques.tex`, lignes 571–577.

Correction. Prendre pour base homogène cible la famille $\big(\theta(\widetilde{e_i(x)})\big)_i$ et la relever en sections f_i de F. L'indépendance de leurs classes résiduelles donne un repère près de x. La conservation des degrés donne $\|f_i(x)\| = \|e_i(x)\|$. L'application de repères $e_i \mapsto f_i$ préserve donc la norme

maximum pondérée en x, et sa réduction réalise l'image prescrite de chaque vecteur de la base source.

830. Qualification des bases résiduelles et analytiques

Texte visé. §§ 17.3.4–17.3.5, pp. 479–480.

`metriques.tex`, lignes 753–777.

Correction. À la ligne 753, lire « une base orthonormée » pour la base graduée au-dessus de $\widetilde{(V_i, x)}$. À la ligne 777, lire « une base orthogonale » pour la base de $E|_V$ dont les vecteurs ont une norme constante sur V.

831. Réduction du tenseur de deux relèvements

Texte visé. § 17.4.2, p. 480.

`metriques.tex`, ligne 832.

Correction. Écrire $\widetilde{s \otimes t}$ dans la fibre graduée du tensoriel. Si les deux classes homogènes ont degrés r et r', cette réduction se prend en degré rr'. Remplacer s ou t par un autre relèvement ne change le tenseur que par un terme de norme strictement inférieure à rr', qui s'annule en ce degré.

832. Base orthogonale à poids constants

Texte visé. Preuve du lemme 17.4.4, p. 481.

`metriques.tex`, lignes 912–913.

Correction. Écrire « Choisissons une base orthogonale (s_i) de $E|_V$ telle que $\|s_i\|$ soit constante, de valeur ρ_i, pour tout i ». Ces poids interviennent dans les estimations de contraction pour u et u^{-1}.

833. Trivialisation du fibré cible au point marqué

Texte visé. Corollaire 17.4.6, p. 482.

`metriques.tex`, lignes 983–989.

Correction. Utiliser le même point x pour le fibré cible. Choisir un voisinage analytique commun de x où les deux fibrés ont des repères. Relever l'isométrie graduée au moyen de ces repères, puis rétrécir par le critère d'isométrie résiduelle sur le germe du domaine distingué.

834. Restriction dans la catégorie des germes

Texte visé. § 17.4.8, p. 483.

`metriques.tex`, lignes 1064–1071.

Correction. Pour $V \subseteq U$, les morphismes $(V, F) \to (U, E)$ sont les isométries $F \to E|_V$. Les deux fibrés sont ainsi définis sur V avant la localisation qui forme la catégorie des germes.

835. Domaine des inégalités pour le maximum

Texte visé. Preuve du lemme 17.4.10, p. 484.

`metriques.tex`, lignes 1148–1160.

Correction. Définir W par $\|s\|^{-1} \geq r_i|a_i|$ pour tout i. Sa réduction est décrite dans $\widetilde{(X,x)}$ par $v(\widetilde{s(x)})^{-1} \geq v(\widetilde{a_i(x)})$ pour tout i, avec les facteurs r_i normalisés comme en n° 443. L'intersection $W \cap \bigcup_i V_i$, où V_i est le lieu de l'égalité individuelle, est alors exactement le lieu de l'égalité avec le maximum.

836. Inverse dans la formule résiduelle

Texte visé. Preuve du lemme 17.4.10, p. 484.

`metriques.tex`, lignes 1163–1164.

Correction. Au terme du calcul de la réduction du lieu d'égalité, écrire

$$v(\widetilde{s(x)})^{-1} = \max_i v(\widetilde{a_i(x)}).$$

L'inverse du membre de gauche figure déjà dans l'énoncé du lemme.

837. Image du germe gradué dans l'espace de degré un

Texte visé. §17.5.2, p. 486.

`metriques.tex`, lignes 1308–1315.

Correction. Dans la parenthèse, prendre l'image de $\widetilde{(V,x)}$ dans l'espace de valuations de degré un. Pour un germe strict, c'est l'unique ouvert de degré un dont l'image réciproque est le germe gradué entier. Le fibré résiduel de degré un se restreint à cet ouvert.

838. Voisinage commun dans le relèvement strict

Texte visé. Corollaire 17.5.5, p. 487.

`metriques.tex`, lignes 1383–1393.

Correction. Demander que le fibré cible soit trivialisable près de x. Relever l'isomorphisme des fibrés résiduels de degré un aux fibrés gradués stricts. Choisir les repères autour de ce même point et appliquer le critère d'isométrie résiduelle après rétrécissement.

839. Familles finies non vides dans les critères de maximum

Texte visé. Lemme 17.5.8 et corollaire 17.5.9, p. 488.

`metriques.tex`, lignes 1435–1457.

Correction. Au lemme 17.5.8, lire « Soit s une section de E sur X telle que $\|s(x)\| = 1$, et soit $(a_1, \dots, a_n)$ une famille non vide de fonctions analytiques sur X ». Au corollaire 17.5.9, lire « telle que $\|s(x)\| = 1$ et soit (a_i) une famille finie non vide d'éléments de $\mathscr{O}^\times_{X,x}$ ». Dans les deux passages, garder la condition $|a_i(x)| = 1$ pour tout i.

840. Exposant de la puissance tensorielle

Texte visé. Proposition 17.6.4(c), p. 491.

`metriques.tex`, lignes 1704–1709.

Correction. Écrire $E_i^{\otimes q}$, avec la puissance q de l'exposant caractéristique p déjà introduite. On peut aussi introduire N par $q = p^N$ avant d'écrire $E_i^{\otimes p^N}$. La correction porte sur l'exposant dans l'énoncé.

841. Théorème utilisé aux deux étapes du relèvement étale

Texte visé. Preuve de la proposition 17.6.4(a), p. 491.

`metriques.tex`, lignes 1747–1763.

