Les singularités $\mathcal{I}$-bonnes — L'intersection entre la théorie analytique et la théorie algébrique

Mingchen Xia

IMJ-PRG

03/01/2023

Références

Cet exposé concerne les articles suivants :

DX20 The closures of test configurations and algebraic singularity types, (avec Tamás Darvas), Advances in Mathematics ;

DX21 The volume of pseudoeffective line bundles and partial equilibrium, (avec Tamás Darvas), Geometry & Topology ;

Xia20 Pluripotential-theoretic stability thresholds, IMRN ;

Xia21 Partial Okounkov bodies and Duistermaat–Heckman measures of non-Archimedean metrics ;

Xia22 Non-pluripolar products on vector bundles and Chern–Weil formulae on mixed Shimura varieties.

Contexte

- X : variété Kählerienne equidimensionale compacte de dimension n.
- L : fibré en droite holomorphe sur X.
- h : métrique psh (peut-être singulière) sur L, i.e., h est semi-continue inférieurement et à courbure positive.

But

Nous allons comparer les invariants analytiques associés à (X, L, h) avec ceux algébriques.

Exemple

Supposons que L est ample et h est lisse, alors

$$\int_X c_1(L,h)^n = (L^n) = \lim_{k\to\infty} \frac{n!}{k^n} h^0(X, L^k).$$

But

Nous allons comparer les invariants analytiques associés à (X, L, h) avec ceux algébriques.

Exemple

Supposons que L est ample et h est lisse, alors

$$\int_X c_1(L, h)^n = (L^n) = \lim_{k\to\infty} \frac{n!}{k^n} h^0(X, L^k).$$

Ici $\int_X c_1(L, h)^n$ est de nature analytique.
(L^n) et $\lim_{k\to\infty} \frac{n!}{k^n} h^0(X, L^k)$ sont de nature algébrique.

But

Nous avons besoin de telles formules quand h est singulière. Pourquoi ?

- Nous avons besoin de noyaux de Bergman partiels, c.-à-d., par rapport à des espaces de sections définis par des conditions L^2, p.ex. quand on étudie les cone metrics à la Chen–Donaldson–Sun ;

But

Nous avons besoin de telles formules quand h est singulière. Pourquoi ?

- Nous avons besoin de noyaux de Bergman partiels, c.-à-d., par rapport à des espaces de sections définis par des conditions L^2, p.ex. quand on étudie les cone metrics à la Chen–Donaldson–Sun ;
- Sur la variété Abelienne universelle (par rapport à la structure de niveau ≥ 3), les métriques naturelles (Mumford–Lear) sur des fibrés automorphes (fibrés de Siegal–Jacobi) sont singulières à l'infini.

Quand h est singulière

Question principale, Version 1

Quand h est singulière,

$$\int_X c_1(L,h)^n \stackrel{?}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{n!}{k^n} h^0(X, L^k).$$

Quand h est singulière

Question principale, Version 1

Quand h est singulière,

$$\int_X c_1(L,h)^n \stackrel{?}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{n!}{k^n} h^0(X, L^k).$$

Il faut donner un sens à $\int_X c_1(L,h)^n$. Dans cet exposé, le produit $c_1(L,h)^n$ est toujours le produit non-pluripolaire (Boucksom–Eyssidieux–Guedj–Zeriahi), c.-à-d.,

- Quand h est lisse, $c_1(L,h)^n$ est le produit des formes lisse $c_1(L,h)$;
- Quand h est bornée, $c_1(L,h)^n$ est le produit classique (Bedford–Taylor) ;
- En générale, $c_1(L,h)^n$ ne met aucunes masses aux ensembles pluripolaires.

Exemple

Exemple

$X = \mathbb{P}^1$, $L = \mathcal{O}(1)$ et h la métrique sur L telle que $h \sim \exp(-\log|z|^2)$ sur $\mathbb{C} \subseteq X$.

Exemple

Exemple

$X = \mathbb{P}^1$, $L = \mathcal{O}(1)$ et h la métrique sur L telle que $h \sim \exp(-\log|z|^2)$ sur $\mathbb{C} \subseteq X$.