Correction. Aux lignes 1747 et 1763, citer le théorème 3.4.1 de Berkovich. À la première occurrence, l'extension finie modérément ramifiée de $\mathscr{H}(\eta_r)$ donne un germe étale pointé au-dessus de $(\mathbb{G}_m^d, \eta_r)$. À la seconde, le facteur rationnel distingué de l'algèbre étale après changement de base donne la section du germe étale tiré en arrière sur (X, x). Le point de Gauss de référence est η_r dans les deux applications.

842. Signe dans le changement de métrique

Texte visé. Preuve du corollaire 17.7.6, p. 494.

`metriques.tex`, lignes 2111–2117.

Correction. Si $m' = me^f$ et si u approche f, remplacer $m'e^u$ par $m'e^{-u}$. Le quotient de la métrique obtenue par la métrique cible est alors e^{f-u}, ce qui donne les deux bornes voulues. Cette correction s'applique même lorsque $u = f$ est strictement entière.

843. Fibré restreint à la clôture réduite dans le pré-modèle

Texte visé. Lemme 17.7.10, pp. 495–496.

`metriques.tex`, lignes 2187–2258.

Correction. Utiliser $(V, \mathfrak{E}_{\mathrm{s}}|_V)$ dans le lemme et à la dernière ligne de la démonstration. Sur une trivialisation formelle, le repère réduit sur V est la base issue du repère analytique de norme un sur le tube. Ces repères et leurs matrices de changement identifient le tiré en arrière du fibré restreint de la fibre spéciale au fibré résiduel strict.

844. Repères formels et restriction à la clôture de spécialisation

Texte visé. Preuve du lemme 17.7.10, p. 495.

`metriques.tex`, lignes 2198–2205.

Correction. Pour chaque domaine générique $X_i = \mathfrak{X}_{i,\eta}$, prendre pour e_{ij} l'image du vecteur de base formel dans $E(X_i)$. Les domaines en nombre fini qui contiennent x ont une réunion contenant un voisinage ordinaire de x dans X. Sur la clôture réduite V du point de spécialisation, prendre $V_i = V \cap \mathfrak{X}_{i,s}$. Les repères de norme 1 donnent des bases de degré 1. Leurs transitions recollent le fibré sur les ouverts V_i. Le fibré de la fibre spéciale est lui-même restreint à V, comme dans n° 843.

845. Définition de l'effectivité numérique résiduelle

Texte visé. Énoncé de la proposition 17.8.4, p. 497.

`metriques.tex`, lignes 2393–2394.

Correction. Pour l'effectivité numérique du fibré résiduel $\widetilde{L_x}$, citer 10.7.14. Cette définition demande un modèle du fibré résiduel et y teste l'effectivité numérique au sens des schémas donné en 10.4.11. C'est l'hypothèse résiduelle utilisée dans la construction sur un voisinage commun de n° 68.

846. Carte où le quotient est holomorphe

Texte visé. Preuve de la proposition 17.8.6, p. 499.

`metriques.tex`, lignes 2504–2510.

Correction. Le quotient T_j/T_0 est holomorphe sur $D(T_0)$. Remplacer $D(T_j)$ par $D(T_0)$ dans la phrase qui l'introduit. Le voisinage utilisé ensuite est contenu dans $D(T_0 \cdots T_p)$.

847. Attribution du critère analogue à la condition kählérienne

Texte visé. Remarque 17.8.10, p. 500.

`metriques.tex`, lignes 2598–2600.

Correction. Attribuer à Li la proposition de considérer la projectivité de la fibre spéciale d'un modèle formel comme un analogue de la condition kählérienne. Scholze présente cette proposition et explique l'analogie avec la positivité de la métrique. La conjecture de symétrie de Hodge qu'il cite concerne un espace rigide-analytique propre et lisse admettant un tel modèle. La question posée dans la remarque de Chambert-Loir–Ducros porte sur l'approximation psh globale. Scholze, Congrès international des mathématiciens 2018, p. 902

848. Corps de base dans la complétion des différentielles

Texte visé. § 18.2.1, p. 504.

`calculs.tex`, lignes 238–247.

Correction. Pour x d'image s, prendre le séparé-complété $\widehat{\Omega}^1_{\mathscr{H}(x)/\mathscr{H}(s)}$ du module des différentielles de $\mathscr{H}(x)$ sur $\mathscr{H}(s)$. Employer la même base $\mathscr{H}(s)$ dans la propriété universelle et dans la phrase qui place $\omega(x)$ dans cet espace de Banach.

849. Droite affine analytifiée et réunion de disques affinoïdes

Texte visé. Exemple 18.2.2, p. 504.

`calculs.tex`, lignes 259–264.

Correction. Écrire $X = (\mathbf{A}^1_k)^{\mathrm{an}}$. Cette droite est la réunion croissante des domaines affinoïdes $\mathscr{M}(k\{R^{-1}T\})$, pour les rayons réels $R > 0$. La coordonnée T et la différentielle $\mathrm{d}T$ se restreignent de façon compatible à ces disques. Sur le corps algébriquement clos du texte, poser $r = \inf_{a \in k} |T(x) - a|$. Si $r > 0$, la factorisation des fonctions rationnelles dans $k(T)$ et l'inégalité ultramétrique donnent $|Dg| \leq |g|/r$ pour $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}T$. La dérivation s'étend par continuité au corps résiduel complété. En appliquant D à toute présentation de $\mathrm{d}T$, on obtient $\|\mathrm{d}T\| \geq r$, car $D(T) = 1$. L'inégalité $\|\mathrm{d}(T - a)\| \leq |T(x) - a|$ donne la borne inverse en prenant l'infimum. Si $r = 0$, la complétude de k donne $T(x) \in k$, donc $\mathrm{d}T = 0$ dans la fibre. Le calcul vaut pour tous les rayons.

850. Zéros de la semi-norme canonique d'une différentielle

Texte visé. Proposition 18.2.4(a), p. 505.

`calculs.tex`, lignes 303–318.

Correction. Soit k complet, algébriquement clos et non trivialement valué, et soit ω une différentielle non nulle sur un domaine connexe V d'une courbe k-analytique quasi-lisse. Pour $x \in V$, lire

$$\|\omega(x)\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ est rigide.}$$

851. Corps des fonctions de la courbe résiduelle

Texte visé. § 18.2.5, p. 506.

`calculs.tex`, lignes 414–420.

Correction. Si le point ajouté x est de type II, le corps des fonctions de C_x est la composante de degré 1, $\widetilde{\mathscr{H}(x)}^{\,1} \simeq \tilde{k}^{\,1}(T)$. On a $C_x \simeq \mathbb{P}^1_{\tilde{k}^{\,1}}$ et $g(x) = 0$. Pour un point de type III, $g(x) = 0$ par définition. Dans les deux cas la valence 2 donne une contribution nulle au diviseur canonique.

852. Normalisation de la coordonnée modérée à la norme un

Texte visé. Lemme 18.2.10, démonstration, p. 507.

`calculs.tex`, lignes 530–538.

Correction. Écrire $|t(x)| = 1$. Au point de type II sur un corps de base algébriquement clos, la valeur absolue de $t(x)$ appartient au groupe des valeurs de la base. Multiplier t par un scalaire de la base pour obtenir la norme un. Le différentiel logarithmique $\mathrm{d}t/t$ est inchangé. L'élément réduit $\widetilde{t(x)}$ est alors de degré un, et le différentiel logarithmique de la coordonnée modérée normalisée est de norme un.

853. Produit des courants de courbure sur l'extension

Texte visé. Proposition 18.3.4, énoncé, p. 515.

`calculs.tex`, lignes 1108–1113.

Correction. Écrire $T_K = \bigwedge_i c_1(\pi^*\overline{L}_i)$. Dans des repères ordinaires, chaque facteur est le second différentiel du poids logarithmique tiré en arrière. Le résultat de support de Shilov s'applique au produit de ces poids locaux.

854. Bidegré des formes test dans le cas lisse

Texte visé. Preuve de la proposition 18.3.9, p. 517.

`calculs.tex`, lignes 1255–1273.

Correction. Pour tester la dérivée $d'd''[\log\|s\|^{-1}\, d'd''u_1 \wedge \cdots \wedge d'd''u_m]$, prendre α à support compact de bidegré $(n-m-1, n-m-1)$. Le produit avant dérivation est testé aux lignes 1301–1302 par une forme de bidegré $(n-m, n-m)$. Dans l'application de Poincaré–Lelong, employer le courant global $[\log\|s\|^{-1}]$ avant la restriction des formes test, afin de conserver le terme du diviseur.

855. Métriques primées dans la première intégrale

Texte visé. Preuve de la proposition 18.3.10, p. 518.

`calculs.tex`, lignes 1373–1379.

Correction. Dans le membre de gauche de l'égalité d'intégrales, prendre le produit des courants associés aux métriques primées. La forme ou le courant α construit dans la preuve vérifie

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''\alpha = c_1(\overline{L}_1') \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n') - c_1(\overline{L}_1) \wedge \cdots \wedge c_1(\overline{L}_n).$$

Sur X propre, l'intégrale de cette différence vaut $\langle \alpha, \mathrm{d}'\mathrm{d}''1\rangle = 0$. Les deux produits de courbure ont donc la même masse.

856. Signe du poids et espaces d'intégration dans la récurrence

Texte visé. Preuve du théorème 18.3.11, p. 519.

`calculs.tex`, lignes 1442–1456.

Correction. Dans l'application de Poincaré–Lelong, prendre le courant $[\log \|s\|^{-1}]$ sur X^{an} et garder ce même signe dans l'accouplement avec $\mathrm{d}'\mathrm{d}''\alpha$. Ici α est le produit fermé des autres courbures lisses, si bien que ce terme est nul.

L'intégrale de la forme de courbure se fait sur X^{an}, et le terme du diviseur analytique sur D^{an}. Sur le versant algébrique, prendre sur X le degré du produit $c_1(L_1)\cdots c_1(L_n)\cap[X]$. L'application récurrente aux composantes du diviseur compare les intégrales sur leurs analytifiés aux degrés sur leurs cycles algébriques.

857. Référence pour l'irréductibilité analytique

Texte visé. P. 523 (page imprimée et PDF), calculs.tex, ligne 1869.

L'argument invoque l'irréductibilité intrinsèque d'un ouvert de Zariski analytique non vide d'une composante irréductible. Remplacer [54] par [53] et conserver le renvoi au lemme 1.11. Dans le TeX, remplacer la clé `ducros2021` par `Ducros-2021`.

Le résultat invoqué figure dans Antoine Ducros, *Dévisser, découper, éclater et aplatir les espaces de Berkovich*, *Compositio Mathematica* **157** (2021), p. 236–302, lemme 1.11, p. 247. Il affirme que tout ouvert de Zariski non vide dans un espace analytique irréductible est lui-même irréductible. La même référence est déjà employée pour ce résultat à la ligne 61 de complements-ga.tex.

DOI 10.1112/S0010437X20007459

858. Immersion de la réduction après extension des scalaires

Texte visé. Preuve du théorème 18.4.7, p. 524.

`calculs.tex`, lignes 1924–1943.

Correction. Appliquer la formule d'image directe finie à l'immersion fermée $j\colon X_{K,\mathrm{red}}\to X_K$ et au degré calibré $1/m_K$. La transitivité de $\mathrm{Aut}(K/k)$ sur les composantes irréductibles de X_K donne leur longueur générique commune m_K. Pour $q\colon X_K\to X$, poser $p=q\circ j$. L'image directe par j donne

$$\bigwedge_i c_1(q^*L_i) = m_K\, j_*\left(\bigwedge_i c_1(p^*L_i)\right).$$

Utiliser ensuite la formule de changement de base pour l'image directe par q. On obtient $\bigwedge_i c_1(L_i) = m_K\, p_*(\bigwedge_i c_1(p^*L_i))$.