Alors $c_1(L,h) = 0$ (au sens non-pluripolaire). Donc

$$\int_X c_1(L,h)^n < \lim_{k\to\infty} \frac{n!}{k^n} h^0(X, L^k) = 1.$$

Exemple

Exemple

$X = \mathbb{P}^1$, $L = \mathcal{O}(1)$ et h la métrique sur L telle que $h \sim \exp(-\log|z|^2)$ sur $\mathbb{C} \subseteq X$.

Alors $c_1(L,h) = 0$ (au sens non-pluripolaire). Donc

$$\int_X c_1(L,h)^n < \lim_{k\to\infty} \frac{n!}{k^n} h^0(X, L^k) = 1.$$

À faire

Il faut rétrécir $H^0(X, L^k)$!

Faisceaux d'idéaux multiplicateurs

Définition

Le faisceau d'idéal multiplicateur associé à h est le faisceau suivant :

$$\mathcal{I}(h)(U) := \left\{ s \in \mathcal{O}_X(U) : |s|_h^2 \text{ est localement intégrable} \right\}.$$

D'après Nadel, $\mathcal{I}(h)$ est un faisceau cohérent.

En particulier,

$$H^0(X, L^k \otimes \mathcal{I}(h^{\otimes k})) = \left\{ s \in H^0(X, L^k) : \int_X |s|^2_{h^{\otimes k}} < \infty \right\}.$$

Volume algébrique

Définition

Le volume algébrique de (L, h) est

$$\operatorname{vol}(L,h) := \lim_{k\to\infty} \frac{n!}{k^n} h^0(X, L^k \otimes \mathcal{I}(h^{\otimes k})).$$

Théorème (DX20, DX21)

La limite existe.

Volume algébrique

Définition

Le volume algébrique de (L,h) est

$$\operatorname{vol}(L,h) := \lim_{k\to\infty} \frac{n!}{k^n} h^0(X, L^k \otimes \mathcal{I}(h^{\otimes k})).$$

Théorème (DX20, DX21)

La limite existe.

Question principale, version 2

$$\int_X c_1(L,h)^n \stackrel{?}{=} \operatorname{vol}(L,h).$$

Théorème de Bonavero

Définition

Quand les singularités de h (ou plus précisément de $-\log h$) sont localement de la forme $\log \sum_i |f_i|$, où f_i sont holomorphes, alors on dit h a des singularités analytiques.

Théorème (Bonavero)

Quand h a des singularités analytiques, notre question principale est vrai :

$$\int_X c_1(L,h)^n = \mathrm{vol}(L,h).$$

Théorème de Bonavero

Définition

Quand les singularités de h (ou plus précisément de $-\log h$) sont localement de la forme $\log \sum_i |f_i|$, où f_i sont holomorphes, alors on dit h a des singularités analytiques.

Théorème (Bonavero)

Quand h a des singularités analytiques, notre question principale est vrai :

$$\int_X c_1(L,h)^n = \mathrm{vol}(L,h).$$

Par contre,

Exemple

Berman–Boucksom–Jonsson ont construit h sur $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ telle que $\int_X c_1(L,h)^n < \mathrm{vol}(L,h)$.

Extension du théorème de Bonavero

Théorème (DX20, DX21)

En général,

$$\int_X c_1(L,h)^n \leq \mathrm{vol}(L,h).$$

On aimerais comprendre quand on a l'égalité. Quand $\int_X c_1(L,h)^n = \mathrm{vol}(L,h) > 0$, on dit que h est $\mathcal{I}$-bonne.

Extension du théorème de Bonavero

Théorème (DX20, DX21)

En général,

$$\int_X c_1(L,h)^n \leq \mathrm{vol}(L,h).$$

On aimerais comprendre quand on a l'égalité. Quand $\int_X c_1(L,h)^n = \mathrm{vol}(L,h) > 0$, on dit que h est $\mathcal{I}$-bonne.
Ce théorème se réduit essentiellement au théorème de Bonavero. Mais la réduction n'est pas du tout triviale !

Les métriques $\mathcal{J}$-bonnes

Pour que notre théorème soit utile, il faut comprendre la condition d'être $\mathcal{J}$-bonne.