859. Degré résiduel sur le facteur de corps choisi

Texte visé. Preuve du théorème 18.4.7, p. 525.

`calculs.tex`, lignes 1965–1977.

Correction. Considérer le facteur local de l'algèbre artinienne graduée $\widetilde{\mathscr{H}(x)}\otimes_{\tilde{k}}\widetilde{K}$ choisi par y, puis son corps résiduel gradué. Son image dans $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ est le corps composé de $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ et de $\widetilde{K}$. Le degré fini $\tilde{d}$ est celui de $\widetilde{\mathscr{H}(y)}$ sur ce corps composé. La longueur totale $\tilde{\ell}$ reste

celle de l'algèbre tensorielle graduée, utilisée séparément dans la comparaison des nombres d'intersection.

860. Métriques dpsh dans la clause d'indépendance

Texte visé. Corollaire 18.4.10, p. 526.

`calculs.tex`, lignes 2355–2367.

Correction. Écrire que le nombre d'intersection « ne dépend pas des métriques dpsh dont on a muni les L_i ». La proposition 18.3.10, rappelée au début de la preuve, donne cette indépendance pour les métriques dpsh en testant sur la fonction constante 1 sur l'espace propre. Conserver la clause distincte selon laquelle cet entier est positif ou nul si les métriques sont psh.

861. Corps de base pour la multiplicité résiduelle

Texte visé. Proposition 18.5.8(d), p. 531.

`calculs.tex`, lignes 2867–2870.

Correction. Le coefficient $\lambda_{\mathfrak{X}}(x)$ est la multiplicité de la composante $\overline{\{\xi\}}$ de la fibre spéciale $\mathfrak{X}_{\tilde{k}}$. On a toujours $m(x) = \mathrm{df}_k(x) = 1$.

862. Cycle du modèle dans le cas propre

Texte visé. Proposition 18.5.8(e), p. 531.

`calculs.tex`, lignes 2872–2874.

Correction. Lorsque $\mathfrak{X}$ est propre, écrire $\mathrm{cycle}(\mathfrak{X}) = [\mathfrak{X}_{\tilde{k}}]$, le cycle de la fibre spéciale sur $\tilde{k}$.

863. Bidegré de la limite des approximants

Texte visé. Preuve du corollaire 18.6.2, p. 533.

`calculs.tex`, lignes 3246–3249.

Correction. Dans le second cas, le courant limite de

$$\big(d'd''(v_\varepsilon(\log|f_1|, \dots, \log|f_d|))\big)^d$$

est $(d'd''\phi)^d$. La continuité du produit de Bedford–Taylor porte ici sur le bidegré (d,d).

864. Dimension relative du morphisme vers l'espace affine

Texte visé. Énoncé de la proposition 18.7.3, p. 535.

`calculs.tex`, lignes 3408–3417.

Correction. Supposer $f = (f_1, \dots, f_d) \colon X \to \mathbb{A}^d$ purement de dimension relative $n-d$. La fibre en zéro Y définie par la suite régulière est purement de dimension $n-d$, et la forme test est de bidegré $(n-d, n-d)$.

865. Sens du morphisme de fibrés dans l'éclatement

Texte visé. Preuve du théorème 18.7.5, p. 536.

`calculs.tex`, lignes 3585–3589.

Correction. Prolonger l'isomorphisme sur U' en $\rho\colon \mathscr{L}_b \to \mathscr{L}_a$, de diviseur E, avec $-\log\|\rho\| = h'$. La courbure du fibré $\mathscr{L}_a \otimes \mathscr{L}_b^{-1}$ est $\alpha' - \beta'$, comme dans la formule de Poincaré–Lelong utilisée ensuite.

866. Coefficient de la masse sur la base

Texte visé. § 18.8.3, p. 538.

`calculs.tex`, lignes 3758–3764.

Correction. Lorsque $\dim_y Y = d$ et que y est un point d'Abhyankar, prendre le coefficient sur la base du morphisme f,

$$\lambda = m(y)\,\mathrm{df}_k(y) \int_{\widetilde{(Y,y)}} \prod_{j=1}^{d} c_1(\widetilde{M}_{j,y}).$$

Le terme correspondant sur X est $q^{-d}\lambda\,\delta_{f^{-1}(y)}$. Si y est hors du support discret de la mesure sur Y, on a $\lambda = 0$ après rétrécissement.

867. Dimension de la cible de la normalisation de Noether

Texte visé. Preuve du lemme 18.9.1, p. 544.

`calculs.tex`, lignes 4303–4311.

Correction. Avec $m = \dim Z$ et $d = \dim V - m$, la normalisation de Noether du voisinage affine Z' donne un morphisme fini et surjectif $\pi : Z' \to \mathbb{A}^m_K$. Poser $V' = q^{-1}(Z')$ dans V. Le morphisme composé $\pi \circ q$ et la droite de découpage ont alors pour cible et espace ambiant $\mathbb{A}^m_K$.

868. Indices des applications du cube

Texte visé. §19.1.2, pp. 547–548 du PDF, sans folio imprimé à la première page.

`varab.tex`, lignes 109–116.

Correction. Pour chaque $I \subseteq \{1,2,3\}$, définir

$$q_I(a_1,a_2,a_3) = \sum_{i\in I} a_i.$$

Pour $I = \emptyset$, la somme est nulle et $q_\emptyset : A^3 \to A$ est l'application constante d'image 0. Le produit de $\mathscr{D}_3(L)$ garde le facteur $q_\emptyset^* L^\vee$ pour un fibré sans rigidification. Une rigidification de L à l'origine trivialise canoniquement ce facteur.

869. Image des points valués dans le squelette réel

Texte visé. §19.2.2, p. 552.

`varab.tex`, lignes 578–580.