Théorème (DX20, DX21)

Supposons que $\int_X c_1(L,h)^n > 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- h *est $\mathcal{J}$-bonne ;*
- h *est dans la clôture de l'espace des singularités analytiques (par rapport à la métrique de Darvas–Di Nezza–Lu) ;*
- *Si l'on prend une forme $\theta \in c_1(L)$ et représente h par $\varphi \in \mathrm{PSH}(X,\theta)$, alors*
$$P[\varphi] = P[\varphi]_{\mathcal{J}}.$$

Ici $P[\bullet]$ et $P[\bullet]_{\mathcal{J}}$ sont des opérateurs de projection.

Les métriques $\mathcal{J}$-bonnes

Définition

On dit $\varphi, \psi \in \mathrm{PSH}(X, \theta)$ sont $\mathcal{J}$-équivalents si les conditions équivalentes suivantes sont remplies :

- $\mathcal{J}(k\varphi) = \mathcal{J}(k\psi)$ pour tout k ;
- Les nombres de Lelong de φ et ψ sur tous les modèles birationels de X sont égaux.

Les métriques $\mathcal{J}$-bonnes

Définition

On dit $\varphi, \psi \in \mathrm{PSH}(X, \theta)$ sont $\mathcal{J}$-équivalents si les conditions équivalentes suivantes sont remplies :

- $\mathcal{J}(k\varphi) = \mathcal{J}(k\psi)$ pour tout k ;
- Les nombres de Lelong de φ et ψ sur tous les modèles birationels de X sont égaux.

Alors

$$P[\varphi] := \sup \{\psi \in \mathrm{PSH}(X, \theta) : \psi \leq 0, \psi \leq \varphi + C\}$$

et

$$P[\varphi]_{\mathcal{J}} := \sup \{\psi \in \mathrm{PSH}(X, \theta) : \psi \leq 0, \psi, \varphi \text{ sont } \mathcal{J}\text{-équivalents}\}.$$

Slogan

On voit que les singularités $\mathcal{I}$-bonnes sont exactement celles qui rendent le volume algébrique et le volume analytique égaux.

Slogan

D'être $\mathcal{I}$-bonne est exactement la condition qui garantit que les invariants analytiques sont égaux aux invariants algébriques.

Slogan

On voit que les singularités $\mathcal{J}$-bonnes sont exactement celles qui rendent le volume algébrique et le volume analytique égaux.

Slogan

D'être $\mathcal{J}$-bonne est exactement la condition qui garantit que les invariants analytiques sont égaux aux invariants algébriques.

On verra un autre exemple de notre slogan tout de suite.

Riemann–Roch

Rappelons que quand L est ample et h est lisse,

$$\int_X c_1(L,h)^n = \lim_{k\to\infty} \frac{k^n}{n!} h^0(X,L^k) = (L^n).$$

Riemann–Roch

Rappelons que quand L est ample et h est lisse,

$$\int_X c_1(L,h)^n = \lim_{k\to\infty} \frac{k^n}{n!} h^0(X, L^k) = (L^n).$$

En général, on a

$$\int_X c_1(L,h)^n = \lim_{k\to\infty} \frac{k^n}{n!} h^0(X, L^k \otimes \mathcal{J}(h^{\otimes k})) = ?.$$

Riemann–Roch

Rappelons que quand L est ample et h est lisse,

$$\int_X c_1(L,h)^n = \lim_{k\to\infty} \frac{k^n}{n!} h^0(X, L^k) = (L^n).$$

En général, on a

$$\int_X c_1(L,h)^n = \lim_{k\to\infty} \frac{k^n}{n!} h^0(X, L^k \otimes \mathcal{I}(h^{\otimes k})) = ?.$$

Il faut avoir une théorie d'intersection !

b-diviseur

Définition

Un b-diviseur $\mathbb{D}$ sur X est une collection de (classe numérique) de diviseurs $\mathbb{D}_Y$ sur tous les modèles birationels (propre) $Y \to X$ de X, compatible par rapport aux push-forwards.