Correction. La restriction de la rétraction analytique aux K-points donne un homomorphisme $A(K) \to S(A)$. Dans la situation déployée, son image est

$$\tau(T(K))/\tau(\Lambda), \qquad \tau(T(K)) = (\log |K^\times|)^r$$

dans des coordonnées déployées du tore de rang r. Un point valué se relève via un isomorphisme local du revêtement analytique, qui conserve son corps résiduel complété. Les cartes du torseur donnent des coordonnées dans $K^\times$. Réciproquement, $T(K)$ réalise tout tuple du sous-groupe indiqué.

Pour la courbe de Tate de période p sur $\mathbb{Q}_p$, l'image de tous les points rationnels est l'origine de $\mathbb{R}/(\log |p|)\mathbb{Z}$. Le point de Gauss de rayon $|p|^{1/2}$ donne une autre classe. La rétraction analytique demeure surjective sur tout le squelette réel.

870. Potentiel logarithmique de la tropicalisation

Texte visé. Remarque 19.2.3, p. 552.

`varab.tex`, lignes 591–594.

Correction. Sur le lieu non nul du fibré Q en rang un, écrire $\tau(v) = \log \|v\|$, selon la convention des caractères de ce chapitre. C'est ce potentiel logarithmique qui intervient dans le calcul de courbure et d'harmonicité. La norme et son logarithme ont la même régularité lisse sur le lieu de norme strictement positive.

Pour une uniformisation de Tate scindée, B est un point et $E = \mathbf{G}_m^{\mathrm{an}}$. Le fibré trivial avec sa norme formelle donne $\|1\| = 1$, tandis que la coordonnée tropicale en 1 vaut zéro.

871. Renvoi aux données du fibré dans l'appendice B

Texte visé. § 19.2.4, p. 552.

`varab.tex`, lignes 651–653.

Correction. Remplacer le renvoi à l'ancienne plage de l'appendice par §§ B.6.1–B.6.3. Ces paragraphes introduisent les données des fibrés sur les variétés abéloïdes uniformisées. En particulier, le § B.6.3 donne la forme quadratique q_L reprise dans le calcul métrique du § 19.2.4. Le renvoi vise ainsi les définitions utilisées dans ce paragraphe.

872. Composante quadratique de la métrique canonique

Texte visé. Proposition 19.2.5, p. 553, `varab.tex`, lignes 695 et 736.

Correction. Sur le réseau, la composante homogène de degré deux s'écrit

$$\lambda \longmapsto \tfrac{1}{2} \log \|\langle \lambda, u(\lambda) \rangle\|.$$

Elle est la moitié de la valeur sur la diagonale de la polarisation logarithmique. En particulier, elle est nulle en $\lambda = 0$, où la norme du terme de couplage vaut un. Fermer aussi le crochet du couplage à la ligne 695 dans l'expression antérieure de cette composante.

873. Mesure de Haar et multiple signé

Texte visé. Corollaire 19.2.8(a) et (b), p. 554.

`varab.tex`, lignes 930–936.

Correction. Dire que les mesures sont des multiples scalaires d'une mesure de Haar, en autorisant un scalaire négatif ou nul. Sur $S(A)$, pour Haar de masse un, le coefficient est $\deg_L(A)$. Il est positif si L est ample.

Pour $g > 0$, le fibré trivial à métrique canonique a une mesure nulle. Sur une courbe elliptique de bonne réduction, le dual d'un fibré ample de degré un a pour mesure canonique l'opposé de la masse de Gauss, de masse totale -1. Ces exemples conservent l'invariance par translation.

874. Bornes de dimension des facteurs torique et abélien

Texte visé. Corollaire 19.2.8(a), preuve, p. 555.

`varab.tex`, lignes 985–990.

Correction. Dans le terme d'indice d, le facteur torique s'annule pour $d > r$, où $r = \dim \operatorname{Im} \tau$. Le facteur abélien est de puissance $g-d$ et s'annule lorsque $g-d > b$, avec $b = \dim B$. Comme $g = r + b$, un indice qui échappe aux deux annulations vérifie $d \leq r$ et $d \geq r$. Seul $d = r$ reste, avec le coefficient $\binom{g}{r}$ de la formule finale.

875. Borne de l'expansion binomiale des courants

Texte visé. Corollaire 19.2.9(a), preuve, p. 556.

`varab.tex`, lignes 1095–1100.

Correction. Dans la première expansion de la puissance e-ième, sommer de $j = 0$ à $j = e$. Chaque produit a alors les exposants non négatifs $e - j$ et j, comme dans la formule binomiale de l'énoncé. Si $e = 0 < d = 1$, le terme $j = 1$ de la somme imprimée demanderait une puissance -1, que le coefficient binomial nul ne rend pas définie.

876. Forme positive standard de l'espace réel

Texte visé. Proposition 19.3.1, preuve, p. 558.

`varab.tex`, lignes 1242–1245.

Correction. La norme euclidienne donne

$$\omega = \tfrac{1}{2} d' d'' \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{r} d' x_i \wedge d'' x_i.$$

Les dérivées croisées sont nulles. Dans la convention de signe du texte, la puissance ω^r est un multiple strictement positif de la forme-volume standard. La somme sur toutes les paires d'indices aurait une matrice de rang un, donc une puissance r-ième nulle pour $r > 1$.

877. Valeurs du séparateur lisse sur les deux points

Texte visé. Lemme A.2.3, démonstration, p. 565.

`app-separation.tex`, lignes 46–53.

Correction. Puisque $f(x) \neq f(y)$, choisir une fonction lisse réelle égale à 1 près de $f(x)$ et à 0 près de $f(y)$. Sa composée avec f prend ces valeurs sur des voisinages de x et y, par continuité. Pour un compact K disjoint de x, prendre le produit d'une famille finie de ces fonctions dont les voisinages d'annulation recouvrent K.

878. Support de la composée après le découpage des valeurs

Texte visé. Théorème A.2.5, démonstration, p. 566.