Exemple, Xia20

Nous définissons un b-diviseur $\mathbb{D}(L, h)$ à partir de h. Soit $p : Y \to X$ un modèle birationel. Alors nous définissons

$$\mathbb{D}(L, h)_Y := p^*L - \text{partie divisorielle de } c_1(p^*L, p^*h).$$

b-diviseur

Théorème (Xia19, Xia22)

Supposons que $\int_X c_1(L,h)^n > 0$*. Le b-diviseur* $\mathbb{D}(L,h)$ *est nef (au sens de Dang–Favre) et les conditions suivantes sont équivalentes :*

- h *est* $\mathcal{I}$*-bonne ;*
- $\int_X c_1(L,h)^n = (\mathbb{D}(L,h)^n)$.

Un cas particulier a été prouvé par Botero–Burgos Gil–Holmes–de Jong (2022) aussi. Ils ont montré que l'anneau des formes automorphes de Siegel–Jacobi n'est pas de type fini.

b-diviseur

Théorème (Xia19, Xia22)

Supposons que $\int_X c_1(L,h)^n > 0$. *Le b-diviseur* $\mathbb{D}(L,h)$ *est nef (au sens de Dang–Favre) et les conditions suivantes sont équivalentes :*

- h *est* $\mathcal{I}$*-bonne ;*
- $\int_X c_1(L,h)^n = (\mathbb{D}(L,h)^n)$.

Un cas particulier a été prouvé par Botero–Burgos Gil–Holmes–de Jong (2022) aussi. Ils ont montré que l'anneau des formes automorphes de Siegel–Jacobi n'est pas de type fini.

Ce théorème est une autre manifestation de notre slogan.

Tous les résultats mentionnés sont généralisés aux fibrés vectoriels dans Xia22.

Théorème (DX21)

Soit ν un mesure de Berstein–Markov sur X (par exemple, une forme lisse de type (n,n)) et $v \in C^0(X)$, alors les noyaux de Bergman partiels $\beta^k_{v,h,\nu}$ définis par les données convergent vers le mesure équilibre.

Ce théorème généralise tout ce qu'on savait auparavant dans cette direction.

Applications

Théorème (DX21)

Soit ν un mesure de Berstein–Markov sur X (par exemple, une forme lisse de type (n,n)) et $v \in C^0(X)$, alors les noyaux de Bergman partiels $\beta^k_{v,h,\nu}$ définis par les données convergent vers le mesure équilibre.

Ce théorème généralise tout ce qu'on savait auparavant dans cette direction.
Pour la preuve, nous avons établit une direction à la force brutale et ensuite il suffit d'appliquer le fait que le volume algébrique est égal à celui analytique.

Applications

Pour tout (L, h) et toute valuation ν de $\mathbb{C}(X)^\times$. J'ai construit un corps d'Okounkov $\Delta_\nu(L, h) \subseteq \mathbb{R}^n$, qui dépend de manière continue de h.

Théorème (Xia21)

Les corps d'Okounkov $(\Delta_\nu(L, h))_\nu$ sont des invariants universels des singularités de h à $\mathcal{I}$-équivalence près.

Dans la preuve, les théorèmes précédents jouent un rôle indispensable.

Applications

La preuve de DX20 dépend de la théorie pluripotentielle non-Archimédienne de Boucksom–Jonsson.
Réciproquement, DX20+DX21 nous permet d'établir une généralisation de la théorie de Boucksom–Jonsson.

Théorème (Darvas–X.–Zhang, à paraître)

Pour une classe pseudoeffective de type $(1,1)$ sur X (non nécessairement dans le groupe de Néron–Severi), on peut définir une théorie pluripotentielle non-Archimédienne (même si il n'y a pas un espace analytique au sens de Berkovich associé à X).

Corollaire (Boucksom–Jonsson)

La conjecture d'enveloppes de Boucksom–Jonsson est vrai si la variété est lisse.

Applications

Théorème (Xia20)

Si X est de Fano, on peut définir un invariant de δ en terme des singularités $\mathcal{I}$-bonnes tel que $\delta > 1$ ssi X est uniformément K-stable.

Théorème (Xia20)

Si X est de Fano, on peut définir un invariant de δ en terme des singularités $\mathcal{I}$-bonnes tel que $\delta > 1$ ssi X est uniformément K-stable.

L'étude récente sur Ding stabilité d'une big classe est basée sur nos résultats. Par exemple, Dervan–Reboulet 22, Darvas–Zhang 22, Darvas–Xia–Zhang (à paraître).

Merci !