`app-separation.tex`, lignes 143–155.

Correction. Lorsque 0 appartient à l'intervalle prescrit, choisir la fonction lisse de découpage θ avec $\theta(0) = 0$. Alors

$$\operatorname{supp}\big(\theta \circ (hg)\big) \subseteq \operatorname{supp}(hg) \subseteq \operatorname{supp}(h) \subset U.$$

Si 0 n'appartient pas à l'intervalle, la fonction initiale ne s'annule pas. Les hypothèses sur son support donnent alors $U = X$ compact, ce qui assure directement la condition de support.

879. Ensemble de test compact pour l'approximation lisse

Texte visé. Preuve du corollaire A.2.6 b), p. 566.

`app-separation.tex`, lignes 186–196.

Correction. Écrire « Soit K une partie compacte de X ». Choisir un voisinage ouvert relativement compact V de K, puis une fonction lisse λ à support compact dans V et égale à 1 au voisinage de K. Le théorème A.2.5 appliqué à λf donne une fonction lisse g à support compact dans V telle que $\|g - \lambda f\| \leq \varepsilon$. Sur K, on a donc $\|g - f\|_K \leq \varepsilon$, ce qui donne l'approximation dans la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

880. Normalisation d'une partition de l'unité

Texte visé. Définition A.2.7, p. 566.

`app-separation.tex`, lignes 200–212.

Correction. En plus de la subordination par les supports et de la finitude locale, demander $f_i \geq 0$ et $\sum_i f_i = 1$ partout. La somme est localement finie. Sur un espace non vide, la famille identiquement nulle vérifie les seules conditions imprimées.

881. Dénombrabilité à l'infini des composantes dans le cas paracompact

Texte visé. § A.3.1, p. 568.

`app-mesure.tex`, lignes 4–11.

Correction. Préciser la parenthèse sur les composantes connexes. Si X est localement compact et paracompact, il est, par A.1.3, somme topologique de parties dénombrables à l'infini. Chaque composante connexe est fermée dans l'une de ces parties et donc dénombrable à l'infini. Réciproquement, si les composantes connexes sont ouvertes et dénombrables à l'infini, leur somme topologique est paracompacte.

Sur $\mathbf{C}((t))$, la droite projective privée de son point de Gauss est somme topologique d'une famille non dénombrable de branches. Elle est paracompacte et n'est pas dénombrable à l'infini. Le plan projectif privé de son point de Gauss est connexe et n'est pas dénombrable à l'infini. Il n'est donc pas paracompact.

882. Partie négative d'une fonction intégrable

Texte visé. §A.3.3, p. 569, `app-mesure.tex`, lignes 60–69.

Correction. Poser $f_- = \max(0, -f)$. Les deux parties sont non négatives, $f = f_+ - f_-$ et $|f| = f_+ + f_-$. Pour f intégrable, l'intégrale signée est la différence de leurs deux intégrales finies. Pour $f = -1$ sur un point de masse un, elle vaut ainsi -1.

883. Sous-recouvrement fini du compact V

Texte visé. Preuve du lemme A.3.9, p. 570.

`app-mesure.tex`, lignes 240–243.

Correction. Choisir une partie finie $S \subset V$ telle que les intérieurs des voisinages compacts V_x, pour $x \in S$, recouvrent V. Remplacer «recouvrent X» par «recouvrent V» à la ligne 243. La compacité de V fournit le choix de S. La conclusion du lemme est conservée.

884. Renvoi au recollement sur un recouvrement dénombrable

Texte visé. Preuve de la proposition A.3.12, p. 572.

`app-mesure.tex`, lignes 407–414.

Correction. À l'endroit où l'on recolle les mesures boréliennes sur X à l'aide du sous-recouvrement fini $(A_j)_{j\in J}$, remplacer le renvoi à A.3.8 par le renvoi à A.3.10. Les A_j forment un recouvrement dénombrable et les μ_j coïncident sur leurs intersections. On obtient ainsi une mesure borélienne μ sur X.

Pour chaque i, les ensembles $A_i \cap A_j$, avec $j \in J$, forment un recouvrement fini de A_i. Les restrictions de $\mu|_{A_i}$ et de μ_i y coïncident par compatibilité. L'unicité dans A.3.10 sur ce recouvrement donne $\mu|_{A_i} = \mu_i$.

885. Ensemble résiduel dans le recollement de mesures

Texte visé. Proposition A.3.12, p. 572, `app-mesure.tex`, lignes 418–423.

Correction. Dans le recouvrement compact fini, les C_i sont choisis dans $A \cap A_i$, et pour $C = \bigcup_i C_i$ on a

$$(A \setminus C) \cap A_i \subset (A \cap A_i) \setminus C_i.$$

Le bon terme est donc $\mu_i((A\cap A_i)\setminus C_i)$, au plus la tolérance dans le cas de masse finie. Avec la mesure de Lebesgue sur $A_i = [0,1]$ et $C_i = A = [0,1/10]$, le terme imprimé vaut $9/10$ malgré un résidu nul dans A.

886. Régularité dans le cas de masse infinie

Texte visé. Proposition A.3.12, p. 572, `app-mesure.tex`, lignes 418–419.

Correction. Employer l'approximation à ε pour $\mu(A) < \infty$, avec le résidu de n° 885. Sur un espace compact muni d'un recouvrement compact fini, si $\mu(A) = \infty$, au moins une trace $\mu_i(A \cap A_i)$ est infinie. La régularité intérieure y donne, pour tout réel $M < \infty$, un compact de masse supérieure à M, également compact dans A. Le supremum des masses compactes est donc infini. Par exemple, la mesure de masse infinie sur un seul point est régulière et relève de ce second cas.

887. Paramètre scalaire du segment semi-ouvert

Texte visé. § A.4.1, p. 573.

`app-convex.tex`, lignes 17–22.

Correction. Pour le segment $]x,y]$, prendre $t \in]0,1]$ dans la paramétrisation $(1-t)x+ty$. Les trois autres segments gardent les intervalles scalaires $[0,1]$, $[0,1[$ et $]0,1[$ dans l'ordre imprimé.

888. Intersection de parties convexes

Texte visé. § A.4.2, p. 573.

`app-convex.tex`, lignes 24–31.

Correction. Lire « L'intersection d'une famille de parties convexes est convexe. » Si deux points appartiennent à l'intersection, leur segment appartient à chaque membre de la famille et donc à l'intersection.

889. Rayons des boules dans l'argument du segment

Texte visé. Preuve du lemme A.4.4, p. 573.

`app-convex.tex`, lignes 64–73.

Correction. Pour $0 < t < 1$, poser $z = (1-t)x + ty$ et choisir $y' = y + v$ dans C avec $\|v\| < (1-t)\delta/(2t)$. Pour $\|u\| < (1-t)\delta/2$, poser

$$x' = x - \frac{t}{1-t}v + \frac{1}{1-t}u.$$

Alors $\|x' - x\| < \delta$, donc $x' \in C$, et $z + u = (1-t)x' + ty' \in C$ par convexité. La boule relative de centre z et de rayon $(1-t)\delta/2$, dans l'enveloppe affine de C, est donc contenue dans C.

890. Intérieur relatif de l'image affine d'un convexe

Texte visé. Preuve de la première assertion de la proposition A.4.8, p. 575.

`app-convex.tex`, lignes 194–200.

Correction. Remplacer la dernière égalité de la preuve par

$$\mathrm{ri}(f(C)) = f(\mathrm{ri}(C)).$$

Si C est non vide, on se place dans les enveloppes affines de C et de $f(C)$. La restriction de f devient une application affine ouverte sur son image. La continuité de f et la densité de $\mathrm{ri}(C)$ dans l'adhérence de C donnent la même adhérence pour $f(C)$ et $f(\mathrm{ri}(C))$. Ces deux convexes ont donc le même intérieur relatif, d'où l'inclusion de gauche à droite. L'ouverture de f donne l'autre inclusion.

891. Second facteur dans la réduction du produit distingué

Texte visé. § B.4.14, p. 586, `app-formel.tex`, lignes 303–309.

Correction. Écrire $X \times_k Y$, avec réduction $\widetilde{X} \times_{\tilde{k}} \widetilde{Y}$. On peut supprimer la quantification inutilisée sur une extension K. Une version sur K doit expliciter le changement de corps des deux facteurs.

Pour $X = \mathscr{M}(k)$ et $Y = \mathscr{M}(k\{T\})$, les deux affinoïdes sont distingués et leurs réductions sont géométriquement réduites. La réduction de $X \times_k X$ est un point, alors que $\widetilde{X} \times_{\tilde{k}} \widetilde{Y}$ est une droite affine. La formule corrigée utilise le théorème de Bosch cité dans le texte.

892. Sous-groupe affinoïde de module un

Texte visé. § B.5.3, p. 587, `app-abeloid.tex`, lignes 53–54.

Correction. Écrire

$$\mathbf{G}_{m,k,1} = \mathscr{M}(k\{T, T^{-1}\}) = \{x \in \mathbf{G}_{m,k}^{\mathrm{an}} : |T(x)| = 1\}.$$

Sur ce spectre affinoïde, les deux coordonnées T, T^{-1} ont module au plus un, d'où l'égalité. Comme la valuation de k est non triviale, un élément $a \in k^\times$ de module différent de un fournit un point $T = a$ du groupe analytique en dehors de ce sous-groupe. C'est le sous-groupe de module un qui intervient dans la définition du tore affinoïde.

893. Fibre duale à l'origine dans le cocycle

Texte visé. § B.6.2, comparaison avec le fibré de Poincaré, p. 593.

`app-abeloid.tex`, lignes 587–609.

Correction. Dans le dernier produit tensoriel du calcul, écrire

$$\phi(\lambda)^* \theta_M(\phi(\mu)) \otimes 0^*\big(\theta_M(\phi(\mu))^{-1}\big)\,.$$

Le second facteur est le dual de la fibre à l'origine du fibré de Poincaré correspondant. La rigidification à l'origine identifie ce facteur inverse à la droite des scalaires. On obtient ainsi la fibre de $\mathscr{P}$ au point $(\phi(\lambda), \phi'(u(\mu)))$ et le cocycle affiché avec le facteur $r(0)$.

894. Adhérence de Cartier sur le modèle abélien fixé

Texte visé. Preuve du lemme B.6.5, p. 594.

`app-abeloid.tex`, lignes 683–687.

Correction. Utiliser $\mathfrak{B}$ comme schéma formel ambiant aux lignes 683–687. Le lemme 2.9 de Lütkebohmert fournit le rapprochement sur une base discrètement valuée. Sur le modèle abélien formel fixé sur un corps de valuation de rang un, on procède comme suit. Lemme 2.9

Sur les affinoïdes génériques distingués des ouverts affines formels non vides, la fibre spéciale intègre assure la multiplicativité de la norme spectrale et la conservation de cette norme par restriction à un tel ouvert. Les équations locales du diviseur générique ont donc une même norme, à valeurs dans $|k^\times|$, et un seul scalaire les normalise. Si h est une équation de norme 1, alors $\|hb\| = \|b\|$. La contraction de l'idéal générique (h) dans l'anneau formel est ainsi engendrée par h, ce qui donne l'adhérence de Cartier effective $\mathfrak{D}$.

Pour un fibré formel de classe générique triviale, normaliser de même un repère global de la fibre générique. Ses expressions locales et leurs inverses sont de puissance bornée et définissent un repère formel. Cela donne l'injectivité du passage des classes de fibrés à la fibre générique. En particulier, $\mathfrak{L}^{\otimes n} \simeq \mathscr{O}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{D})$.

895. Modèle formel du domaine et algébrisation de l'extension

Texte visé. Remarque B.6.6, p. 594.

`app-abeloid.tex`, lignes 737–748.

Correction. Le domaine de Néron N, considéré comme un espace analytique compact, strict et topologiquement séparé, admet un modèle formel admissible par B.1.6. On peut prendre un atlas formel affine fini. La réalisation d'une structure de groupe formel préalablement fixée ou son algébrisation demande une assertion distincte, avec cette structure explicitée.

L'algébrisation démontrée dans cette remarque concerne l'extension E. En rang torique strictement positif, le noyau du morphisme $E \to A$ est infini et de dimension zéro. Il ne peut donc être le noyau de dimension zéro d'un homomorphisme algébrique de type fini.

896. Pagination de l’article original d’Arakelov

Texte visé. Bibliographie, notice d’Arakelov (1974), folio PDF 597, dont le numéro est omis dans l’original.

`fdceb.bbl`, lignes 23–26.

Correction. Dans la notice de l’original russe d’Arakelov, lire *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 38 (1974), no 6, p. 1179–1192. La traduction anglaise d’« Intersection theory of divisors on an arithmetic surface » est parue dans *Math. USSR-Izv.* 8 (1974), no 6, p. 1167–1180, DOI 10.1070/IM1974v008n06ABEH002141. Ces deux éditions donnent la construction d’intersection sur une surface arithmétique.

897. Titre du livre de Baker et Rumely

Texte visé. Bibliographie, notice de Baker et Rumely (2010), folio PDF 597, dont le numéro est omis dans l’original.

`fdceb.bbl`, lignes 29–31.

Correction. Lire « Potential Theory and Dynamics on the Berkovich Projective Line », *Mathematical Surveys and Monographs* 159, American Mathematical Society, 2010. Ce titre est celui de la notice AMS, DOI 10.1090/surv/159.

898. Titre de l’article de Chambert-Loir

Texte visé. Bibliographie, notice de Chambert-Loir (2006), p. 599.

`fdceb.bbl`, lignes 191–192.

Correction. Lire « Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 595 (2006), p. 215–235. Le titre figure ainsi dans la version d’auteur et dans la notice du DOI 10.1515/CRELLE.2006.049.

899. Collection de la référence [41]

Texte visé. Référence [41], fdceb.bbl, lignes 208–212, p. 599 (imprimée et PDF).

Le chapitre de S.-S. Chern, H. I. Levine et L. Nirenberg, *Intrinsic norms on a complex manifold*, figure dans *Global Analysis: Papers in Honor of K. Kodaira*. Remplacer « Annals of Mathematics Studies » par *Princeton Mathematical Series*, vol. 29. Les pages liminaires de l’édition de 1969 donnent University of Tokyo Press et Princeton University Press comme coéditeurs.

Les références historiques consultées indiquent les pages 119–139. L’étendue exacte du texte, le résultat précis et sa preuve restent à vérifier dans le chapitre original. Le DOI ci-dessous identifie le chapitre dans l’édition numérique.

Catalogue Princeton · DOI 10.1515/9781400871230-007

900. Titre de la référence [51]

Texte visé. Bibliographie, référence [51], fdceb.bbl, lignes 256–259, p. 600 (page imprimée et PDF).

Dans le titre de l’article d’Antoine Ducros, remplacer « non ramifiée » par « modérément ramifiée ». La référence complète est Antoine Ducros, *Toute forme modérément ramifiée d’un polydisque ouvert est triviale*, *Mathematische Zeitschrift* **273** (2013), nos 1–2, p. 331–353. Ce titre figure en tête de l’article publié, p. 331.

DOI 10.1007/s00209-012-1007-y

901. Pagination de l’article de Gillet et Soulé

Texte visé. Référence [70], p. 601.

`fdceb.bbl`, lignes 341–344.

Correction. Dans la bibliographie, lire « H. Gillet et C. Soulé, Arithmetic intersection theory, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 72 (1990), p. 93–174 ». Le titre et le sommaire de l’article figurent à la p. 93. L’introduction commence à la p. 94.

902. Première partie du volume pour l’article de Harvey

Texte visé. Référence [84], p. 602.

`fdceb.bbl`, lignes 408–412.

Correction. Dans la référence [84], remplacer « Part 2 » par « Part 1 ». La contribution occupe les pp. 309–382. Le résultat de positivité complexe invoqué est le corollaire 1.17, p. 324.

903. Volume de l’article de Lagerberg

Texte visé. Bibliographie [92], p. 602.

`fdceb.bbl`, lignes 448–451.

Correction. La référence correcte est A. Lagerberg, « Super currents and tropical geometry », *Mathematische Zeitschrift* **270** (2012), nos 3–4, p. 1011–1050, DOI 10.1007/s00209-010-0837-8. Le volume est 270, et 2012 reste l’année de l’édition imprimée.

904. Collection du livre de Lazarsfeld

Texte visé. Bibliographie [93], p. 602.

`fdceb.bbl`, lignes 453–456.

Correction. Citer R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. **48**, Springer Berlin Heidelberg, 2004, DOI 10.1007/978-3-642-18808-4.

905. Volume du journal pour « The structure of proper rigid groups »

Texte visé. Bibliographie, référence [97], p. 603.

`fdceb.bbl`, lignes 474–477.

Correction. Lire W. Lütkebohmert, « The structure of proper rigid groups », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **468** (1995), p. 167–219. En-tête de l’article

906. Date de publication de l’article de Stoll

Texte visé. Référence [123], p. 604.

`fdceb.bbl`, lignes 600–602.

Correction. Dans la bibliographie, lire « W. Stoll, The continuity of the fiber integral, Mathematische Zeitschrift 95 (1967), no 2, p. 87–138 ». Le 1er juin 1966 est la date de réception du manuscrit. La comparaison avec Stoll porte sur la continuité des intégrales sur les fibres complexes pondérées par les multiplicités. La régularité dans le cas sans bord relève de l’argument analytique distinct de CLD.